

Лекции по Специальной Теории Относительности и классической электродинамике

Ахмедов Э.Т.

Список использованной литературы:

- *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. — М.: Физматлит, 2006.
- *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Квантовая электродинамика. — М.: Изд-во МГУ, 1983. §§1, 2, 4, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17.
- *Киселев В.В.* Классическая электродинамика: учебное пособие. — М.: Изд-во МФТИ-ИФВЭ, 2004.
- *Хрипович И.Б.* Теоретический калейдоскоп — М.-Ижевск.: Изд-во RC Dynamics, 2007. §§1.1, 1.2, 2.2, 2.3.
- *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Катехезис. Руководство по математике для начинающих изучать теоретическую физику: учебное пособие. — М., МФТИ, 2005.
- Неопубликованные записи лекций *С.В.Фомичева* и *С.С.Герштейна*.

Лекция I; Механическая аналогия для поля, принцип относительности, преобразования Лоренца, пространство–время и его свойства, Лоренцево сокращение длин, собственное время, Аберрация света.

1. Основные постулаты механики Ньютона, как известно, следуют из логически непротиворечивого описания совокупности опытных фактов:

- **Инерциальные системы отсчета (ИСО) - это такие СО , относительно которых тело, на которое не действует никакая сила, движется равномерно и прямолинейно;**
- $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}/m$ - ускорение сообщенное телу равно силе, действующей на него, деленной на его инерциальную массу;
- $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ - действие равно противодействию.

Нетрудно видеть, что эти законы не меняются при преобразованиях Галилея:

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \vec{x} + \vec{v}t \\ t' &= t,\end{aligned}$$

физический смысл которых заключается в том, что законы Ньютона не меняются при переходе от одной ИСО в другую, которая движется относительно исходной ИСО со скоростью \vec{v} . Т.е. абсолютного движения с постоянной скоростью не бывает. Движение с ускорением абсолютно. Тот факт, что уравнения Ньютоновой механики не зависят от выбора ИСО называется принципом относительности Галилея.

В механике Ньютона имеется одно существенное упрощение. Рассмотрим систему частиц, взаимодействующих по закону Кулона. Сместим одну из частиц в новое положение. Тогда, в соответствии с законами механики Ньютона, остальные частицы мгновенно почувствуют это изменение в положении смещенной частицы. Т.е. взаимодействие в механике Ньютона переносится с бесконечной скоростью.

Из эксперимента мы знаем, что электромагнитное (ЭМ) взаимодействие переносится с конечной скоростью $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с. Подавляющее большинство скоростей, с которыми мы имеем дело в повседневной жизни, пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света. Поэтому все действительно выглядит как будто взаимодействия передаются мгновенно. Но нас теперь интересуют явления, при которых скорости частиц близки к скорости света и, поэтому такое упрощение недопустимо.

2. Чтобы понять, что происходит на самом деле, рассмотрим механическую модель, которая очень близка к действительности. А именно, рассмотрим одномерную бесконечную цепочку шариков одинаковой массы m , соединенных пружинами с одинаковыми коэффициентами Гука k . Пусть для простоты все шарики насажены на один бесконечный стержень, т.е. могут колебаться только в одном направлении — вдоль цепочки (см. рис.



Рис. 1:

(1)). Эта модель является также механической идеализацией одномерной кристаллической решетки атомов.

В положении равновесия все шарики находятся на одинаковом расстоянии друг от друга. Пусть я медленно потяну рукой (адиабатически приложив постоянную силу) один из шариков, скажем налево, возмущив тем самым решетку. Установится новое равновесие, в котором очевидно все пружины налево от смещенного шарика сожмутся в той или иной степени, а все пружины справа от шарика растянутся. Если задано смещение каждого из шариков из положения равновесия, то мы тем самым имеем некоторое поле: набор значений $\phi_i(t)$ для всех i , где $\phi_i(t)$ - смещение i -го шарика из положения равновесия в момент времени t . В случае постоянной приложенной силы очевидно, что все ϕ_i не зависят от времени, и мы имеем дело со статическим полем. Оказывается, что статический электрический заряд возмущает ЭМ поле аналогичным образом. Аналогия была бы более полной (но не абсолютной), если мы рассматривали бы трехмерную, а не одномерную решетку.

Пусть теперь мой коллега потянет медленно (адиабатически) своей рукой какой-нибудь второй шарик. Мы с моим коллегой почувствуем, что между нашими двумя руками возникнет сила притяжения или отталкивания, в зависимости от того с какой стороны и в каком направлении по отношению к исходному смещению был смещен второй шарик. Полученная сила является аналогом (не полным) силы Кулона, возникающей между двумя зарядами. Опять же аналогия была бы более полной, если бы мы рассматривали трехмерную, а не одномерную решетку. Мы увидим это в следующих лекциях.

Если теперь я резко смещу положение своей руки (изменив тем самым усилие) в ту или иную сторону, то рука коллеги почувствует это изменение в положении моей руки не мгновенно, а через некоторое время, равное времени распространения волны возмущения по решетке от одной руки до другой. Эта волна является аналогом электромагнитной волны, распространяющейся от одного электрического заряда к другому. Но еще более полным аналогом она является для звуковой волны в кристалле.

Давайте попробуем отчасти обратить эти наши качественные рассуждения в формулы, чтобы не быть голословными. Нам полученные формулы окажутся полезными в дальнейшем. Уравнение движения для i -го шарика:

$$m \ddot{\phi}_i = k (\phi_{i+1} - \phi_i) - k (\phi_i - \phi_{i-1}).$$

Т.е. мы имеем бесконечную систему уравнений — по одному для каждого i .

Рассмотрим теперь непрерывный предел. А именно, будем рассматривать такие длины волн колебаний решетки, при малых амплитудах, что они будут намного больше расстояния между шариками в положении равновесия. Эффективные уравнения, описывающие эти волны не будут “чувствовать” тонкую структуру нашей решетки. В конце концов смысл непрерывного предела можно понять, уяснив, что любой реальный кристалл мы видим как однородное тело и волны в нем описываем как колебания плотности, ничего практически не зная о его кристаллической структуре. В этом пределе наша решетка будет выглядеть как однородное упругое тело. В непрерывном пределе

$$\phi_i(t) \rightarrow \phi(t, x),$$

где $\phi(t, x)$ — смещение $[x, x + dx]$ сегмента нашего упругого тела из положения равновесия в момент времени t на величину $|\phi|$. Далее

$$\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t) \rightarrow \phi(t, x + \Delta x) - \phi(t, x) \approx \phi'(t, x) \Delta x.$$

Таким образом, уравнения движения принимают вид:

$$m \ddot{\phi}(t, x) \approx k [\phi'(t, x) - \phi'(t, x - \Delta x)] \Delta x \approx k \phi''(t, x) \Delta x^2.$$

Если в пределе $\Delta x \rightarrow 0$ мы держим $m/k \Delta x^2 \equiv 1/\bar{c}^2 = const$, что соответствует тому, что мы получим упругое тело, а не пыль из не взаимодействующих частиц ($\bar{c} = 0$) или абсолютно жесткий (не упругий) стержень ($\bar{c} = \infty$), то уравнение сводится к

$$\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где \bar{c} имеет размерность скорости и, как мы увидим, имеет смысл скорости звука в нашем упругом теле. Мы так же увидим, что ЭМ волны являются решениями аналогичных уравнений — уравнений Максвелла — где вместо \bar{c} стоит c — скорость света.

Найдем решения полученных уравнений и поймем их физический смысл. Для этого представим полученные уравнения в виде:

$$\left(\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(t, x) = \left(\frac{\partial}{\bar{c} \partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\bar{c} \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi(t, x) = 0.$$

Тогда легко видеть, что самое общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\phi(t, x) = f(\bar{c}t - x) + g(\bar{c}t + x),$$

где f и g совершенно произвольные дважды дифференцируемые функции. Чтобы понять физический смысл таких решений, рассмотрим функцию $f(s)$, например, имеющую вид

колокола (гребня волны) с вершиной в какой-то точке s_0 , тогда гребень $f(\bar{c}t - x)$ как функции от x будет смещаться направо по оси x , т.к. в соответствии с уравнением положения вершины колокола $\bar{c}t_1 - x_1 = s_0 = \bar{c}t_2 - x_2$, если $t_2 > t_1$ то $x_2 > x_1$.

Таким образом, рассматриваемое решение соответствует волне, распространяющейся направо по оси x со скоростью звука \bar{c} . Аналогично $g(\bar{c}t + x)$ описывает волну, распространяющуюся налево со скоростью звука. Именно посредством обмена такими волнами и сообщаются друг с другом возмущения одномерного кристалла вроде тех, что были созданы выше “нашими руками”.

Рассмотрим “пространство-время” (ПВ) t, x . Произведем следующее преобразование этого ПВ:

$$\begin{aligned}\bar{c}t' &= \bar{c}t \cosh \alpha + x \sinh \alpha \\ x' &= \bar{c}t \sinh \alpha + x \cosh \alpha,\end{aligned}$$

где $\alpha = \text{const}$ — параметр преобразования. Как легко проверить, при таком преобразовании волновое уравнение не изменит свой вид:

$$\left(\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(t, x) = \left(\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) \phi(t', x') = 0.$$

Что, в частности, означает, что его решение преобразуется тривиальным образом $f(\bar{c}t - x) = f(\bar{c}t' - x')$, т.е. скорость волны при таком преобразовании не меняется. Заметим, что при таком преобразовании так же не изменится и следующая билинейная форма:

$$\bar{c}^2 t^2 - x^2 = \bar{c}^2 t'^2 - x'^2.$$

Рассмотренное преобразование t, x выделено только тем, что не меняет вида волнового уравнения и рассматриваемой билинейной формы.

3. Какое отношение все это имеет к специальной теории относительности (СТО)?

Мы увидим далее, что многие из уравнений в СТО аналогичны рассмотренным только что, где вместо \bar{c} стоит c — скорость света. При этом вышеупомянутая замена t, x на t', x' имеет физический смысл перехода из одной ИСО в другую.

