

# Динамические системы 2015/2016, 7

В.А. Побережный

## 1 Элементарные симметрии

Из явного вида уравнений Эйлера-Лагранжа можно легко получить ряд утверждений о свойствах экстремалей задачи в случаях, когда лагранжиан системы имеет простые вырождения, например, не зависит от каких-либо переменных из  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  или  $t$ .

**Определение 1** В задаче о минимизации для функционала действия

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

- величина  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  называется (обобщённым) импульсом
- величина  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$  называется (обобщённой) силой
- величина  $\dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L$  называется энергией
- величина  $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  называется интегралом движения или первым интегралом системы если на всякой экстремали  $\hat{\mathbf{q}}(t)$  выполняется  $\frac{d}{dt} f(\hat{\mathbf{q}}(t), \dot{\hat{\mathbf{q}}}(t), t) = 0$ .

**Предложение 1** Если лагранжиан не зависит явно от  $q_i$  (если  $i$ -ая компонента обобщённой силы равна нулю) то  $i$ -ая компонента импульса сохраняется (является интегралом движения).

Смотрим на уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

видим, что доказывать нечего.

**Предложение 2** Если лагранжиан не зависит явно от времени ( $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ), то энергия сохраняется (является интегралом движения)

Проверить очень просто. Так как

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

А на решениях уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{q}} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$$

то на экстремальных

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

И если лагранжиан не зависит явно от времени, то энергия сохраняется.

В лагранжианы построенные по простым механическим системам время как правило не входит, кинетическая энергия зависит только от скоростей, потенциальная только от координат. Легко проверить, что в таком случае наше определение энергии даёт сумму кинетической и потенциальной энергий, или полную энергию системы. В то же время, указанная выше конструкция позволяет определить понятие энергии и для лагранжианов, не имеющих отношения к механике, например, возникающих в дифференциальной геометрии, или даже просто абстрактных интегральных функционалов на пространствах непрерывно-интегрируемых функций.

Наличие в задаче интегралов движения существенно упрощает исследование, понижая порядок уравнений с которыми приходится иметь дело. Посмотрим как это работает на примере задачи о минимальной поверхности вращения.

## 2 Минимальные поверхности вращения

**Формулировка:** Найти в плоскости  $O_{xy}$  кривую соединяющую заданные точки  $P$  и  $Q$  такую, чтобы боковая поверхность тела образуемого при вращении вокруг  $O_x$  была бы минимальной.

Картинка

Как записать "действие", то есть площадь боковой поверхности? Известно как:

$$S[y(x)] = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_a^b q \sqrt{1 + \dot{q}^2} dt = S[q(t)]$$

(просто поменяли обозначения чтобы было похоже на предыдущие наши формулы) Что будет по Эйлера-Лагранжу?

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \sqrt{1 + \dot{q}^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{q\dot{q}}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{(\dot{q}\dot{q} + q\ddot{q})\sqrt{1 + \dot{q}^2} - q\dot{q} \frac{\dot{q}\ddot{q}}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}}}{1 + \dot{q}^2}$$

и уравнение получается

$$(\dot{q}^2 + q\ddot{q})(1 + \dot{q}^2) - q\dot{q}^2\ddot{q} = (1 + \dot{q}^2)^2$$

довольно страшное, и как решать не очень непонятно. (хотя конечно и решить можно, если помнить стандартный трюк из матанализа, что если где-то в формуле имеется  $1 + \varphi^2$ , или ещё лучше  $\sqrt{1 + \varphi^2}$ , то стоит пробовать замену  $\varphi = \operatorname{sh} t$ )

Вместо этого попытаемся воспользоваться тем, что лагранжиан не зависит от времени, а значит, энергия должна сохраняться. Что тут будет энергией?

$$E = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \frac{q\dot{q}^2}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}} - q\sqrt{1 + \dot{q}^2} = -\frac{q}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}} = \text{const}$$

Это условие уже попроще, гиперболические функции ещё виднее. Решаем:

$$\dot{q}^2 = Cq^2 - 1 \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{ch}(\sqrt{C}t - C_0)$$

Получили цепную линию. То есть общий вид экстремали

$$\hat{q}(t) = \frac{\operatorname{ch}(At + B)}{A}$$

а параметры  $A, B$  определяются положением краевых точек  $P$  и  $Q$ .

