Динамические системы 2015/2016, 6

В.А. Побережный

1 Принцип наименьшего действия

Зачем нам вообще понадобилась вся эта теория с поисками минимумов в банаховых пространствах? Интерес наш вполне практический и объясняется принципом наименьшего действия.

1.1 Формулировка

Принцип Гамильтона: *Всякая (механическая) система (с обобщёнными координатами $q_1, \ldots, q_n$) характеризуется некоторой функцией*

$$L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$$

причём динамика системы определяется данной функцией следующим образом. Если в моменты времени t_0 и t_1 система занимала положения $\mathbf{q}^{(0)}$ и $\mathbf{q}^{(1)}$ соответственно, то реальная траектория движения системы $\hat{\mathbf{q}}(t)$ доставляет наименьшее возможное значение функционала

$$S\big[\mathbf{q}(t)\big] = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt$$

среди всех возможных траекторий $\mathbf{q}(t)$ таких что $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^{(0)}$ и $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}^{(1)}$. Функция L называется лагранжианом, а функционал S действием.

Конечно же сразу возникает множество вопросов. Какого класса траектории $\mathbf{q}(t)$ рассматриваются? Насколько корректно и однозначно определена функция L по системе? Для каких вообще систем этот принцип справедлив? Как находить функцию L для заданной системы? Откуда он берётся?

Что по этим пунктам можно сказать. Самый главный и интересный конечно же последний вопрос. Строго говоря, принцип наименьшего действия не берётся ниоткуда, то есть он не выводится, а "выдаётся" как разумный способ экстраполяции нашего опыта наблюдений за окружающим миром. То есть принцип Гамильтона является "законом природы" . При таком довольно неясном фундаменте принцип наименьшего действия тем не менее показывает на практике удивительную универсальность. Помимо классической механики он широко и успешно применяется в оптике, электродинамике, релятивистской механике, теории струн.

Далее, в наших приложениях, для (консервативных) систем классической механики функцией L или лагранжианом системы будет являться разность кинетической и потенциальной энергий системы. То есть объектом минимизации является среднее разности кинетической и потенциальной энергий. Тут сразу можно уже заметить некоторое преимущество лагранжева формализма перед Ньютоновым. Энергии как кинетическая, так и потенциальная являются величинами **скалярными** их намного проще преобразовывать при заменах координат, чем **векторные** ускорения и силы входящие в уравнения Ньютона. Кроме того, нет никаких требований к инерциальности координат в которых мы работаем. Есть конечно и минусы, системы с непотенциальными силами типа трения из рассмотрения выпадают. То что лагранжиан зависит только от координат, скоростей и времени и не зависит от старших производных отвечает той же идее что и у Ньютона – для однозначного предсказания всего будущего поведения системы достаточно знать её координаты и скорости в начальный момент времени.

Ну и последнее замечание интегральные функционалы, зависящие от координат и их первых производных не являются экзотикой имеющей отношение только к механическим системам или вообще задачам исключительно физического происхождения. Весьма много чисто геометрических задач о нахождении кратчайших кривых или поверхностей минимальной площади описываются лагранжианами именно такого вида, мы ими займёмся позже.

1.2 Предыстория и наводящие соображения

- Уже в древней греции был известен закон отражения света – угол падения равен углу отражения. Пытаясь объяснить этот экспериментальный факт Герон предложил следующую эквивалентную формулировку: из всех возможных путей луч света выбирает кратчайший. На чертеже с помощью элементарной симметрии (отражения) легко увидеть что равенство углов действительно отвечает кратчайшему пути.

  Вставить картинку

- Следующий шаг, тоже связанный с геометрической оптикой, это закон Снеллиуса. На границе двух прозрачных сред угол падения света на поверхность связан с углом преломления как

  $$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

  где $\alpha_{1,2}$ соответствующие углы, $n_{1,2}$ показатели преломления сред, а $v_{1,2}$ скорости света в данных средах.

  Картинку вставить

  Позднее Ферма было замечено, что и это наблюдение может быть сформулировано в терминах минимизации - из всех путей свет двигается по тому, который проходится за наименьшее время. Это естественное обобщение предыдущего случая в котором минимум длины достигался очевидно одновременно с минимумом времени.

  Замечание: Конечно же и Ферма, и Снеллиус имели чисто умозрительные представления о скорости света в различных средах, измерить их никаких возможностей в то время не было. То есть формально закон преломления говорит лишь о том, что отношение синусов равно какой-то константе, но смысл этой константы действительно был понят и декларирован явно уже в те времена. Кстати, упомянутый выше закон отражения был получен примерно за тысячу лет до изобретения настоящих зеркал.

