Динамические системы 2015/2016, 8

В.А. Побережный

1 Циклические координаты

Как нами уже было проверено, наличие в вариационной задаче циклических координат, то есть координат, не входящих явно в лагранжиан, гарантирует существование в системе законов сохранения. Из явного вида уравнений Эйлера-Лагранжа
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0$$
немедленно следует, что независимость от какой-либо *обобщённой* координаты q_i даёт сохранение соответствующего *обобщённого* импульса $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = const$, независимость же от времени обеспечивает сохранение следующей конструкции собираемой из лагранжиана, которую мы условились называть энергией: $\dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L = const$. Возникает вопрос, в рассматриваемых до сих пор задачах как правило, мы начинали с механической системы или геометрической конструкции без какой-либо выделенной системы координат и первый шаг в работе в лагранжевом формализме состоял в введении обобщённых координат. Собственно, независимость от координат заявлялась как важное преимущество лагранжева подхода и один из поводов к его введению.

Возникает такая проблема – нам хотелось бы получить побольше законов сохранения чтобы облегчить исследование задачи, но известный нам способ генерации законов сохранения явным образом зависит от конкретного выбора координат, а лагранжев подход совершенно не предлагает рецептов какого-либо выделенного способа выбирания координат. Так как же их в таком случае следует выбирать? Или хотя бы в более слабом варианте типа теоремы существования, как понять по задаче или системе, что вводя различные обобщённые координаты мы можем получить столько-то разных циклических обобщённых координат, дающих столько-то различных законов сохранения?

Ответ на этот вопрос принято формулировать в терминах действия однопараметрических семейств диффеоморфизмов на конфигурационном пространстве системы с использованием групп и алгебр Ли, но по сути состоит по большей части из внимательного рассмотрения а что, собственно говоря, мы называем координатами.

Сначала посмотрим на простейшем примере о чём вообще идёт речь.

1.1 Свободная частица на плоскости

Итак, рассмотрим свободную частицу на плоскости в какой-нибудь инерциальной системе отсчёта. Кинетическая энергия равна $T = m\mathbf{v}^2/2$, потенциальной энергии нет. Получаем лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m\mathbf{v}^2/2$. Посмотрим теперь на законы сохранения для различных наборов обобщённых координат.

- **В декартовых координатах:** В декартовой системе O_{xy} с обобщёнными координатами $q_1 = x$, $q_2 = y$ квадрат вектора скорости $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ вычисляется как $\mathbf{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ и лагранжиан имеет вид

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)}{2}$$

  циклических координат две – q_1, q_2, плюс независимость от времени, итого три закона сохранения. Обобщённые импульсы:

$$I_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{x} = const, \qquad I_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{y} = const$$

  Энергия:

$$I_0 = \dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L = (\dot{x}, \dot{y})\cdot(m\dot{x}, m\dot{y}) - L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} = L = const$$

- **Другие декартовы координаты:** Посмотрим, что будет в координатах $O_{\widetilde{x}\widetilde{y}}$ связанных с O_{xy} сдвигом и поворотом.

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

  Длина вектора скорости имеет тот же вид что и раньше: $\mathbf{v}^2 = m(\dot{\widetilde{x}}^2 + \dot{\widetilde{y}}^2)$. Лагранжиан тоже остаётся тем же самым, и снова получаем три закона сохранения: $\widetilde{I}_1 = m\dot{\widetilde{x}}$, $\widetilde{I}_2 = m\dot{\widetilde{y}}$ и $\widetilde{I}_0 = L$. Очевидно, что мы не получили новых первых интегралов, все новые законы сохранения следуют из полученных ранее: $\widetilde{I}_0 = I_0$, $\widetilde{I}_1 = \ cos\alpha I_1 + \sin\alpha I_2$, $\widetilde{I}_2 = -\sin\alpha I_1 + \cos\alpha I_2$.