**Замечание:** Рассмотренная задача, несмотря на свою чисто геометрическую формулировку и происхождение имеет очень простую физическую интерпретацию и множество важных обобщений и приложений например, в теоретической физике. Физическая реализация минимальной поверхности устроена очень просто, это форма которую принимает мыльная плёнка натянутая на жёстко фиксированный каркас, в рассмотренной выше задаче каркас состоял из двух параллельных соосных окружностей. Мыльная плёнка имея сильное поверхностное натяжение пытается "стянуться" и занять как можно меньшую площадь. Когда ей мешает давление попавшего внутрь неё воздуха получается стабильный мыльный пузырь, а когда её края зафиксированы на какой-то поверхности или кривой, то получается минимальная поверхность с заданной границей. Вопрос о существовании и построении минимальной поверхности для заданной граничной кривой называется проблемой Плато. Решение, довольно неожиданно для казалось бы трёхмерной задачи получается комплексно-аналитическими методами.

**Замечание:** Можно заметить, что не через любые две точки в верхней полуплоскости можно провести цепную линию указанного выше вида. Это отвечает случаям когда экстремаль не является гладкой кривой. А ещё через некоторые конфигурации пар точек проходит не одна цепная линия а две. Можно проверить, что одна из них, нижняя, для функционала площади экстремумом не будет, это будет аналог точки перегиба.

## 3 Геодезические

### 3.1 Длины на поверхностях и многообразиях

Рассмотрим (под)многообразие  $M \subset \mathbb{R}^3$  и какие-нибудь локальные координаты  $(u, v)$  на нём. Всякая кривая на  $M$  является кривой и в  $\mathbb{R}^3$  а значит, определена её длина в  $\mathbb{R}^3$ . Теперь можно попробовать определить "длины"

векторов и кривых на  $M$  в терминах координат  $(u, v)$  условием их равенства уже известным длинам в  $\mathbb{R}^3$ . Как выглядит элемент длины в  $\mathbb{R}^3$  мы хорошо знаем,  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ . То есть на самом деле у нас имеется евклидово скалярное произведение в  $\mathbb{R}^3$ , с помощью которого определяется квадрат длины всякого вектора, а нас интересует ограничение данного скалярного произведения, или квадратичной формы на  $M$  в локальных координатах  $M$ . Рассмотрим как это устроено в ряде простых случаев.

- $M = \{y - z = 0\}$  - плоскость в  $\mathbb{R}^3$ . Самые простые координаты можно взять например так:  $(u, v) = (x, y)$ . Берём кривую  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  в  $M$ . Какова длина её вектора скорости в объемлющем пространстве? В  $\mathbb{R}^3$  кривая имеет вид  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (u(t), v(t), v(t))$  Получаем для вектора скорости:

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) = \dot{u}^2(t) + 2\dot{v}^2(t)$$

Получается, в координатах  $(u, v)$  квадрат элемента длины имеет вид

$$dl^2 = du^2 + 2dv^2$$

- $M = \{z = f(x, y)\}$  - поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , график какой-то (гладкой) функции. Опять берём те же координаты  $(u, v) = (x, y)$ , кривую  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ , получаем

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) = \dot{u}^2(t) + \dot{v}^2(t) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \dot{u}(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{v}(t) \right)^2$$

$$dl^2 = \left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right) du^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} dudv + \left( 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dv^2$$

- $M = \{g(x, y, z) = 0\}$  этот случай конечно же формально через теорему о неявной функции сводится к предыдущему, но нам полезнее будет рассмотреть его более прямым образом. Итак, пусть  $(u, v)$  координаты на  $M$  и тогда  $M$  можно задать параметрически:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Получаем

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)$$

и соответственно

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = (\dot{u}(t), \dot{v}(t)) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}$$

или

$$|\dot{\gamma}(t)|^2 = (\dot{u}(t), \dot{v}(t)) \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix}$$

где через  $\vec{r}$  обозначен вектор

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{pmatrix}$$

Таким образом, для квадрата элемента длины получаем

$$dl^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du^2 + 2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dudv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv^2$$