Вот примерно на таком фундаменте в 18 веке начались попытки распространить идеи минимальности с использованием оптико-механических аналогий на различные модели классической механики. Деятельность эта заняла значительное время, потребовала многих усилий, и уточнений. Над проблемой работали Лейбниц, Мопертюи, Эйлер, Лагранж и относительно окончательная формулировка была получена Гамильтоном.

- Ещё один пример. По Ньютону, если на материальную точку не действуют никакие силы, то двигаться она будет равномерно и прямолинейно. Для удобства рассмотрим одномерную задачу, общий случай ничем не отличается. Итак, точка вышедшая в момент времени ноль из начала координат со скоростью v_0 будет двигаться по закону $\widehat{x}(t) = v_0 t$ и попадёт в момент времени 1 в точку v_0 на оси O_x. Утверждение – из всех возможных траекторий $x(t)$ таких что $x(0) = 0$ и $x(1) = v_0$ реальная (указанная выше) даёт минимум функционала

$$S[x(t)] = \int_0^1 \dot{x}^2(t)dt$$

то есть, для всех $x(t)$ с указанными граничными условиями выполняется $S[x(t)] \geqslant S[\widehat{x}(t)] = v_0^2$. Ну действительно, так как

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau)d\tau$$

получаем

$$\int_0^1 \dot{x}(t)dt = v_0$$

и неравенство которое надо доказать превращается в

$$\int_0^1 \dot{x}^2(t)dt \geqslant v_0^2 = \left(\int_0^1 \dot{x}(t)dt\right)^2$$

или в более привычной форме –

$$\sqrt{\int_0^1 \dot{x}^2(t)dt} \geqslant \int_0^1 \dot{x}(t)dt$$

известное неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим или Коши-Буняковского, или Гёльдера. То есть реальная траектория движения свободной частицы даётся минимальной экстремалью функционала S.

1.3 Уравнения Эйлера-Лагранжа

Попробуем теперь практически применить наши методы анализа в банаховых пространствах к поиску экстремалей функционала действия механической системы. И на первом же, практически на нулевом шаге мы встречаем критическое препятствие – множество функций $\mathbf{q}(t)$ гладкости C^k с граничными условиями $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^{(0)}$ и $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}^{(1)}$ не образуют векторного, и следовательно банахова пространства! Ни их сумма, ни произведение на числовой множитель не являются допустимыми траекториями системы так как не подходят под граничные условия. Проблема конечно, но не очень страшная. Дело в том, что на мы на самом деле в данном случае ищем *условный экстремум.* Вспомнив, или элементарно проверив, что $f_1\big(\mathbf{q}(t)\big) = \mathbf{q}(t_0) - \mathbf{q}^{(0)}$ и $f_2\big(\mathbf{q}(t)\big) = \mathbf{q}(t_1) - \mathbf{q}^{(1)}$ являются хорошими, непрерывными и гладкими функционалами на $C^k[t_0, t_1]$. Мы можем заметить, что в принципе наименьшего действия говорится о поиске условного экстремума ограничения функционала S на (под)многообразие M в банаховом пространстве $C^k[t_0, t_1]$

$$M = \Big\{\mathbf{q}(t)\Big| f_1\big(\mathbf{q}(t)\big) = 0,\ f_2\big(\mathbf{q}(t)\big) = 0\Big\} \subset C^k[t_0, t_1]$$

То есть на самом деле нас интересуют экстремали функционала $S\big|_M$. (Под)многообразие M совершенно аналогично случаю $\mathbb{R}^n$ задаётся набором гладких функций (функционалов) и техника поиска условного экстремума тоже переносится из эвклидова пространства практически без изменений. Как мы помним, так она давалась методом множителей Лагранжа. Метод успешно адаптируется и на бесконечномерный анализ, мы рассмотрим его позже, но в интересующей нас задаче многообразие M устроено настолько просто, что экстремали можно элементарно найти в лоб, не изобретая общую теорию.