- **В полярных координатах:** В полярной системе с обобщёнными координатами $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$ квадрат длины вектора $\mathbf{v} = (\dot{r}, \dot{\varphi})$ имеет вид $\mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Получаем лагранжиан

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{m(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2)}{2}$$

  Одна циклическая координата и независимость от времени. Сохраняющийся обобщённый импульс:

$$J_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = mr^2\dot{\varphi} = const$$

  Энергия:

$$J_0 = \dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - L = L = const$$

- **Результаты:** Во-первых: в полярных координатах циклических переменных, и следовательно очевидных законов сохранения меньше, не два, а три. Во-вторых: зато сохраняющийся полярный обобщённый импульс J_1 даёт новый закон сохранения, если переписать его в декартовых координатах, то получим $J_1 = x\dot{y} - y\dot{x}$, очевидно, эта величина никак не выражается через I_0, I_1, I_2. В-третьих, энергии (как законы сохранения) во всех подходах всё-таки совпадают, это вполне согласуется с интуицией, хотелось бы, чтобы то что называют словом "энергия" было свойством и характеристикой системы а не конкретного выбора координат.

2 Группы Ли, поля и потоки

Определение 1 *Гладкое многообразие G на котором определена групповая структура называется группой Ли если групповые операции (композиция и взятие обратного элемента) являются гладкими преобразованиями многообразия.*

Примеры: $\mathbb{R}^n$ с операцией сложения; $\mathbb{C}^*$ с операцией умножения; окружность S^1 с групповой операцией, индуцированной из $\mathbb{C}^*$; невырожденные матрицы $GL(n, \mathbb{R})$ относительно умножения; матричные группы $O(n)$, $SO(n)$, $SL(n)$, верхнетреугольные матрицы относительно матричного умножения.

Определение 2 *Группа G действует на многообразии M если задано отображение $G \times M \to M$ согласованное с групповой структурой на G, то есть*

$$(g_1 g_2, x) \mapsto g_1 g_2(x) = g_1\big(g_2(x)\big) \leftarrow\!\shortmid \big(g_1, g_2(x)\big)$$

Примеры: Всякая группа Ли G действует сама на себе просто групповой операцией; $\mathbb{R}$ действует на $\mathbb{R}^n$ сдвигами вдоль какого-то выбранного направления; матричные группы $GL(n)$, $SL(n)$, $SO(n)$ действуют на $\mathbb{R}^n$ умножением слева в фиксированном базисе; S^1 со структурой из примера выше действует на $\mathbb{C}^*$ умножением.

Определение 3 *Образ гомоморфизма групп Ли $\tau : \mathbb{R} \to G$ называется однопараметрической подгруппой группы Ли G.*

Примеры: $\{(a_0 s, b_0 s) | s \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}^2$;$\{\exp(is) | s \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{C}^*$.

Из определений выше видим, что всякая однопараметрическая подгруппа $H = \{g_s \in G | s \in \mathbb{R}, g_s g_t = g_{s+t}, g_0 = e\}$ группы G гладко действующей на M задаёт поток, или однопараметрическую группу диффеоморфизмов M. Очевидно как: диффеоморфизм φ_s переводит точку x в $g_s(x)$. То есть для каждой точки $x \in M$ определяется гладкая траектория её движения $x(s) = g_s(x)$. А значит, действие всякой однопараметрической группы H определяет на многообразии M векторное поле V_H совершенно очевидным образом $V_H(x) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} g_s(x)$ - просто касательный вектор к траектории. Или, то же самое можно записать как $x(s) = x + V_H(x) \cdot s + o(s)$.

Определение 4 *Векторное поле V_H называется (инфинитезимальным) генератором действия однопараметрической группы H на многообразии M.*

Примеры: $H = \{(a_0 s, b_0 s) | s \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}^2$ действует на $\mathbb{R}^2$ сдвигами, $V_H(\mathbf{x}) = (a_0, b_0)$; $H = \{\exp(is) | s \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{C}^*$ действует на $\mathbb{C}$ умножением(поворотами на угол s) $z(s) = e^{is}z = (1+is+\cdots)z = (z+isz+\cdots)$ генератор $V_H(z) = iz$.

Зачем нужны инфинитезимальные генераторы? Оказывается для того чтобы проверить инвариантность какой-либо функции $f : M \to \mathbb{R}$ относительно действия на многообразии группы H достаточно рассмотреть её поведение при инфинитезимальных преобразованиях. А нас в дальнейшем как раз будет интересовать инвариантность лагранжианов при преобразованиях конфигурационного пространства. Кроме того, как мы увидим ниже, в универсальной формулировке закона сохранения участвуют как раз генераторы симметрий.