- Самый общий случай –  $n$ -мерное (под)многообразие  $M$  в  $\mathbb{R}^m$ . В  $\mathbb{R}^m$  координаты  $x^1, \dots, x^m$ , на  $M$  координаты  $q^1, \dots, q^n$ . Совершенно аналогично предыдущему случаю получаем

$$dl^2 = \sum g_{ij}(\mathbf{q}) dq^i dq^j$$

где  $g_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j}$ . Матрица  $G = \{g_{ij}\}$  называется метрикой (вообще-то метрическим тензором) на многообразии  $M$ . По нашему построению матрица  $G$  симметрична, непрерывно зависит от  $\mathbf{q}$ , а соответствующая ей квадратичная форма положительно определена. Такие метрики называются римановыми. Всякая матрица  $G$  (точнее 2-ковариантное тензорное поле  $g_{ij}$ ) с указанными свойствами задаёт метрику, то есть определяет какую-то "длину" со всеми обычными свойствами длины на многообразии  $M$ .

**Пример** Рассмотрим сферические координаты  $(r, \varphi, \theta)$  в  $\mathbb{R}^3$ . Элемент длины:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

За многообразие  $M$  выберем сферу  $r = R_0$ . Координаты на ней (в некоторой области) возьмём естественно  $(\varphi, \theta)$ . Тогда в них  $dl^2 = R_0^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)$  и метрика  $g_{ij}$  имеет вид  $G = \text{diag}(R_0^2 \sin^2 \theta, R_0^2)$ .

### 3.2 Кратчайшие

Раз мы научились определять длины касательных векторов к многообразию  $M$ , а следовательно и длины кривых на нём, то возникает вопрос о существовании и описании кривых наименьшей длины на многообразии, соединяющих две заданные точки. Такие кривые называются геодезическими. (Это одно из возможных эквивалентных определений, подробнее эти объекты будут рассмотрены в курсе дифференциальной геометрии) Как же устроены геодезические на многообразии  $M$  с римановой метрикой  $g_{ij}$ ? Вроде бы понятно что надо делать. Квадрат элемента длины как мы уже видели имеет вид  $dl^2 = g_{ij}(\mathbf{q}) dq^i dq^j$  соответственно функционалом, сопоставляющим кривой  $\mathbf{q}(t)$  её длину будет

$$S^*[\mathbf{q}(t)] = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}^i \dot{q}^j} dt$$

Если попробовать выписать уравнения Эйлера-Лагранжа то из

$$\frac{\partial L^*}{\partial q^k} = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j}{\sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^k} = \frac{g_{kj} \dot{q}^j}{\sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}}$$

получаем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{g_{kj} \dot{q}^j}{\sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}} \right) = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j}{\sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}}$$

Если раскрыть левую часть получится что-то очень длинное и не очень понятное. Вместо этого попробуем другой подход. Рассмотрим такой функционал:

$$S^\dagger[\mathbf{q}(t)] = \int_a^b \frac{g_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}^i \dot{q}^j}{2} dt$$

"механический" смысл его совершенно прозрачен – это кинетическая энергия свободной частицы, живущей на поверхности с метрикой  $g_{ij}$ . То есть, его экстремали это "прямые" в этой метрике, ведь если частица свободная, сил никаких не действует то она движется равномерно и прямолинейно. Посмотрим на уравнения этих экстремалей.

$$\frac{\partial L^\dagger}{\partial q^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j$$

$$\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} = g_{ik} \dot{q}^i$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \dot{q}^j \dot{q}^i + g_{ik} \ddot{q}^i$$

Хотелось бы посимметричнее. Замечаем

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \dot{q}^j \dot{q}^i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \dot{q}^j \dot{q}^i + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \dot{q}^j \dot{q}^i \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \dot{q}^j \dot{q}^i \right)$$

Получаем

$$g_{ik} \ddot{q}^i + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \dot{q}^j \dot{q}^i \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j = g_{ik} \ddot{q}^i + \Gamma_{k,ij} \dot{q}^i \dot{q}^j = 0$$

где

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} \right) \text{ символ Кристоффеля}$$

Если бы мы уже знали дифференциальную геометрию, то немедленно увидели бы, что это известное уравнение геодезических, в другом стандартном определении, через параллельный перенос, а не через минимум длины. Давайте проверим, что эти кривые будут и геодезическими в смысле нашего определения, то есть докажем следующее утверждение.