Прежде, чем перейти к рассмотрению СТО сделаем шаг назад опять к механике Ньютона. Законы механики Ньютона, в частности, не изменяются еще и при вращениях 3-мерного пространства. С последним явлением тесно связан тот факт, что относительно вращений инвариантна билинейная форма в 3-мерном пространстве, определяющая расстояние:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

между двумя точками (x, y, z) и $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Для нас сейчас важно не то, что при произвольных преобразованиях координат сохраняется физическая величина расстояния dl^2 : скажем при переходе из ортонормированной системы координат (СК) в произвольную перекошенную СК, длина отрезка от (x, y, z) до $(x + dx, y + dy, z + dz)$ не меняет своей величины. Например, в 2-мерном случае при полярной замене координат, $x = x' \cos y'$, $y = x' \sin y'$ мы имеем:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = dx'^2 + x'^2 dy'^2.$$

Для нас сейчас важно, что при заменах координат, отвечающих вращением, билинейная форма, определяющая вид выражения для длины, не меняет свой вид. А именно, опять же в 2-мерном случае при замене координат, отвечающей повороту

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi,\end{aligned}$$

где $\varphi = \text{const}$, мы имеем (при любом φ)

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2,$$

при этом очевидно, что $dx \neq dx'$ и $dy \neq dy'$.

Что еще более важно, при вращениях, как и при преобразованиях Галилея, не меняют своего вида уравнения Ньютоновой механики. Т.е. они сохраняют свой вид в новых координатах x', y', z' . На научном языке это утверждение звучит так: уравнения механики Ньютона преобразуются ковариантно при вращениях. Или просто ковариантны.

4. В СТО постулируется (следует из логически непротиворечивого описания совокупности опытных фактов), что:

- Скорость света в вакууме является максимально возможной скоростью в природе.
- Пространство и время образуют единый 4-мерный ПВ континуум с метрикой вида:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv c^2 dt^2 - d\vec{x}^2.$$

Последняя величина физиками чаще называется интервалом и определяет расстояние между двумя точками в ПВ с координатами (t, x, y, z) и $(t+dt, x+dx, y+dy, z+dz)$. Здесь c — скорость света.

Из выше приведенного обсуждения сразу видно, что интервал сохраняет свой вид при Лоренцевском бусте:

$$\begin{aligned}ct' &= ct \cosh \alpha + x \sinh \alpha, \\x' &= ct \sinh \alpha + x \cosh \alpha, \\y' &= y, \quad z' = z,\end{aligned}\tag{2}$$

где $\alpha = \text{const}$.

Т.е. длина четырехмерного интервала не меняется при бустах, но, как мы увидим, его проекции на оси t и x могут меняться, что аналогично ситуации с вращениями трехмерной системы координат, когда меняются длины проекций вектора на оси координат.

Еще один постулат гласит, что:

- Лоренцевский буст имеет физический смысл перехода из одной ИСО в другую, которая движется относительно первой вдоль оси x со скоростью v , где

$$\begin{aligned} \cosh \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & \sinh \alpha &= \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \cosh \alpha &\equiv \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, & \sinh \alpha &\equiv \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}, \\ \cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

В следующих лекциях мы увидим, что при Лоренцевских бустах ковариантны уравнения релятивистской механики. Сразу замечу, что формулы для буста Лоренца имеют смысл только, когда $v < c$. Причем в пределе $v \ll c$, Лоренцевский буст переходит в преобразование Галилея. Последнее замечание есть отражение того факта, что релятивистская механика обобщает механику Ньютона.

Помимо этого, из этих постулатов сразу следует, что скорость света не зависит от выбора ИСО. Действительно, если частица движется со скоростью света, то ее смещение во времени dt и в пространстве $d\vec{x}$ связаны соотношением $|d\vec{x}/dt| = c$. Следовательно вдоль ее пространственно–временных смещений интервал равен нулю: $ds^2 = 0$. Но при переходе из одной ИСО в другую, интервал не меняет своего вида, а потому $ds^2 = c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2 = 0$ тоже. Следовательно в новой системе отсчета между смещением частицы во времени и пространстве выполняется такое же соотношение $|d\vec{x}'/dt'| = c$.

Чтобы избежать различного рода парадоксов, которые могут возникнуть при использовании *неинерциальных* СО, подчеркнем, что для последнего утверждения важно, что мы переходим от одной ИСО к другой ИСО, т.к. при этом не меняется билинейная форма, задающая выражение для интервала. При переходе к неинерциальным СО билинейная форма, задающая интервал, меняется существенным образом, но это уже предмет из общей теории относительности.

Следует подчеркнуть, что мы *не* постулируем тот факт, что скорость света не зависит от ИСО. Он следует из перечисленных выше постулатов. Можно было бы наоборот постулировать, что скорость света не зависит от ИСО. Тогда выражение для интервала и, следовательно, тот факт, что пространство и время образуют единый континуум можно вывести как следствие.

5. Итак, мы познакомились с понятием 4–мерного пространства–времени (ПВ). Нарисуем 3–мерную его часть, включающую время. Скажем оси ct , x и y — это максимум, что я могу нарисовать на 2–мерном листе. Точка в ПВ называется событием или мировой точкой. Линия, заметаемая точечной частицей в ПВ, называется мировой линией (world–line). Подчеркну, что последнее не совсем тоже самое, что траектория частицы, т.к. траектория замечается в пространстве, а не в ПВ: траектория является проекцией мировой линии на пространственную часть пространства–времени.

Рассмотрим какую–нибудь мировую точку, которая обозначена словом vertex (точка, вершина) на рис. 2. Нарисуем все возможные лучи света, как они бы распространялись из этой точки вперед по времени. Нарисуем так же все возможные лучи света, как они

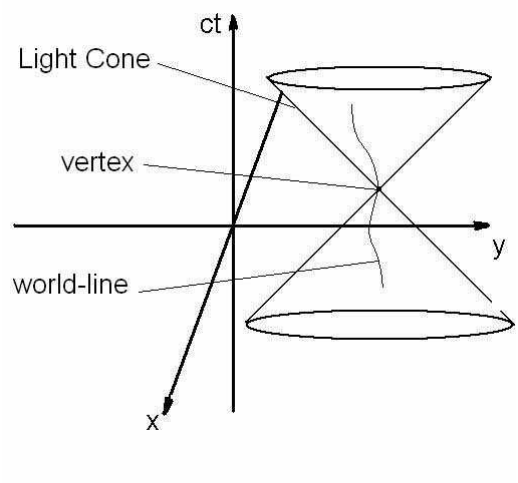


Рис. 2:

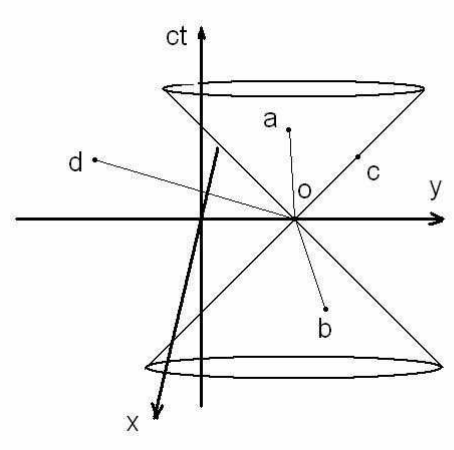


Рис. 3:

бы сходились бы в эту точку из прошлого. Полученная фигура, которая замечается всевозможными лучами света, проходящими через данную точку, называется световым конусом (light cone). Очевидно, что световой конус можно нарисовать для любой мировой точки.

Т.к. любая материальная точка может двигаться только со скоростью меньше, чем скорость света, то наклон по отношению к оси ct производной к мировой линии всегда меньше, чем 45° . Поэтому любая мировая линия, проходящая через мировую точку, находящуюся в вершине данного светового конуса (vertex), будет целиком находиться внутри этого светового конуса.

Обсудим принцип причинности. (Смотри рис. 3) Любое событие из верхней части светового конуса (например, событие в мировой точке (a)) находится в абсолютном будущем по отношению к вершине конуса (o). Т.е. в любой СО это событие произойдет позже, чем то, что произойдет в вершине конуса. Любое же событие в нижней части светового конуса (например, событие в мировой точке b) находится в абсолютном прошлом по отношению к вершине конуса. В прошлом или в будущем событие вне светового конуса (например, событие в мировой точке d) по отношению к вершине конуса зависит от СО.

Объясним откуда следуют эти утверждения. Любая мировая точка внутри светового конуса соединяется с его вершиной отрезком с интервалом $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{x}^2 > 0$, т.к. для такого интервала смещение в пространстве и во времени связаны как $|\Delta \vec{x}| < c |\Delta t|$. Более того Δt не возможно положить равным нулю выбором СО, т.к. иначе нарушилось бы условие $\Delta s^2 > 0$. Поэтому, если $\Delta t > 0$ в одной СО, то $\Delta t > 0$ и в любой другой СО. Тоже верно и в случае, если $\Delta t < 0$. Интервалы, для которых верно $\Delta s^2 > 0$ называются временеподобными.

Любая мировая точка вне светового конуса соединяется с его вершиной отрезком с $\Delta s^2 < 0$, т.к. для таких интервалов $|\Delta \vec{x}| > c |\Delta t|$. Поэтому, для таких интервалов выбором СО можно положить $\Delta t = 0$, т.е., меняя систему отсчета, можно сменить знак Δt . Следовательно, если событие было в прошлом по отношению к вершине конуса в одной СО, то его можно положить в будущее по отношению к вершине выбором другой СО. Интервалы, для которых верно $\Delta s^2 < 0$, называются пространственноподобными.

И наконец, любая точка на световом конусе соединяется с его вершиной интервалом с $\Delta s^2 = 0$, т.к. для такого интервала $|\Delta \vec{x}| = c |\Delta t|$. Такие интервалы называются нулевыми или светоподобными. Очевидно, является ли интервал светоподобным, пространственноподобным или временеподобным не зависит от СО, т.к. величина интервала не зависит от СО.

6. Из вышеуказанных постулатов имеются и другие простые следствия. Рассмотрим стандартный в СТО мысленный эксперимент. Стационарный наблюдатель видит проходящий мимо него с релятивистской постоянной скоростью поезд (конечно скорый), состоящий из одного вагона. Посередине вагона стоит пассажир. Пассажир держит фонарь в каждой руке. Передняя и задняя (по движению поезда) стенки вагона — зеркала. Когда пассажир ровняется со наблюдателем, он мгновенно включает и выключает фонари, излучая свет в направлении каждого из зеркал. И в ИСО пассажира и в ИСО наблюдателя свет движется с одинаковой скоростью — скоростью света. И в ИСО пассажира и в ИСО наблюдателя испускание обоих лучей света одновременно. В ИСО пассажира оба луча света одновременно отражаются от зеркал и одновременно возвращаются к пассажиру (см. рис. (4)).