Предложение 1 *Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ дифференцируемая функция на многообразии M с заданным гладким действием однопараметрической группы H. Тогда, если в любой точке $x \in M$ выполняется $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f\big(x(s)\big) = 0$, то для всех $y \in M$ и всех $s_0 \in \mathbb{R}$ выполняется $\frac{d}{ds}\Big|_{s=s_0} f\big(y(s)\big) = 0$ и следовательно $f(x)$ постоянна на орбитах действия H.*

Практически очевидно. Обозначим $\widetilde{y} = y(s_0)$ тогда по групповому свойству $y(s) = \widetilde{y}(s - s_0)$ и следовательно

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=s_0} f\big(y(s)\big) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=s_0} f\big(\widetilde{y}(s - s_0)\big) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f\big(\widetilde{y}(s)\big) = 0$$

так как последнее равенство справедливо для всех $\widetilde{y} \in M$.

Таким образом, если нас интересует сохранение функции f под действием на M группы H, то это свойство достаточно проверять локально, в окрестности нуля параметра s или что то же самое в окрестности единицы группы H. Вспоминая определение касательного вектора и касательного пространства к многогобразию можно заметить, что в окрестности единицы элементы всякой однопараметрической подгруппы H имеют вид $g_s = e + \Lambda \cdot s + o(s)$ где Λ некоторый вектор из касательного пространства к единице.

Определение 5 *Алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G называется касательное пространство к G в единице группы $\mathfrak{g} = T_eG$.*

В отличие от группы Ли G которая может быть каким-то сложным многообразием алгебра Ли $\mathfrak{g}$ это просто линейное пространство $g_s(x) = (e + \Lambda \cdot s + o(s))(x) = x + \Lambda(x)s + o(s)$. Таким образом, генераторы потока или инфинитезимальные преобразования соответствуют элементам алгебры Ли.

2.1 Для лагранжевых систем

В самом общем определении лагранжевой системой мы называем набор из многообразия M (конфигурационного пространства) и функции L (лагранжиана) на касательном расслоении TM (фазовом пространстве) к нему.

Определение 6 *Группа Ли G задаёт симметрию лагранжевой системы если её действие на M сохраняет лагранжиан*

Как мы видели выше всякая однопараметрическая подгруппа $H \in G$ задаёт однопараметрическое семейство диффеоморфизмов сохраняющих лагранжиан, или гладкое векторное поле на M вдоль которого функция L постоянна. Нас будут интересовать генераторы таких симметрий. Соответственно рецепт их нахождения таков. Локально в обобщённых координатах $\mathbf{q}$ на M имеем какое-то действие H:

$$(g_s, \mathbf{q}) \mapsto \mathbf{q}(s) = {}^s\mathbf{q}$$

Просто новое обозначение чтобы не путать с зависимостью $\mathbf{q}$ от времени. Раскладываем ${}^s\mathbf{q}$ в ряд по s:

$${}^s\mathbf{q} = \mathbf{q} + \chi(\mathbf{q})s + o(s)$$

Получившееся поле $\chi(\mathbf{q})$ и будет генератором симметрии. А как мы покажем позже каждой однопараметрической симметрии лагранжевой системы отвечает некоторый закон сохранения.

В принципе уже можно догадаться как получаются законы сохранения из симметрий – однопараметрический поток диффеоморфизмов сохраняющих лагранжиан расслаивает конфигурационное пространство на орбиты вдоль которых лагранжиан постоянен. Но в таком случае, координата выбранная "вдоль" орбиты будет по своему построению циклической ведь лагранжиан от нее не зависит и значит должен существовать соответствующий этой координате закон сохранения. Геометрически и идейно это очень похоже на теорему о выпрямлении векторного поля.

3 Примеры с элементарными симметриями

Посмотрим на ряде примеров как устроены некоторые простейшие уже виденные нами ранее симметрии механических систем, какие группы Ли им соответствуют и какие у их действий генераторы.