В самом деле как устроено касательное пространство $T_\varphi M$ к кривой (функции) $\varphi \in M$? Совершенно аналогично конечномерному эвклидову случаю касательное пространство к $\{f_1 = 0, f_2 = 0\}$ в точке φ состоит векторов скоростей кривых лежащих в M, то есть из всех векторов $h \in C^k[t_0, t_1]$ для которых

$$\big(\delta f_1\big)_\varphi(h) = \big(\delta f_2\big)_\varphi(h) = 0$$

В нашем случае очевидно $\big(\delta f_1\big)_\varphi(h) = h(t_0)$, а $\big(\delta f_2\big)_\varphi(h) = h(t_1)$. То есть касательное пространство к любой точке многообразия M состоит из функций (кривых) $h(t)$ таких что $h(t_0) = h(t_1) = 0$ и нам надо найти такое $\varphi \in M$ чтобы выполнялось $\delta S_\varphi(h) = 0$ для всех $h \in T_\varphi M \subset T_\varphi C^k[t_0, t_1]$. С новыми уточнениями о поведении h можно довести вычисления примера с которого мы начали лекцию до более простого и наглядного вида. Итак:

$$\delta S_\varphi(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L(q, \dot q, t)}{\partial q}\bigg|_{q=\varphi} h(t) + \frac{\partial L(q, \dot q, t)}{\partial \dot q}\bigg|_{q=\varphi} \dot h(t)\right) dt =$$

второе слагаемое берём по частям

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L(q, \dot q, t)}{\partial q}\bigg|_{q=\varphi} h(t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q, \dot q, t)}{\partial \dot q}\bigg|_{q=\varphi}\right) h(t)\right) dt + \left(\frac{\partial L(q, \dot q, t)}{\partial \dot q}\bigg|_{q=\varphi} h(t)\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1} =$$

внеинтегральное слагаемое равно нулю из граничных условий на h

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L(q, \dot q, t)}{\partial q}\bigg|_{q=\varphi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q, \dot q, t)}{\partial \dot q}\bigg|_{q=\varphi}\right)\right] h(t) dt$$

Это уже очень хороший вид для функционала от h.

Предложение 1 *Линейный функционал*

$$A(h) = \int_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)dt = 0$$

где $a(t) \in C^0[t_0, t_1]$ *равен нулю тождественно для всех* $h \in C^k[t_0, t_1]$ *таких что* $h(t_0) = h(t_1) = 0$ *тогда и только тогда когда* $a(t) \equiv 0$

Доказательство - очевидно (упражнение).

Следствие 1 *Если* $\mathbf{q}(t) = \varphi(t)$ *экстремаль функционала действия*

$$S\big[\mathbf{q}(t)\big] = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt$$

в классе $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^{(0)}$, $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}^{(1)}$ *(то есть в ограничении на многообразие* M*), то*

$$\left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right)\Bigg|_{\mathbf{q}=\varphi} = 0$$

Данное соотношение называется уравнениями Эйлера-Лагранжа. Оно будет нашим основным инструментом в решении задач лагранжевой механики.

Что всё это значит и как это работает?

1.4 Элементарные примеры

Свободная частица Траектория частицы в $\mathbb{R}^3$ это параметризованная кривая $\mathbf{q}(t)$. Кинетическая энергия $T = m\dot{\mathbf{q}}^2/2$, потенциальной энергии нет $U = 0$. Лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T - U = m\dot{\mathbf{q}}^2/2$. Вычисляем:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = m\dot{\mathbf{q}}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$-\frac{d}{dt}\big(m\dot{\mathbf{q}}\big) = -m\ddot{\mathbf{q}} = 0$$

Решение - линейные функции $\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{v}t$. Постоянные (вектора) $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{v}$ определяются из граничных условий

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^{(0)} + \big(\mathbf{q}^{(1)} - \mathbf{q}^{(0)}\big)\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

как и положено, частица двигается равномерно и прямолинейно.

Частица в потенциале Траектория частицы $\mathbf{q}(t)$. Кинетическая энергия та же самая $T = m\dot{\mathbf{q}}^2/2$, потенциальная энергии $U = U(\mathbf{q})$. Лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T - U = m\dot{\mathbf{q}}^2/2 - U(\mathbf{q})$. Вычисляем:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = -\nabla U, \;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = m\dot{\mathbf{q}}, \;\; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = m\ddot{\mathbf{q}}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$-\nabla U - m\ddot{\mathbf{q}} = 0 \Longleftrightarrow m\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla U$$

Получили уже известный второй закон Ньютона для потенциальной силы. Дифференциальное уравнение второго порядка, решение определяется граничными условиями.