Однако в ИСО наблюдателя луч света, испущенный по направлению движения вагона, достигнет его передней стенки позже, чем луч, испущенный против направления движения

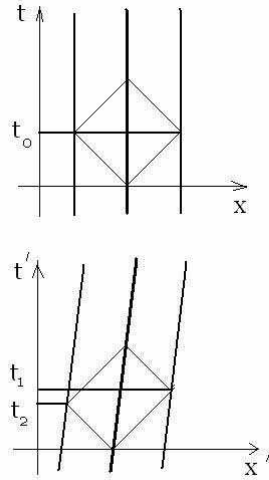


Рис. 4:

вагона, достигнет его задней стенки. Это очевидно, т.к. скорости сближения стенок и лучей света разные. Однако отраженные лучи света вернуться к пассажиру одновременно так же и в ИСО смотрящего. Действительно после отражения лучей от стенок их скорости сближения с пассажиром будут разные, но с противоположным знаком, т.к. отраженный луч от передней стенки будет теперь двигаться против направления движения поезда, тогда как отраженный от задней стенки будет, после отражения, двигаться по направлению движения поезда.

Итак моменты отражения лучей света от стенок вагона, будучи одновременными в ИСО пассажира, не являются таковыми в ИСО смотрящего. Т.е. в СТО одновременность некоторых событий относительна как мы поняли выше.

7. После того как стало понятно, что происходит с промежутками времени при переходе из одной ИСО в другую, посмотрим, что происходит с пространственными отрезками. Пусть теперь пассажир вышеуказанного поезда, движущегося со скоростью v , держит в руках стержень, параллельный движению вагона. Длина стержня, которую измеряет пассажир, равна l_0 . Какую длину стержня будет видеть смотрящий? Пусть в ИСО пассажира (K') задний (по движению поезда) конец стержня находится в начале координат $x'_1 = 0$, а передний, соответственно в $x'_2 = l_0$. Пусть теперь в ИСО смотрящего в какой-то момент времени t (по его часам) задний конец стержня находится в точке x_1 , а передний в точке x_2 . Наша задача найти $l = x_2 - x_1$. Из формулы для буста Лоренца мы знаем как x' и t' связаны с x и t :

$$\begin{aligned}
 x'_1 \equiv 0 &= (x_1 - \beta ct) \gamma \\
 x'_2 \equiv l_0 &= (x_2 - \beta ct) \gamma \\
 t'_1 &= \left(t - \frac{\beta x_1}{c} \right) \gamma \\
 t'_2 &= \left(t - \frac{\beta x_2}{c} \right) \gamma.
 \end{aligned}$$

Здесь $\beta = v/c$ — скорость поезда в единицах скорости света, а $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ — так называемый релятивистский γ -фактор. Из рассматриваемых уравнений следует, что

$$t'_2 - t'_1 = \frac{\gamma\beta}{c} (x_2 - x_1) \equiv \frac{\gamma\beta l}{c} > 0.$$

Т.е. если наблюдатель видит, что в его ИСО концы стержня находятся в точках x_1 и x_2 одновременно, то с точки зрения пассажира попадание заднего конца стержня в точку x_1 , а переднего — в точку x_2 в ИСО наблюдателя не есть одновременные события. Но при этом интервалы в двух ИСО должны быть равны:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 (t - t)^2 - (x_2 - x_1)^2 = -(x_2 - x_1)^2 \equiv -l^2 \\ ds^2 &= c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = l^2 \gamma^2 \beta^2 - l_0^2. \end{aligned}$$

Поэтому $l^2 = -l^2 \gamma^2 \beta^2 + l_0^2$ и, т.к. $\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 \equiv \cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha \equiv 1/(1 - v^2/c^2) - v^2/c^2/(1 - v^2/c^2) = 1$, то $l_0 = l\gamma$. Следовательно $l_0 \geq l$, т.к. $\gamma \geq 1$. Последнее явление в СТО называется Лоренцевым сокращением длин.

Как вы, надеюсь, видите из приведенных здесь рассуждений, буст Лоренца есть аналог поворота в пространстве — точнее гиперболический поворот¹, т.к. \cosh и \sinh — это не совсем тоже самое, что \cos и \sin . Поэтому после Лоренцевского буста могут меняться величины приращений времени и пространственные размеры (проекция интервала на оси координат), но разность их квадратов — квадрат длины интервал — остается неизменным.

8. Найдем теперь закон сложения скоростей. Пусть поезд движется с постоянной скоростью v , а пассажир кидает камень тоже с постоянной скоростью вдоль движения поезда, которая в ИСО пассажира равна u . Какова скорость движения камня в ИСО наблюдателя?

Сделаем два буста Лоренца подряд — сначала для перехода из ИСО наблюдателя в ИСО пассажира, а затем из ИСО пассажира в ИСО камня. Т.е. мы должны применить композицию двух Лоренцевских бустов с параметрами: $\cosh \alpha_1 = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, $\tanh \alpha_1 = v/c$ и $\cosh \alpha_2 = 1/\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$, $\tanh \alpha_2 = u/c$:

$$\begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha_1 & \sinh \alpha_1 \\ \sinh \alpha_1 & \cosh \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ct_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha_2 & \sinh \alpha_2 \\ \sinh \alpha_2 & \cosh \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

В результате мы получим опять буст Лоренца для перехода из ИСО наблюдателя прямо в ИСО камня, а параметр его будет равен $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

Т.е. скорость камня по отношению к ИСО наблюдателя равна

$$\frac{V}{c} = \tanh(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\tanh \alpha_1 + \tanh \alpha_2}{1 + \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2} = \frac{v/c + u/c}{1 + \frac{vu}{c^2}}.$$

Заметим, что параметр буста Лоренца в t, x части ПВ очень похож на угол поворота при 2-мерных вращениях, ведь если мы последовательно применим два 2-мерных поворота с

¹Конец вектора с координатами $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ описывает окружность при изменении φ , так как $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$. При этом конец вектора $(\cosh \alpha, \sinh \alpha)$ описывает гиперболу при изменении α , так как $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$. Этот факт и определяет название обсуждаемого преобразования.

углами φ_1 и φ_2 один за другим, то получим опять 2-мерный поворот на угол $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Т.е. действительно буст Лоренца правомерно называть (гиперболическим) поворотом.

Мы рассмотрели случай, когда \vec{u} и \vec{v} параллельны. Найдем теперь скорость камня в ИСО смотрящего, если он движется с постоянной скоростью \vec{u} не обязательно параллельной \vec{v} (мы забываем в нашем мысленном эксперименте о наличии силы тяжести). Разобьем все векторы на две составляющие — вдоль скорости поезда \vec{v} и перпендикулярную ей, т.е., например, \vec{x} — на $\vec{x}_{||} = \frac{(\vec{v}, \vec{x})}{|\vec{v}|} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ и $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{||}$. Тогда при бусте Лоренца из ИСО смотрящего в ИСО пассажира перпендикулярная компонента \vec{x} не преобразуется $d\vec{x}_{\perp} = d\vec{x}'_{\perp}$, продольная же компонента преобразуется в соответствии с:

$$d\vec{x}_{||} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (d\vec{x}'_{||} + \vec{v} dt'),$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(dt' + \frac{(\vec{v} d\vec{x}'_{||})}{c^2} \right),$$

где штрихованные величины относятся к ИСО пассажира, а не штрихованные — к ИСО смотрящего. Отсюда следует, что:

$$\vec{V}_{\perp} \equiv \frac{d\vec{x}_{\perp}}{dt} = \frac{\vec{u}_{\perp}}{1 + \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$\vec{V}_{||} \equiv \frac{d\vec{x}_{||}}{dt} = \frac{\vec{u}_{||} + \vec{v}}{1 + \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{c^2}}. \quad (5)$$

Теперь, если вместо бросания камня, пассажир будет светить фонарем в произвольном направлении, т.е. испускаемый пассажиром объект будет двигаться со скоростью света, т.ч. $|\vec{u}_{||}| = c \cos \theta'$, где θ' — угол между направлением движения поезда и направлением луча света в ИСО пассажира. Тогда, в соответствии с (5), угол θ в ИСО смотрящего между направлением движения поезда и луча света, $|\vec{V}_{||}| = c \cos \theta$, определяется по формуле:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta'}, \quad v \equiv |\vec{v}|. \quad (6)$$

Явление изменения направления распространения луча света при переходе из одной ИСО в другую называется абберацией.

9. Т.к. время относительно, то для дальнейших наших целей удобно ввести инвариантную характеристику, имеющую смысл времени — так называемое собственное время. Рассмотрим часы, которые движутся произвольным, не обязательно инерциальным, образом. Собственным временем в, вообще говоря, неинерциальной СО, всегда сопутствующей часам, называется время, которое показывают эти часы. Очевидно, что сколько натикают часы, движущиеся данным произвольным образом, не зависит от того из какой СО мы смотрим на эти часы. Предположим, что мы наблюдаем за ними из произвольной ИСО. В каждый отдельный момент времени движение часов можно рассматривать как равномерное и прямолинейное. Поэтому в каждый момент времени можно ввести неподвижно связанную с движущимися часами, т.е. мгновенно сопутствующую, ИСО.

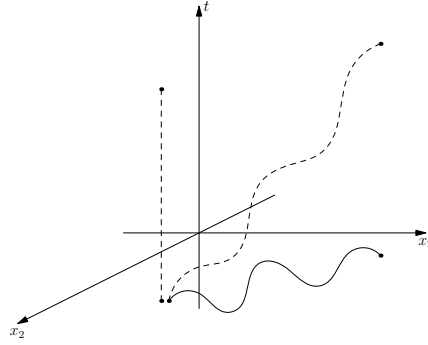


Рис. 5:

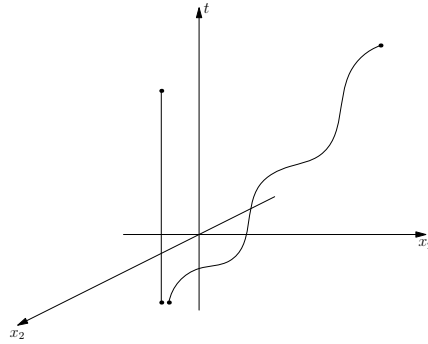


Рис. 6:

В течении малого приращения времени dt по лабораторным часам движущиеся часы проходят расстояние $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{d\vec{x}^2}$ в лабораторной же ИСО. Нас интересует какой промежуток времени $d\tau$ покажут сами движущиеся часы. В мгновенно сопутствующей ИСО часы покоятся, поэтому пройденное ими расстояние в этой ИСО равно, очевидно, $dx' = dy' = dz' = 0$. В силу инвариантности интервала, имеем:

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2.$$

Поэтому

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2(t)}{c^2}}, \quad (7)$$

где $\dot{\vec{x}}(t)$ — скорость часов в момент времени t в нашей ИСО. Аналогичным образом можно ввести собственную длину.