**Теорема 1** Если кривая  $\hat{\mathbf{q}}(t)$  является экстремалью функционала  $S^\dagger[\mathbf{q}(t)]$ , то она будет экстремалью и для функционала  $S^*[\mathbf{q}(t)]$

Видим, что лагранжианы связаны следующим образом  $L^* = \sqrt{2L^\dagger}$ . Как могут быть связаны их экстремали? Посмотрим как устроен более общий случай  $L^* = f(L^\dagger)$ . Обозначим  $k$ -ую компоненту левой части уравнения Эйлера-Лагранжа через  $L_k^\dagger$ :

$$L_k^\dagger = \frac{d}{dt} \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L^\dagger}{\partial q^k}$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_k^* &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f(L^\dagger)}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial f(L^\dagger)}{\partial q^k} = \frac{d}{dt} \left( f'(L^\dagger) \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} \right) - f'(L^\dagger) \frac{\partial L^\dagger}{\partial q^k} = \\ &= f'(L^\dagger) L_k^\dagger + \left( \frac{d}{dt} f'(L^\dagger) \right) \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} = f'(L^\dagger) L_k^\dagger + f''(L^\dagger) \frac{dL^\dagger}{dt} \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} \end{aligned}$$

Смотрим что такое  $\frac{dL^\dagger}{dt}$ :

$$\frac{dL^\dagger}{dt} = \frac{\partial L^\dagger}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial L^\dagger}{\partial t} = \frac{\partial L^\dagger}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^i} \right) \dot{q}^i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) - L_i^\dagger \dot{q}^i$$

Замечаем, что наш  $L^\dagger$ , квадратичен по скоростям, и следовательно

$$\frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = 2L^\dagger$$

Получается

$$\frac{dL^\dagger}{dt} = \frac{d}{dt} (2L^\dagger) - L_i^\dagger \dot{q}^i \Rightarrow \frac{dL^\dagger}{dt} = L_i^\dagger \dot{q}^i \Rightarrow L_k^* = f'(L^\dagger) L_k^\dagger + f''(L^\dagger) \frac{\partial L^\dagger}{\partial \dot{q}^k} L_i^\dagger \dot{q}^i$$

Как видим, если для всех  $i$  выполняется  $L_i^\dagger|_{\hat{\mathbf{q}}} = 0$  то  $L_k^*|_{\hat{\mathbf{q}}} = 0$  для всех  $k$ . То есть экстремали  $S^\dagger$  будут экстремальями и для  $S^*$ . Итак геодезические, определяемые как кратчайшие, совпадают с траекториями движения свободной частицы в соответствующей метрике.

**Замечание:** Чем отличаются экстремали этих двух задач? Тем, что значение функционала  $S^*$  зависит только от кривой, способ её пробегания на результат не влияет (если  $\hat{\mathbf{q}}(t)$  экстремаль - кратчайшая - то  $\hat{\mathbf{q}}(f(t))$  тоже будет экстремалью), экстремали же функционала  $S^\dagger$  дают не только траекторию движения частицы, но и динамику, то есть они привязаны к "собственному времени" частицы. Что такое собственное время в терминах  $S^*$ ? Это такая параметризация кривой, при которой модуль вектора скорости постоянен, ("свободная" частица движется "равномерно") или, что то же самое, параметризация длиной кривой или её натуральным параметром.

## 4 Задачи, которые надо уметь решать после этой лекции:

**Задача:** Найти метрику, лагранжиан, первые интегралы и выписать уравнения геодезических на поверхности вращения  $f(r, z) = 0$ , где  $(r, \varphi, z)$  цилиндрические координаты в  $\mathbb{R}^3$

**Задача:** Показать, что на заданной выше поверхности вращения для фиксированной геодезической пересекает все параллели  $r \cos \psi = \text{const}$  где  $\psi$  угол между геодезической и параллелью.

**Задача:** Показать, что на поверхности вращения параллель будет являться геодезической если и только если касательные к меридианам в её точках параллельны оси вращения.

**Задача:** Показать, что пересечение однополостного гиперboloида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  с плоскостью  $z = \text{const} \neq 0$  не является геодезической на этом гиперboloиде