Невзаимодействующие частицы Две частицы в $\mathbf{R}^3$ с траекториями $\mathbf{q}_1(t)$ и $\mathbf{q}_2(t)$ соответственно. "Общей координатой"будет столбец $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{q}_1(t), \mathbf{q}_2(t))$ Кинетическая энергия $T(\dot{\mathbf{q}}) = m_1\dot{\mathbf{q}}_1^2/2 + m_2\dot{\mathbf{q}}_2^2/2$, потенциальной энергии нет $U = 0$. Лагранжиан равен $L = T = m_1\dot{\mathbf{q}}_1^2/2 + m_2\dot{\mathbf{q}}_2^2/2$. Считаем:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} m_1\dot{\mathbf{q}}_1 \\ m_2\dot{\mathbf{q}}_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} m_1\ddot{\mathbf{q}}_1 \\ m_2\ddot{\mathbf{q}}_2 \end{pmatrix}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{pmatrix} m_1\ddot{\mathbf{q}}_1 \\ m_2\ddot{\mathbf{q}}_2 \end{pmatrix} = 0$$

и частицы опять двигаются равномерно прямолинейно и независимо как и должно быть.

2 Разбор задач

Хорошо, проверили на тривиальных известных примерах, всё совпадает с известными из других подходов результатами, только считать теперь дольше и сложнее, в чём же выгода? Попробуем разобрать какую-нибудь менее тривиальную задачу. Сначала вспомогательное вычисление для математического маятника

2.1 Математический маятник

Картинка

Обобщённой координатой назначаем θ угол отклонения от вертикали. Траектория системы соответственно имеет вид $\theta(t)$. Линейная скорость частицы равна $l\dot{\theta}$, кинетическая энергия $T = m(l\dot{\theta})^2/2$, потенциальная энергия (с точностью до константы) $U = mgh = -mgl\cos\theta$. Лагранжиан:

$$L = m\frac{(l\dot{\theta})^2}{2} + mgl\cos\theta$$

Считаем:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \Longleftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

известное уравнение нелинейного (математического) маятника.

2.2 Неинерционный маятник или маятник без гравитации

Рассмотрим плоский двузвенный маятник в отсутствие гравитации. Можно ли принудительно вращая с постоянной скоростью первое звено маятника добиться того, чтобы второе звено вело себя как обычный математический маятник в поле тяжести земли? Можно ли вращая с постоянной скоростью часы-ходики добиться чтобы они показывали правильное время в невесомости, то есть создать гравитацию при помощи вращения? Известный приём из научной фантастики.

Картинку.

Введём обобщённую координату θ угол отклонения второго звена маятника от оси первого. Тогда координаты частицы в плоскости в момент времени t будут

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t + l\cos(\omega t + \theta) \\ y = R\sin\omega t + l\sin(\omega t + \theta) \end{cases}$$

скорости

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\omega\sin\omega t - l\omega\sin(\omega t + \theta) \\ \dot{y} = R\omega\cos\omega t + l\omega\cos(\omega t + \theta) \end{cases}$$

Кинетическая энергия

$$T = m\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} = \frac{m}{2}\Big(R^2\omega^2 + l^2(\omega + \dot{\theta})^2 + 2R\omega l(\omega + \dot{\theta})\cos\theta\Big)$$

Гравитации и потенциала нет, поэтому $L = T$. Далее,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mR\omega l(\omega + \dot{\theta})\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m}{2}\Big(2R\omega l\cos\theta + 2l^2(\omega + \dot{\theta})\Big)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mR\omega l\sin\theta \cdot \dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta}$$

и уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$ml^2\ddot{\theta} + mR\omega^2 l\sin\theta = 0 \Longleftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{R\omega^2}{l}\sin\theta = 0$$

показывает при $R\omega^2 = g$ что система действительно симулирует математический маятник в поле тяжести земли.

3 Задачи, которые надо уметь решать после этой лекции:

Задача: *Написать аналог уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала вида*

$$S(\mathbf{q}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t)dt$$

Задача: *Выписать по лагранжианам уравнения движения*

- $L(x, \dot{x}, t) = 1/2 e^{\alpha t}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$
- $L(x, \dot{x}) = e^{-x^2-\dot{x}^2} + 2\dot{x}e^{\left(-x^2 \int_0^{\dot{x}} e^{-y^2} dy\right)}$

Задача: *Математический маятник двигается в поле тяжести земли в вертикальной плоскости. Плоскость вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной прямой проходящей через точку подвеса маятника. Выписать уравнения движения, определить угловую скорость плоскости при которой нижнее положение равновесия маятника становится неустойчивым.*

Задача: *Выписать функционал длины на плоскости и найти его экстремали для кривых, соединяющих заданные точки.*