10. Чтобы подытожить все выше сказанное, поясним, в чем заключаются понятия пространства–времени, координатной сетки и системы отсчета. В механике Ньютона у нас был способ измерения расстояния (метрика) в пространстве. А именно, по теореме Пифагора мы могли посчитать расстояние между любыми двумя близкими точками в пространстве, например, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{x} + d\vec{x} = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$, по формуле $dl = \sqrt{d\vec{x}^2} = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$.

С использованием метрики мы могли *количественно* описать характеристики траектории: пройденный путь, ее длину, а также кривизну в различных точках. Например, не трудно понять, что длина траектории γ_{12} между двумя точками 1 и 2 — это интеграл dl вдоль такой траектории: $l = \int_{\gamma_{12}} dl$. Действительно, приблизим гладкую траекторию ломанной. Тогда длина, Δl_i , i -го сегмента ломанной будет равна $\sqrt{\Delta \vec{x}_i^2}$, а полная длина ломанной — $l = \sum_i \Delta l_i$. В пределе когда число сегментов ломанной стремиться к бесконечности, а длина каждого сегмента, соответственно, к нулю, ломанная все лучше и лучше приближает гладкую траекторию, а сумма в последней формуле переходит в интеграл.

Помимо этого в механике Ньютона у нас был независимый способ измерения времени, а именно $\Delta t = t_2 - t_1$. На рис. (5) изображены траектории и поведение покоящейся и движущейся частиц в промежутке времени между t_1 и t_2 . В механике Ньютона обе частицы “стареют” одинаково — на Δt . В любом случае все это позволяло нам *количественно* описывать движение, а потому записывать законы движения в виде формул.

Однако совокупность опытных данных показывает, что нет независимого способа измерять расстояния в пространстве и во времени, а есть единый способ измерения расстояний в пространстве–времени (см. рис. (6)). А именно, расстояние между двумя произвольными событиями (мировыми точками), например, (t, x_1, x_2, x_3) и $(t+dt, x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ вычисляется по формуле $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{x}^2} = \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{x}^2}$.

Во-первых, помимо всего прочего это означает, что в пространстве–времени есть точки, расстояния между которыми могут быть нулевыми или даже мнимыми. Это лишь означает, что здесь мы имеем дело с новой геометрией — геометрией Минковского, а не Евклида. Во-вторых, заметим, что такой способ измерения расстояний дает существенно отличный ответ от “ньютоновско–пифагоровского”, только когда dl^2 сравнимо с $c^2 dt^2$. То есть когда смещения в пространстве сравнимы со смещениями во времени помноженными на скорость света. Или, иными словами, когда скорости движения сравнимы со скоростью света. В третьих, теперь нам надо вычислять количественные характеристики не траекторий, а мировых линий. Длина мировой линии Γ_{12} между двумя событиями 1 и 2 определяется как интеграл ds вдоль нее: $L = \int_{\Gamma_{12}} ds$. Мы обсудим подробно эту формулу в третьей лекции, а сейчас заметим, что эта длина есть ни что иное как собственное время, которое “натикало” на часах наблюдателя, двигающегося вдоль этой мировой линии, помноженное на скорость света: $L = c \int_{\Gamma_{12}} d\tau$.

Таким образом, получается, что в соответствии со специальной теорией относительности теперь покоящаяся и двигающаяся частицы на рис. (6) “состарились” поразному, так как длины их мировых линий, вообще говоря, отличаются — возможно отличаются совсем незначительно, при небольших скоростях, но все таки никогда не равны друг другу. При этом то насколько они состарились не зависит от системы отсчета. Так как разные системы отсчета отвечают разным координатным сеткам в одном и том же пространстве–времени, изображенном на рис. (6) (например, (t, \vec{x}) и (t', \vec{x}') в обозначениях этой лекции), а длина той или иной кривой не может зависеть от выбора координатной сетки.

Вопросы и задачи

- Чтобы осознать насколько глубоко вы понимаете происхождение законов Ньютона, попробуйте ответить на следующие два вопроса:
 - а) Приведите пример эксперимента, в котором независимо бы измерялось ускорение

тела, его масса и сила действующая на него. А затем явно бы проверялось, что $m\vec{a} = \vec{F}$. Или же силу и массу по отдельности измерить нельзя?

б) Как бы выглядели преобразования Галилея, если бы вместо второго закона Ньютона мы имели бы $m\dot{\vec{a}} = \vec{F}$, где $\vec{a} = \ddot{\vec{x}}$? Как бы при этом изменился первый закон Ньютона? Какое движение тогда было бы относительным, а какое абсолютным? Какова будет Лагранжева и Гамильтонова формулировка механики основанной на втором законе вида $m\dot{\vec{a}} = \vec{F}$? Что будет вместо фазового пространства?

- Как будет выглядеть волновое уравнение, если мы рассмотрим малые колебания в 2-мерной и 3-мерной решетке (матрасе). Попробуйте учесть поляризацию звуковых волн в решетке, если шарики могут колебаться в любом направлении вдоль направлений, заполняемых решеткой. Что изменится в случае 2-мерной решетки, вложенной в 3-мерное пространство? Подумайте, как изменится непрерывное волновое уравнение, если к одному из шариков, скажем $i = 0$, мы приложим внешнюю силу? Попробуйте найти решение полученного уравнения в одно-, дву- и трех-мерном случаях. Для ответа на последний вопрос необходимы знания из последующих лекций.
- Как будет выглядеть буст Лоренца вдоль оси y ? Вдоль z ? Вдоль произвольного направления? Как будет выглядеть обратное преобразование Лоренца?
- Объясните следующие парадоксы:
 - а) Человек с шестом собственной длины 10 метров (в ИСО покоя шеста) бежит сквозь сарай собственной длины 6 метров (в ИСО покоя сарая). Он движется с такой скоростью, что релятивистский γ -фактор равен $10/6$, т.ч. длина стержня в ИСО сарая равна 6 метров. Когда человек вбегает в сарай и находится в его центре, наблюдатель, покоящийся в этом сарае, видит, что шест целиком умещается в сарае. Как же такое может быть, если движение с постоянной скоростью относительно, а в ИСО человека с шестом сарай налетает на него с такой скоростью, что его длина сокращается до размеров равных $6 \cdot 6/10 = 3,6$ метра?
 - б) Шест собственной длины 10 метров летит через дыру в плоскости собственной длины 6 метров. С точки зрения наблюдателя, связанного с плоскостью, шест остается все время параллельным этой плоскости и движется вдоль нее с такой скоростью v_x , что релятивистский γ_x -фактор немного больше $10/6$. Составляющая скорости шеста перпендикулярная плоскости v_y , много меньше скорости v_x и подобрана так, что шест пролетает сквозь дыру, оставаясь все время ей параллельным в ИСО наблюдателя, связанного с плоскостью. Как же такое может быть, если движение с постоянной скоростью относительно, а в ИСО наблюдателя на шесте он никак не может поместиться в дыру?
 - в) Шест собственной длины 10 метров скользит без трения по плоскости. В этой плоскости есть дыра собственной длины 6 метров. Шест движется с такой скоростью, что релятивистский γ -фактор немного больше $10/6$. В СО наблюдателя, стоящего на плоскости, шест проваливается в дыру. Как же такое может быть, если в СО шеста длина сарая вроде бы должна сокращается до размеров равных $6 \cdot 6/10 = 3,6$ метра?
- Проверьте, что результат композиции двух бустов с гиперболическими углами α_1 и α_2 является буст с гиперболическим углом $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

Лекция II; Определение тензоров и методы работы с ними, метрический тензор, абсолютно антисимметричный тензор, 4-градиенты и 4-дивергенции от тензоров.

Эта лекция достаточно формальная, т.к. содержит основы тензорного анализа, который необходим для адекватного написания уравнений СТО и классической электродинамики. Я попытался с одной стороны подробно описать откуда следуют те или иные утверждения, касающиеся тензоров. Но с другой стороны постарался не сильно формализовывать изложение.

1. Прежде чем ознакомиться с 4-мерными тензорами, обсудим более простой случай тензоров в 2-мерном пространстве. Как известно, вектор $\vec{v} = (v_1, v_2)$ определяет направление в пространстве. Поэтому это не просто набор из двух чисел — столбец или строка. Это величина, которая преобразуется при линейных заменах координат. И делает это определенным образом:

$$v'_a = M_{ab} v_b \equiv \sum_{b=1}^2 M_{ab} v_b,$$

где v_a — координаты вектора в исходной СК, а v'_a — координаты в новой СК. Удобно в дальнейшем всегда подразумевать суммирование по повторяющемуся индексу, как это сделано в данной формуле для индекса b . В литературе это называется правилом Эйнштейна.

Вышеуказанная запись означает просто

$$\begin{aligned} v'_1 &= M_{11} v_1 + M_{12} v_2 \\ v'_2 &= M_{21} v_1 + M_{22} v_2 \end{aligned}$$

или, что тоже самое:

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Не любая матрица

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

определяет поворот. Для того, чтобы она определяла поворот необходимо, чтобы она удовлетворяла некоторым соотношениям, которые мы определим ниже.

Вышеуказанные формулы можно записать и в другом виде: $v'_a = v_b (M^T)_{ba}$, что означает:

$$(v'_1 \ v'_2) = (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Скалярным произведением двух 2-векторов называется:

$$(\vec{v}, \vec{w}) = v_1 w_1 + v_2 w_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_a w_a,$$

где в последнем выражении (записанном в тензорной форме) опять подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу a .