3.1 Сдвиги пространства

Пусть система инвариантна относительно сдвигов вдоль какого-то направления в пространстве, то есть инвариантна относительно группы Ли $\mathbb{R}$. Выбрав обобщённую координату q_i вдоль этого направления получим что q_i не входит в лагранжиан явно, и задача инвариантна относительно однопараметрического семейства диффеоморфизмов

$$\begin{aligned}
{}^s q_1 &= q_1 \\
&\vdots \\
{}^s q_i &= q_i + 1 \cdot s \\
&\vdots \\
{}^s q_n &= q_n
\end{aligned}$$

Из определения инфинитезимальных генераторов ${}^s q_i = q_i + \chi_i(\mathbf{q})s + o(s)$ видим, что они имеют вид $\chi_j(\mathbf{q}) = \delta^i_j$. (Преобразование сразу линейно по s, в ряд раскладывать не надо)

3.2 Повороты пространства

Если система инвариантна относительно поворотов в какой-то плоскости, то есть, сохраняется под действием группы Ли $SO(2,\mathbb{R})$, то выбрав пару обобщённых координат, например q_i, q_j задающих декартову систему в этой плоскости получаем

$$\begin{aligned}
{}^s q_1 &= q_1 \\
&\vdots \\
{}^s q_i &= \cos s \cdot q_i + \sin s \cdot q_j = q_i + q_j \cdot s + o(s) \\
&\vdots \\
{}^s q_j &= -\sin s \cdot q_i + \cos s \cdot q_j = q_j - q_i \cdot s + o(s) \\
&\vdots \\
{}^s q_n &= q_n
\end{aligned}$$

И генераторы $\chi_k(\mathbf{q})$ имеют вид

$$\chi_k(\mathbf{q}) = \delta^i_k q_j - \delta^j_k q_i$$

3.3 Равномерное прямолинейное движение

Поток, группа, генераторы и первый интеграл равномерного прямолинейного движения будут рассмотрены на семинаре?

3.4 Сдвиги по времени

Сдвиги по времени в отношении своей структуры и соответствующей группы и алгебры Ли устроены абсолютно аналогично сдвигам по пространству, это та же самая группа Ли $\mathbb{R}$. Однако закон сохранения соответствующий этой однопараметрической группе диффеоморфизмов системы имеют гораздо более сложный вид и получаются куда более изощрёнными вычислениями которые мы проделаем позднее. Это связано с тем, что (особенно в Ньютоновой механике) время t это "отдельная" , "особая" переменная, не такая как прочие q_i. Эта неприятная несимметричность пропадёт в релятивистской механике. В преобразованиях группы Пуанкаре задающей переходы между "релятивистскими инерционными системами" время преобразовывается может быть несколько неожиданно для обычной интуиции но зато "более равноправно" с прочими координатами чем в группе Галилея и несомненно намного более естественно и "правильно" с геометрической точки зрения.

4 За что боролись

Различные лагранжевы системы как механического, так и геометрического происхождения часто имеют симметрии, то есть сохраняются под действием некоторой группы Ли. Действие группы Ли определяет действие для всякой своей однопараметрической подгруппы, а с каждым таким действием связан однопараметрический поток, или семейство диффеоморфизмов. Теперь мы можем сформулировать основной результат ради которого вводились все рассмотренные выше понятия.

Теорема 1 *Если лагранжиан* $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ *сохраняется под действием однопараметрической группы диффеморфизмов*

$$\begin{array}{rcl} t \mapsto \ {}^s t & = & t + \chi_0(t) \cdot s + o(s) \\ q_1 \mapsto \ {}^s q_1 & = & q_1 + \chi_1(\mathbf{q}) \cdot s + o(s) \\ & \vdots & \\ q_n \mapsto \ {}^s q_n & = & q_n + \chi_n(\mathbf{q}) \cdot s + o(s) \end{array}$$

То система имеет первый интеграл следующего вида

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right\} \chi_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi_i = const$$

Обсуждение и доказательство в следующей лекции.

5 Задачи, которые надо уметь решать после этой лекции:

Задача: *Описать алгебру Ли группы Ли* $SL(n)$.
Задача: *Описать алгебру Ли группы Ли* $SO(n)$.
Задача: *Показать,что всякий элемент* $\Lambda \in T_e G$ *можно продолжить до гладкого векторного поля* Λ^* *на всей* G *инвариантного относительно действия* G *на самой себе.*
Задача: *Показать, что всякая однопараметрическая подгруппа* G *является решением дифференциального уравнения* $\dot{g} = \Lambda^* g$ *для некоторого* $\Lambda \in T_e G$ *с начальным условием* $g(0) = e$.