Листок 4. Уравнение теплопроводности и волновое уравнение

УРЧП, 3-4 курс, **15.04.2016**

Листок на двух страницах.

4◇1 Постройте функцию Грина оператора $L = -\frac{d^2}{dx^2} + 1$ с граничными условиями $u'(0) = u'(l) = 0$.

4◇2 Решите задачу Коши:
а) $u_t = u_{xx} + 3t^2$, $u|_{t=0} = \sin x$;
б) $u_t = 2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + t\cos x$, $u|_{t=0} = \cos y \cos z$.

4◇3 При каких условиях на функцию $\varphi \in C_0^\infty((0,1))$ любое решение $u(x,t)$ в полуполосе $Q^\infty_{(0,1)}$ задачи
а) $u_t = u_{xx}$, $u|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$;
б) $u_t = u_{xx}$, $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0$, $t|_{t=0} = \varphi(x)$
обладает свойством $u(x,t) \to 0$ при $t \to +\infty$?

4◇4 При каких $t > 0$ существует интеграл Пуассона, дающий решение задачи Коши

$$u_t = u_{xx}, \qquad u|_{t=0} = \varphi(x),$$

если требование ограниченности $\varphi(x)$ заменяется предположением

$$|\varphi(x)| \leqslant M e^{Kx^2}, \qquad M > 0, \quad K > 0?$$

Волновое уравнение в двух- и трехмерном пространстве

Решение задачи Коши $u_{tt} = a^2\Delta u$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$, где Δ – n-мерный оператор Лапласа, выражается формулами:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\int_{|\xi-x|<at}\frac{\psi(\xi)d\xi}{\sqrt{(at)^2-|\xi-x|^2}}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\int_{|\xi-x|<at}\frac{\psi(\xi)d\xi}{\sqrt{(at)^2-|\xi-x|^2}}\right],$$

(формула Пуассона) при $n=2$;

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi-x|=at}\psi(\xi)dS_\xi+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|\xi-x|=at}\varphi(\xi)dS_\xi\right] \quad \text{(ф-ла Кирхгофа)};$$

при $n=3$.

4◇5 Докажите, что если $f(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ — гармонические функции в $\mathbb{R}^n$, а $g(t) \in C^1(t \geqslant 0)$, то решение задачи Коши

$$u_{tt} = a^2\Delta u + g(t)f(x), \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x)$$

выражается формулой $u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + f(x)\int_0^t (t-\tau)g(\tau)d\tau$.

4◇6 Найдите решение $u(x,t)$, $x = (x_1,x_2,x_3)$, в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ задачи:

$$u_{tt} = \Delta u, \qquad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \|x\|^7.$$

4◇7 Найдите решение $u(x,t)$, $x = (x_1,x_2,x_3)$, в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ задачи:

$$u_{tt} = \Delta u, \qquad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \frac{1}{1+(x_1+x_2+x_3)^2}.$$

4◇8 Пусть $u(x,y,t)$ — решение при $t \geqslant 0$ задачи Коши:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \qquad u(x,y,0) = 0, \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2),$$

где $\psi(x,y) = 0$ при $(x,y) \in [0,1] \times [0,2]$, $\psi(x,y) > 0$ при остальных (x,y).
а) Опишите с помощью неравенств множество всех значений $(x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}_+$, для которых $u(x,y,t) = 0$.
б) Нарисуйте это множество.