Очевидно, что скалярное произведение двух векторов сохраняется при поворотах СК: $v_a w_a = v'_a w'_a$. Более того, вращение СК не просто сохраняет величину скалярного произведения, но и не меняет билинейную форму, определяющую скалярное произведение через компоненты векторов:

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 = v'_1 w'_1 + v'_2 w'_2.$$

Давайте посмотрим теперь каким условиям должна удовлетворять матрица \hat{M} , чтобы определять вращение, а не произвольную замену координат. Т.к. $v'_a = M_{ab} v_b$, то

$$v'_a v'_a = v_b (M^T)_{ba} M_{ac} v_c.$$

Пусть матрица \hat{M} удовлетворяет соотношению:

$$(M^T)_{ba} M_{ac} = \delta_{ac}, \quad (9)$$

где символ Кронекера δ_{ac} определен как

$$\delta_{ac} = \begin{cases} 1, & \text{при } a = c \\ 0, & \text{при } a \neq c \end{cases},$$

т.е. (9) эквивалентно матричному равенству вида:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

означающему, что транспонированная матрица \hat{M}^T равняется обратной к \hat{M} : $\hat{M} \hat{M}^T = \hat{I} \Leftrightarrow \hat{M}^T = \hat{M}^{-1}$, где \hat{I} — единичная матрица, представленная выше символом Кронекера. Такие матрицы называются ортогональными.

Если равенство (9) верно, то

$$v'_1 w'_1 + v'_2 w'_2 \equiv v'_a w'_a = v_a \delta_{ac} w_c = v_c w_c \equiv v_1 w_1 + v_2 w_2,$$

т.е. сохраняется и величина скалярного произведения и билинейная форма, определяющая его через компоненты векторов. Именно равенству (9) и должна удовлетворять матрица \hat{M} , чтобы определять вращение, а не произвольную линейную замену координат — переход к неортонормированному базису.

Т.к. $\det \hat{A} = \det \hat{A}^T$ и $\det \hat{A} \hat{B} = \det \hat{A} \det \hat{B}$ для любых матриц \hat{A} и \hat{B} , то из $\hat{M} \hat{M}^T = \hat{I}$ следует, что $\det \hat{M} = \pm 1$. При этом $\det \hat{M} = -1$ отвечает матрице преобразования,

включающего инверсию координат, которую мы не включаем в число вращений. Потому для вращений верно, что $\det \hat{M} = 1$.

Антисимметричная матрица \hat{M} , удовлетворяющая равенству (9) с детерминантом равным единице, всегда может быть представлена в общеизвестном виде:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

где φ — угол вращения.

Перейдем к определению 2-мерных тензоров. Двумерным n -тензором называется величина, $T_{a_1 \dots a_n}$, несущая n индексов и преобразующаяся при вращениях как:

$$T'_{a_1 a_2 \dots a_n} = M_{a_1 b_1} M_{a_2 b_2} \dots M_{a_n b_n} T_{b_1 b_2 \dots b_n} \equiv T_{b_1 b_2 \dots b_n} (M^T)_{b_1 a_1} (M^T)_{b_2 a_2} \dots (M^T)_{b_n a_n}.$$

В этой терминологии вектор является 1-тензором.

Простейшим примером 2-мерного 2-тензора является тензорное произведение двух 2-мерных векторов — $\|v_a w_b\|$. Эту величину можно записать как матрицу:

$$\|v_a w_b\| = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично простейшим примером n -тензора является величина $v_{a_1} w_{a_2} \dots u_{a_n}$, элементы которой в случае $n \geq 3$ уже нельзя расположить в виде квадратной матрицы.

Чтобы познакомиться с другим примером 2-мерного тензора рассмотрим один из фундаментальных примеров скалярного произведения — норму или длину вектора. Например, длина 2-мерного вектора $(dx, dy) \equiv (dx_1, dx_2)$ с концами $(x, y) \equiv (x_1, x_2)$ и $(x + dx, y + dy) \equiv (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$ равна

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 \equiv dx_1^2 + dx_2^2 = \sum_{a=1}^2 dx_a dx_a \equiv dx_a dx_a.$$

Эта формула определяет метрику в 2-мерном Евклидовом пространстве — способ определения расстояния в пространстве. Введем понятие 2-мерного Евклидова метрического тензора, переписав выражение для длины в несколько более общем виде:

$$dl^2 \equiv dx_a dx_a = \delta_{ab} dx_a dx_b = \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix},$$

где δ_{ab} — это символ Кронекера и в данной формуле как раз и является Евклидовым метрическим тензором. Эта величина является 2-тензором, т.к. правильно преобразуется при заменах координат. Действительно, при 2-мерных вращениях длина не меняется

$$dl^2 = \delta_{ab} dx_a dx_b = \delta'_{ab} dx'_a dx'_b.$$

И, т.к. $dx'_a = M_{ab} dx_b$, то необходимо, чтобы метрический тензор при вращениях преобразовывался как

$$\delta'_{ab} = M_{ac} M_{bd} \delta_{cd},$$

чтобы длина оставалась инвариантной. Действительно,

$$\delta'_{ab} dx'_a dx'_b = \delta_{cd} (M^T)_{ca} (M^T)_{db} M_{ae} dx_e M_{bg} dx_g.$$

Но, если \hat{M} — это матрица вращения, то верно, что $(M^T)_{ca} M_{ab} = \delta_{cb}$. Тогда

$$\delta'_{ab} dx'_a dx'_b = \delta_{cd} \delta_{ce} \delta_{dg} dx_e dx_g = \delta_{ab} dx_a dx_b.$$

Т.е. длина действительно инвариантна.

Замечательным свойством метрического тензора является то, что он сам инвариантен при вращениях, т.е. преобразованный метрический тензор совпадает с исходным:

$$\delta'_{ab} = M_{ac} M_{bd} \delta_{cd} = \delta_{ab},$$

где для получения последнего равенства я просто по-другому переписал уравнение $(M^T)_{ca} M_{ab} = \delta_{cb}$:

$$(M^T)_{ca} M_{ab} = M_{ca} (M^T)_{ab} = M_{ca} \delta_{ad} (M^T)_{db} = M_{ca} M_{bd} \delta_{ad}.$$

Последнее утверждение является просто отражением того факта, что билинейная форма δ_{ab} , определяющая метрику в 2-мерном пространстве, не меняется при вращениях: $dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2 \Leftrightarrow \delta_{ab} dx_a dx_b = \delta_{ab} dx'_a dx'_b$.

Далеко не все тензоры инвариантны при вращениях. Число инвариантных тензоров относительно 2-мерных вращений ограничивается Евклидовым метрическим тензором и абсолютно-антисимметричным тензором ϵ_{ab} . Последний однозначно определяется свойством антисимметрии, $\epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba}$, и тем, что $\epsilon_{12} = 1$. Действительно, тогда $\epsilon_{21} = -\epsilon_{12} = -1$, а $\epsilon_{11} = -\epsilon_{11} = 0$ и $\epsilon_{22} = -\epsilon_{22} = 0$. Т.е. этот тензор может быть представлен в виде следующей 2×2 матрицы:

$$\|\epsilon_{ab}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Докажем, что этот тензор инвариантен относительно вращений. Рассмотрим два вектора $dx_a^{(1)}$ и $dx_b^{(2)}$. Составим из них величину $\epsilon_{ab} dx_a^{(1)} dx_b^{(2)}$. Не трудно видеть, что эта величина есть ни что иное как площадь элементарной площадки, натянутой на два вектора $dx_a^{(1)}$ и $dx_b^{(2)}$: т.к. она просто равна $\epsilon_{12} dx_1^{(1)} dx_2^{(2)} + \epsilon_{21} dx_2^{(1)} dx_1^{(2)} = dx_1^{(1)} dx_2^{(2)} - dx_2^{(1)} dx_1^{(2)}$. Последнюю величину можно представить как $dx_1 dx_2 = dx dy$, если направить $dx_a^{(1)}$ вдоль первой оси x (т.е. положить $dx_2^{(1)} = 0$), а $dx_b^{(2)}$ вдоль второй оси y (т.е. положить $dx_1^{(2)} = 0$).

Но площадь не меняется при вращениях. Действительно вращение — это просто замена координат, т.е. $dx dy = \det(\hat{M}) dx' dy'$, где $\det(\hat{M})$ — это якобиан замены. Но $\det(\hat{M}) = 1$, т.к. \hat{M} — это матрица вращения. Т.к. площадь не меняется при вращениях, то $\epsilon_{ab} dx_a^{(1)} dx_b^{(2)} = \epsilon_{ab} dx_a^{(1)'} dx_b^{(2)'}$. Т.е. антисимметричный тензор инвариантен относительно вращений.

Абсолютно-антисимметричный тензор обладает рядом замечательных свойств. Например, легко видеть, что

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Это равенство можно записать в компактной тензорной форме как

$$\epsilon_{ab} \epsilon_{bc} = -\delta_{ac},$$

где, как обычно подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу b . На самом деле антисимметричный тензор удовлетворяет и более общему тождеству:

$$\epsilon_{ab} \epsilon_{dc} = \det \begin{pmatrix} \delta_{ad} & \delta_{ac} \\ \delta_{bd} & \delta_{bc} \end{pmatrix} \equiv \delta_{ad} \delta_{bc} - \delta_{ac} \delta_{bd}, \quad (11)$$

которое доказывается следующим образом. Левая часть этого равенства — инвариантный 2–мерный 4–тензор — результат тензорного произведения двух инвариантных 2–мерных 2–тензоров. Он антисимметричен относительно перестановки внутри первой пары и внутри второй пары индексов. При этом он симметричен при перестановке первой пары индексов со второй. Единственный инвариантный 4–тензор, обладающий такими свойствами, написан на правой стороне этого равенства. (*Требует строгого математического доказательства тот факт, что все инвариантные относительно вращений 2–мерные тензора строятся из δ_{ab} и ϵ_{ab} .* Однако это выходит за рамки нашего курса.) Коэффициент в равенстве фиксируется из следующих соображений. Свернем в этом равенстве второй индекс у первого антисимметричного тензора (индекс b) с первым индексом у второго (т.е. положим индекс d равным b и просуммируем по повторяющемуся индексу). В результате мы получим уже знакомое нам равенство с верным коэффициентом: $\epsilon_{ab} \epsilon_{bc} = -\delta_{ac}$.

2. Теперь, когда мы познакомились с тензорами в 2–мерном пространстве, мы готовы перейти к тензорам в 4–мерном ПВ. В тензорной форме формулы в 4–мерном случае выглядят почти столь же просто как и в 2–мерном пространстве.

Четырехмерным вектором или 4–вектором является набор из четырех величин (строка или столбец)² $v^\mu \equiv (v^0, v^1, v^2, v^3) \equiv (v^0, \vec{v})$, который определяет направление в ПВ и, следовательно, правильным образом преобразуется при преобразованиях Лоренца (ПЛ) (комбинированном применении 3–мерных вращений вокруг различных осей и Лоренцевских бустов вдоль различных направлений):

$$v'^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_\nu v^\nu.$$

Здесь и ниже, как я уже неоднократно подчеркивал, подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу. Причину наличия верхних и нижних индексов мы объясним чуть ниже; Λ^μ_ν — это матрица ПЛ. Не любая 4×4 матрица подходит в качестве матрицы ПЛ. Условия, которым должна удовлетворять матрица Λ^μ_ν , чтобы определять ПЛ, мы выведем ниже.

²Подчеркну, что я использую греческие буквы μ, ν, α, β для обозначения 4–мерных индексов, а латинские буквы i, j, k, l, m, n — для обозначения 3–мерных индексов. При этом в книге Ландау и Лифшица, а также в задавальнике наоборот — латинские буквы используются для обозначения 4–мерных индексов, а греческие — для обозначения 3–мерных индексов.

Простейшим примером 4-вектора является направление из начала отсчета СК в какую-нибудь мировую точку — $x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct, \vec{x})$. В случае вращения на угол φ вокруг оси z , время t и координата z остаются неизменными. Поэтому матрица ПЛ выглядит как:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

В случае буста Лоренца со скоростью v в положительном направлении оси x , координаты y и z остаются неизменными, а матрица ПЛ выглядит как:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где $\beta = v/c$, а $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ — релятивистский γ -фактор. Произвольная матрица, задающая ПЛ, определяется произведением подобных матриц, определяющих вращения и Лоренцевские бусты вдоль различных направлений.

Четырехмерный n -тензор $T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ — это величина, имеющая n индексов и преобразующаяся относительно ПЛ как:

$$T'^{\mu_1\dots\mu_n} = \Lambda_{\nu_1}^{\mu_1} \dots \Lambda_{\nu_n}^{\mu_n} T^{\nu_1\dots\nu_n} \equiv T^{\nu_1\dots\nu_n} (\Lambda^T)_{\nu_1}^{\mu_1} \dots (\Lambda^T)_{\nu_n}^{\mu_n}$$

В этом смысле 4-вектор является просто 4-мерным 1-тензором. Очевидно, элементы 4-мерного 2-тензора можно расположить в виде 4×4 матрицы. Однако в случае, если тензор имеет более чем 2 индекса, то его элементы уже не возможно расположить в виде квадратной матрицы. Если угодно, элементы 4-мерного n -тензора можно расположить в n -мерном $4 \times 4 \times \dots \times 4$ гиперкубе. Однако такое представление никому не облегчит жизнь и не упростит вычисления. Гораздо проще иметь дело прямо с величинами с индексами. Простейшим 4-мерным n -тензором является тензорное произведение n 4-векторов: $v_1^{\mu_1} \dots v_n^{\mu_n}$.

Важным примером 2-тензора является метрический тензор Минковского $\eta_{\mu\nu}$, задающий интервал в 4-мерном ПВ:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (12)$$

Чтобы интервал принял свою привычную форму $ds^2 = (dx^0)^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$, необходимо, чтобы:

$$\|\eta_{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Покажем, что $\eta_{\mu\nu}$ действительно тензор, т.е. преобразуется правильным образом при ПЛ. Действительно, при этих преобразованиях $dx'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} dx^{\nu}$. Поэтому, чтобы было верно равенство:

$$ds^2 = \eta'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (14)$$

необходимо, чтобы метрический тензор преобразовывался как $\eta'^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} \eta^{\alpha\beta}$, т.е. именно как 2-тензор, а матрица ПЛ удовлетворяла условию:

$$\Lambda_{\alpha}^{\mu} (\Lambda^T)_{\nu}^{\alpha} = \delta_{\nu}^{\mu}, \quad (15)$$

где δ_{ν}^{μ} — это символ Кронекера (единичная 4×4 матрица):

$$\delta_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 1, & \text{при } \mu = \nu \\ 0, & \text{при } \mu \neq \nu \end{cases}.$$

Т.е. ситуация вполне аналогична 2-мерному случаю. В частности, равенство (15) можно понимать как то, что тензор δ_{ν}^{μ} инвариантен относительно ПЛ:

$$\delta'_{\nu}{}^{\mu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\alpha} (\Lambda^T)_{\nu}^{\beta} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} (\Lambda^T)_{\nu}^{\alpha} = \delta_{\nu}^{\mu}$$

Из (15), которое также можно понимать как матричное уравнение $\hat{\Lambda} \hat{\Lambda}^T = \hat{I}$, где \hat{I} — это единичная 4×4 матрица, следует, что $\det \hat{\Lambda} = \pm 1$. Но $\det \hat{\Lambda} = -1$ отвечает инверсиям координат, которые не включаются в число ПЛ. Поэтому ПЛ отвечают только матрицы $\hat{\Lambda}$, удовлетворяющие условию (15) и имеющие единичный детерминант.

Скалярное произведение (или свертка) двух 4-векторов v^{μ} и w^{μ} определяется с использованием метрики в ПВ — $\eta_{\mu\nu} v^{\mu} w^{\nu}$ — аналогично тому как это было сделано в 2-мерном пространстве. Четыре-вектора с верхними индексами v^{μ} называются ковариантными. Каждому ковариантному вектору можно поставить в соответствие контравариантный вектор $v_{\mu} = \eta_{\mu\nu} v^{\nu}$, несущий нижний индекс. Замечу, что если $v^{\mu} = (v^0, \vec{v})$, то $v_{\mu} = (v^0, -\vec{v})$ и контравариантные вектора существенно отличаются от ковариантных. При этом в пространстве (как в 2-мерном так и в 3-мерном) метрический тензор совпадает с единичной матрицей, поэтому $v_i = \delta_{ij} v^j = v^j$, где $i = 1, 2, 3$, и поэтому в Евклидовом пространстве никто не отличает нижние (контравариантные) и верхние (ковариантные) индексы. В свете определения ковариантных и контравариантных векторов, скалярное произведение можно записать несколькими эквивалентными способами $\eta_{\mu\nu} v^{\mu} w^{\nu} = v_{\mu} w^{\mu} = v^{\alpha} w_{\alpha}$

Аналогично, если нам дан контравариантный вектор, то из него можно построить ковариантный $v^{\mu} = \eta^{\mu\nu} v_{\nu}$ вектор с использованием тензора $\eta^{\mu\nu}$, который является обратным к метрическому тензору:

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mu} \Leftrightarrow \hat{\eta}^{up} \hat{\eta}_{down} = \hat{I}.$$

Важным свойством метрического тензора и обратного к нему является то, что они инвариантны относительно ПЛ, аналогично билинейной форме, определяющей скалярное произведение в 2-мерном пространстве:

$$\eta'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \Lambda_\mu^\alpha \eta_{\alpha\beta} (\Lambda^T)_{\nu}^\beta = \Lambda_\mu^\alpha (\Lambda^T)_{\alpha\nu} = \eta_{\mu\nu}. \quad (16)$$

Последнее равенство получено с применением (15), что можно увидеть после умножения обеих частей (16) на тензор $\eta^{\mu\nu}$. Фактически в инвариантности метрического тензора по отдельности относительно бустов Лоренца и вращений мы убедились, когда показали, что билинейная форма, определяющая ПВ интервал, остается неизменной при этих преобразованиях.

При помощи тензоров $\eta^{\mu\nu}$ и $\eta_{\mu\nu}$ мы можем понижать и повышать индексы у 4-мерных тензоров. Например, если нам дан 4-мерный n -тензор $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}$ со всеми ковариантными индексами, то с использованием метрического тензора мы можем построить из него тензор со смешанными индексами. Скажем: $T^\mu{}_{\beta}{}^\alpha = \eta_{\beta\nu} T^{\mu\nu\alpha}$.

Таким образом, с использованием метрического тензора и обратного к нему мы можем строить всевозможные свертки тензоров: например, $T^{\mu\nu} \eta_{\nu\alpha} v^\alpha \equiv T^{\mu\nu} v_\nu$ и т.д.. Важно, что результат свертки всегда преобразуется правильным образом при ПЛ. Например, скалярное произведение двух 4-векторов $\eta_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = v_\mu w^\mu$ не несет никаких индексов, а потому не меняется при ПЛ (т.е. является инвариантом): $\eta_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = \eta'_{\mu\nu} v'^\mu w'^\nu = \eta_{\mu\nu} v'^\mu w'^\nu$, где штрихованные величины — компоненты тензоров в новой СО.

Далее, величина $T^{\mu\nu} \eta_{\nu\alpha} v^\alpha = T^{\mu\nu} v_\nu$ преобразуется при ПЛ как ковариантный 4-вектор. Действительно, верхний индекс ν тензора $T^{\mu\nu}$ преобразуется так, что компенсирует преобразование нижнего индекса ν вектора v_ν . В результате ПЛ действует только на первый индекс μ всей свертки $T^{\mu\nu} v_\nu$. Подчеркну, что при этом, величина $T^{\mu\nu} v^\nu$ преобразуется не как вектор при ПЛ, т.к. преобразование двух верхних индексов ν не компенсируют друг друга. Т.е. запись $T^{\mu\nu} v^\nu$ бессмысленна с точки зрения тензорного анализа. По той же причине, не менее бессмысленной величиной является и $T^{\mu\nu} v_\nu w_\nu$.

Я надеюсь, что эти довольно-таки муторные пояснения дадут вам возможность ухватить основную мысль, мотивирующую тензорные обозначения и введение верхних и нижних индексов. Дело в том, что если нам дана некоторая свертка тензоров, то одного взгляда на нее достаточно, что бы понять имеет ли она смысл как тензор или нет. И, если имеет, то можно сразу понять как результат свертки преобразуется при ПЛ. В частности, можно сразу понять является ли та или иная величина инвариантом или нет.

Как мы увидим в следующих лекциях, уравнения движения СТО и релятивистской электродинамики, будучи записаны в тензорной форме, являются Лоренц ковариантными, т.е. их вид не меняется при ПЛ — при замене одной ИСО на другую. В этом и заключается принцип относительности.

3. Помимо тензоров $\delta_\mu^\nu \equiv \eta_\mu^\nu$, $\eta_{\mu\nu}$ и $\eta^{\mu\nu}$ инвариантным относительно ПЛ является 4-мерный абсолютно-антисимметричный тензор $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, который однозначно определяется свойством антисимметрии относительно любой перестановки пары своих индексов:

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon_{\nu\mu\alpha\beta} = \epsilon_{\nu\alpha\mu\beta} = -\epsilon_{\alpha\nu\mu\beta} = \dots$$

и определением $\epsilon_{0123} = 1$. Действительно, любая его компонента, отвечающая двум совпадающим индексам, равна нулю: например, $\epsilon_{\mu 0\nu 0} = -\epsilon_{\mu 0 0\nu} = \epsilon_{\mu 0 0\nu} = 0$. Поэтому у ненулевых его компонент все индексы должны быть отличны друг от друга, т.е. все ненулевые компоненты абсолютно-антисимметричного тензора получаются из ϵ_{0123} перестановкой индексов. Если перестановка четная, то соответствующая компонента равна +1, а если

нечетная, то -1 . То, что этот тензор инвариантен относительно ПЛ доказывается аналогично тому, как выше была доказана инвариантность 2-мерного абсолютно-антисимметричного тензора: надо построить из рассматриваемого тензора элемент 4-объема, который, очевидно, инвариантен относительно ПЛ, т.к. якобиан замены переменных в этом случае равен единице.

Имеется так же 3-мерный абсолютно-антисимметричный тензор ϵ_{ijk} , $i = 1, 2, 3$. Он тоже однозначно определяется свойством антисимметрии относительно перестановки любой пары соседних индексов и тем, что $\epsilon_{123} = 1$. С использованием этого тензора особенно просто записывается векторное произведение двух 3-мерных векторов:

$$[\vec{v} \times \vec{w}]_i = \epsilon_{ijk} v_j w_k.$$

Действительно, $[\vec{v} \times \vec{w}]_1 \equiv v_2 w_3 - v_3 w_2$. При этом $\epsilon_{1jk} v_j w_k = \epsilon_{123} v_2 w_3 + \epsilon_{132} v_3 w_2 = v_2 w_3 - v_3 w_2$. Для 2-й и 3-й компоненты векторного произведения вышеуказанное равенство проверяется аналогичным образом.

В частности верно, что:

$$[\text{rot } \vec{v}(x)]_i = \left[\vec{\nabla} \times \vec{v}(x) \right]_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k(x).$$

Четырехмерный и трехмерный абсолютно антисимметричные тензора удовлетворяют некоторым тождествам аналогичным тем, которым удовлетворяет 2-мерный тензор. Доказательство их аналогично. Эти тождества можно найти в начале II-го тома Ландау-Лифшица или в задавальнике.

Подчеркну, что у величины $\epsilon_{0\nu\mu\alpha}$ все ненулевые компоненты имеют пространственные индексы, т.е. $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, $\alpha \neq 0$. Поэтому эти компоненты можно представить как $\epsilon_{0ijk} = \epsilon_{ijk}$, $i = 1, 2, 3$. Аналогично $\epsilon_{03ab} = \epsilon_{3ab} = \epsilon_{ab}$.

4. Определим теперь 4-градиент и 4-дивергенцию. Контравариантным 4-градиентом скалярного поля $\phi(t, \vec{x})$ является 4-вектор со следующими компонентами

$$\partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi = \left(\frac{\partial \phi}{c \partial t}, \vec{\nabla} \phi \right) = \left(\frac{\partial \phi}{c \partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \phi}{c \partial t}, \text{grad} \phi \right),$$

где каждая из компонент определяет скорость изменения поля в соответствующем направлении. В свете вышесказанного легко понять, что ковариантный 4-градиент равен:

$$\partial^\mu \phi = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial \phi}{c \partial t}, -\text{grad} \phi \right).$$

Обращаю ваше внимание на расположение индексов в производных и дифференциалах. Это расположение связано с тем, что, если dx^μ преобразуется как ковариантный вектор, то $\partial/\partial x^\mu$ преобразуется как — контравариантный, и наоборот. Далее можно определить 4-градиент любого тензорного поля. Скажем для 4-мерного 3-тензорного поля $T_{\mu\nu\alpha}$ он равен $\partial_\beta T_{\mu\nu\alpha}$ и является уже 4-мерным 4-тензором.

Четыре-дивергенцией 4-векторного поля $A^\mu(t, \vec{x}) = (A^0(t, \vec{x}), \vec{A}(t, \vec{x}))$ является скалярная величина (инвариантная относительно ПЛ), имеющая вид:

$$\eta_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu = \partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = \frac{\partial A^0}{c \partial t} - \vec{\nabla} \vec{A} = \frac{\partial A^0}{c \partial t} - \text{div } \vec{A}.$$

Аналогично 4–дивергенцию можно определить и для тензорных полей. Скажем, 4–дивергенция 4–мерного 3–тензорного поля $T_{\mu\nu\alpha}$ равна $\partial^\mu T_{\mu\nu\alpha}$ и преобразуется, как 4–мерный 2–тензор относительно П.Л. Т.е., если 4–градиент повышает число индексов, то 4–дивергенция уменьшает их число.

Приведем несколько очевидных свойств 4–градиента и 4–дивергенции. Очевидно, что

$$\partial_\mu x^\nu = \partial x^\nu / \partial x^\mu = \delta_\mu^\nu.$$

Тогда $\partial_\mu x^\mu = 4$. Далее,

$$\partial_\mu x_\nu = \partial_\mu \eta_{\nu\alpha} x^\alpha = \eta_{\nu\alpha} \delta_\mu^\alpha = \eta_{\mu\nu}.$$

Тогда очевидно, что

$$\partial_\mu |x|^2 \equiv \partial_\mu (x^\nu x_\nu) = (\partial_\mu x^\nu) x_\nu + x^\nu (\partial_\mu x_\nu) = \delta_\mu^\nu x_\nu + x^\nu \eta_{\mu\nu} = 2x_\mu.$$

Далее

$$\partial_\mu |x| \equiv \partial_\mu (x^\nu x_\nu)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(x^\nu x_\nu)^{\frac{1}{2}}} \partial_\mu (x^\alpha x_\alpha) = \frac{x_\mu}{|x|}.$$

И, наконец,

$$\partial_\mu \frac{1}{|x|} = -\frac{1}{2(x^\nu x_\nu)^{\frac{1}{2}+1}} \partial_\mu (x^\alpha x_\alpha) = -\frac{x_\mu}{|x|^3}.$$

Все остальное следует тривиально. Надо только уметь пользоваться правилом дифференцирования сложной функции (многих переменных).

5. Аппендикс о разложении в ряд Тейлора функции многих переменных.

Рассмотрим функцию двух переменных $f(\vec{x}) \equiv f(x_1, x_2)$. Нам необходимо разложить по степеням компонент малого вектора \vec{a} , $|\vec{a}| \ll |\vec{x}|$, следующую функцию $f(\vec{x} + \vec{a})$. Получаем выражения:

$$\begin{aligned} f(x_1 + a_1, x_2 + a_2) &= f(x_1, x_2) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} a_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} a_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} a_2^2 + \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} a_1 a_2 + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Они могут быть переписаны в форме:

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{a}) &= f(\vec{x}) + \partial_i f(\vec{x}) \cdot a_i + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j f(\vec{x}) \cdot a_i a_j + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f(\vec{x}) \cdot a_{i_1} \dots a_{i_n}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (18)$$

Это разложение может быть с легкостью обобщено на случай, когда мы имеем дело с векторами в пространстве большей размерности, то есть когда $i = 1, \dots, D$ и $D > 3$. Так же в этих выражениях нигде не использовалась сигнатура метрики. Поэтому они верны как в пространстве Евклида, так и в пространстве–времени Минковского.

Вопросы и задачи

- Как должны преобразовываться строка и столбец, определяющие векторы, при произвольной линейной замене координат, чтобы величина скалярного произведения не зависела бы от выбора СК? Как при этом меняется билинейная форма, определяющая выражение для скалярного произведения через компоненты векторов?
- Произвольная невырожденная (с ненулевым детерминантом) постоянная (не зависящая от ПВ координат) билинейная форма $g_{\mu\nu}$ может определять метрику (интервал), $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, в пространстве или ПВ в зависимости от ее сигнатуры. Такая билинейная форма может быть приведена, посредством линейной замены координат, к одному из стандартных видов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

в зависимости от ее сигнатуры. Первый случай описывает 4–мерное Евклидово пространство с геометрией аналогичной 3–мерному и 2–мерному случаям. Средний случай — это уже хорошо известное нам ПВ Минковского. Последний случай описывает гипотетическое пространство с двумя временами.

Случай с одной минус единицей и тремя плюс единицами на диагонали, не указанный здесь, сводится к ПВ Минковского заменой $ds^2 \rightarrow -ds^2$, которая не меняет геометрии ПВ (Почему?). Случай со всеми минус единицами на диагонали, тоже не указанный здесь, сводится аналогичной заменой к 4–мерному Евклидову пространству. Подумайте, какова будет геометрия в случае ПВ с двумя временами: Как там будет устроен световой конус? Какие варианты для интервалов имеются в этом случае? Какие преобразования отвечают замене СО и т.д.?

Пусть метрика в нашем пространстве определяется не билинейной формой, а постоянной трилинейной формой: $ds^3 = g_{\mu\nu\alpha} dx^\mu dx^\nu dx^\alpha$. Подумайте к каким стандартным видам такие трилинейные формы можно привести при помощи линейных замен координат. Какие 4–мерные геометрии они описывают? А какова ситуация, если метрика определяется четыре–линейной формой? Это очень сложные вопросы для начинающих изучать СТО, основательный ответ на которые вполне можно опубликовать в научном журнале.

- Вычислите

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} \partial_\gamma \partial^\nu \frac{x^\mu |x|}{k_\delta x^\delta},$$

если 4–вектор k_δ является константой — не зависит от x .

- Разложите до второй степени по компонентам малого 4–вектора a^μ следующее выражение: $\frac{1}{[k_\mu(x^\mu + a^\mu)]^2}$. Здесь k^μ — некоторый постоянный 4–вектор.

Лекция III, 4-скорость и 4-ускорение, действие для релятивистской частицы, принцип наименьшего действия для частицы, симметрии действия и законы сохранения, релятивистская кинематика, эффект Доплера.

1. В СТО для упрощения изучают объекты без внутренней структуры — точечные элементарные частицы, т.к. в СТО не бывает абсолютно жестких тел. Действительно, рассмотрим абсолютно жесткий, длинный стержень. Пусть его ударили молотком с одной стороны. Так как стержень абсолютно жесткий, то мы мгновенно получим отклик с другой его стороны. А так как удар по стержню и отклик пространственно разделенные события, то существуют ИСО, в которых отклик со второй стороны стержня происходит *раньше* удара молотком по его первой стороне.

Это очевидное противоречие разрешается, если вспомнить, что абсолютно жестких тел не бывает, а стержень имеет внутреннюю структуру и по нему могут распространяться звуковые/упругие волны, скорость которых сильно меньше скорости света. А именно, отклик со второй стороны стержня произойдет только после того как до нее дойдет упругая волна возбужденная молотком с первой его стороны.

2. Итак, задачей релятивистской механики является нахождение мировой линии элементарной частицы, т.е. решение динамических уравнений, которые будут определены ниже, при данных начальных условиях.

Чтобы поставить задачу релятивистской механики, определим 4-вектор скорости. Казалось бы, если задана мировая линия частицы $z^\mu(t) = (ct, \vec{z}(t))$, где $\vec{z}(t)$ — траектория частицы, то на эту роль подходит величина $dz^\mu(t)/dt$. Однако она преобразуется при ПЛ не как 4-вектор, а как $\partial_0 z^\mu$ компонента 2-тензора $\partial_\nu z^\mu$: dz^μ преобразуется как 4-вектор, а dt — как нулевая компонента 4-вектора.

Чтобы определить правильным образом 4-вектор скорости (4-скорость), надо поделить приращение вдоль траектории — dz^μ — на величину, которая является релятивистским инвариантом, и, при этом, имеет смысл времени. Такими свойствами обладает собственное время в СО, сопутствующей частице — $ds^2 = c^2 d\tau^2$, где τ — собственное время. Таким образом, 4-скорость определяется как:

$$u^\mu = \frac{dz^\mu}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dz^\mu}{d\tau}. \quad (20)$$

Т.к. $d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$, где $\vec{v} = \dot{\vec{z}}$, то компоненты 4-вектора скорости имеют вид:

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = (\gamma, \gamma \vec{\beta}), \quad (21)$$

где $\vec{\beta} = \vec{v}/c$. Заметив, что $ds^2 = dz^\mu dz_\mu$ — квадрат длины элементарного участка траектории, имеем:

$$1 = \frac{dz^\mu dz_\mu}{ds ds} = u^\mu u_\mu. \quad (22)$$

Т.е. геометрический смысл 4–скорости — это единичный 4–вектор, касательный к мировой линии.

Теперь должно быть очевидно, что 4–ускорение определяется как:

$$w^\mu \equiv \frac{du^\mu}{ds} \equiv \frac{d^2 z^\mu}{ds^2}. \quad (23)$$

Дифференцируя соотношение $u^\mu u_\mu$ по d/ds , получаем:

$$0 = \frac{d(u^\mu u_\mu)}{ds} = \left(\frac{du^\mu}{ds} \right) u_\mu + u^\mu \left(\frac{du_\mu}{ds} \right) = 2 \left(\frac{du^\mu}{ds} \right) u_\mu = 2 w^\mu u_\mu. \quad (24)$$

Т.е. 4–вектор скорости и 4–вектор ускорения элементарной частицы всегда ортогональны друг другу. Так как $u_\mu u^\mu = 1 > 0$, то u^μ — это времени подобный вектор. Поэтому ортогональный к нему вектор w^μ должен быть пространственно подобным, то есть $w_\mu w^\mu \leq 0$, при любом движении. Причем $w_\mu w^\mu = 0$ только, если $w^\mu = 0$.

3. Законы движения частиц в СТО как и в обычной механике следуют из принципа наименьшего действия, который гласит, что для мировой линии, решающей уравнения движения, функционал действия частицы принимает минимальное значение. Можно сказать, что принцип наименьшего действия — постулат, следующий из логически непротиворечивого описания совокупности опытных фактов. Т.е. вместо постулирования динамических уравнений (вроде 2-го закона Ньютона), мы можем постулировать принцип наименьшего действия. Тогда динамические уравнения будут выводиться как следствие.

Действительно, вспомним, что функционал действия для нерелятивистской частицы имеет вид:

$$S[\vec{z}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{m \dot{\vec{z}}^2(t)}{2} - V[\vec{z}(t)] \right\},$$

где m — это масса частицы, а $V[\vec{z}]$ — потенциальная энергия. Для свободной частицы $V = 0$. Функционал можно понимать как предельный случай функции большого числа переменных. Например, рассмотрим функцию N векторных переменных:

$$S[\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_N] \equiv \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{m (\vec{z}_{i+1} - \vec{z}_i)^2}{2 \Delta t^2} - V[\vec{z}] \right\} \Delta t, \quad (25)$$

где здесь Δt и m — параметры. В пределе $N \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$ и $z_{i+1} - z_i \rightarrow 0$ сумма в этом определении сводится к интегралу, а функция от N переменных $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_N$ — ломанной приближающей траекторию частицы — к функционалу ("функции от континуального числа переменных") $\vec{z}(t)$ — траектории частицы.

Из аналогии с функцией многих переменных должно быть понятно, что экстремум действия определяется из того, что его линейная вариация по $\vec{z}(t)$ равна нулю:

$$\delta S[\vec{z}(t)] \equiv \left\{ S[\vec{z}(t) + \delta\vec{z}(t)] - S[\vec{z}(t)] \right\} \Big|_{\text{linear in } \delta z} = 0.$$

При этом, вариации на концах траектории равны нулю: $\delta z(t_1) = \delta z(t_2) = 0$, т.е. при варьировании мы держим концы траектории фиксированными, скажем, в точках $\vec{z}(t_1) = \vec{x}_1$ и $\vec{z}(t_2) = \vec{x}_2$; эти данные задают начальные и конечные условия в нашей динамической задаче.

Проварьируем данное нам нерелятивистское действие явно:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} (\dot{\vec{z}} + \delta\dot{\vec{z}})^2 - \frac{m}{2} \dot{\vec{z}}^2 - V[\vec{z} + \delta\vec{z}] + V[\vec{z}] \right] \Big|_{\text{linear in } \delta z} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} 2 \dot{\vec{z}} \delta\dot{\vec{z}} - \vec{\partial}V[\vec{z}] \delta\vec{z} \right].$$

Мы собираемся потребовать, что $\delta S = 0$ при любом $\delta\vec{z}$, в то время как в правой стороне стоит $\delta\dot{\vec{z}}$. Чтобы избавиться от производной по времени от $\delta\vec{z}$ проинтегрируем первый член в последнем выражении по частям:

$$\delta S = m \dot{\vec{z}} \delta\vec{z} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[m \ddot{\vec{z}} + \vec{\partial}V \right] \delta\vec{z}.$$

Первое выражение с правой стороны этого равенства тождественно зануляется, т.к. $\delta z(t_1) = \delta z(t_2) = 0$. Второе выражение на правой стороне последнего равенства равно нулю при любом $\delta z(t)$ тогда и только тогда, когда $m\ddot{\vec{z}} = -\vec{\partial}V$. Т.е., постулировав условие минимума действия, мы получили второй закон Ньютона как следствие. Замечу, что для корректной постановки задачи, мы должны наложить начальные и конечные условия для дифференциального уравнения второго порядка³: $\vec{z}(t_1) = \vec{x}_1$ и $\vec{z}(t_2) = \vec{x}_2$.

4. Лагранжиан $L = \frac{m\dot{\vec{z}}^2(t)}{2}$ не может подойти для описания движения свободной релятивистской частицы, т.к. приводит к уравнениям движения $m\ddot{\vec{z}} = 0$, которые не инвариантны относительно преобразований Лоренца, поскольку в них время и пространственные координаты входят не равноправно.

Динамика релятивистской частицы должна описываться Лоренц ковариантными уравнениями движения, чтобы уважать принцип относительности. Поэтому действие для релятивистской частицы должно быть Лоренц инвариантом. Подходящим кандидатом на роль действия для релятивистской частицы является длина ее мировой линии. Действительно:

- Длина является простейшим Лоренц инвариантом, который можно построить по заданной мировой линии.
- Экстремальную длину имеет прямая линия. А мы и ожидаем, что свободная релятивистская частица будет двигаться по прямой в ПВ.

³На самом деле есть несколько способов занулить вклад $m \dot{\vec{z}} \delta\vec{z} \Big|_{t_1}^{t_2}$ в вариацию действия. Для определения решения дифференциального уравнения второго порядка, коим является второй закон Ньютона, необходимо наложить два условия. Например, условие $\delta z(t_1) = \delta z(t_2) = 0$, а следовательно концы траектории фиксированы, $\vec{z}(t_1) = \vec{x}_1$ и $\vec{z}(t_2) = \vec{x}_2$, называется граничным условием Дирихле. Вместо этого можно потребовать $\dot{\vec{z}}(t_1) = \dot{\vec{z}}(t_2) = 0$. Такое условие называется граничным условием Неймана. Возможны и комбинации из таких условий на разных концах.

Итак мы предполагаем, что для релятивистской частицы $S = \alpha l_{12}$, где α — некоторый параметр, который мы найдем ниже, а l_{12} — длина мировой линии между начальной 1 и конечной 2 мировыми точками.

Выведем явное выражение для длины мировой линии. Приближим мировую линию ломаной $\vec{z}(t) \rightarrow \{\vec{z}(t_q)\} \rightarrow \{\vec{z}_q\}$, $q = 1, \dots, N$. Длина этой ломаной равна $\tilde{l}_{12} = \sum_{q=1}^{N-1} \sqrt{(z_{q+1} - z_q)^\mu (z_{q+1} - z_q)_\mu}$. В пределе $N \rightarrow \infty$ и $|z_{q+1} - z_q| \rightarrow 0$ рассматриваемая ломанная стремится к мировой линии, а рассматриваемая сумма превращается в интеграл $l_{12} = \int_1^2 \sqrt{dz^\mu dz_\mu} = \int_1^2 ds$ вдоль мировой линии частицы между начальной и конечной мировой точкой. Это более или менее очевидный ответ. Замечу, что длина мировой линии частицы есть ни что иное как скорость света умноженная на собственное время прошедшее в СО сопутствующей этой частице между мировыми точками 1 и 2.

Таким образом, действие для свободной релятивистской частицы должно быть равно:

$$S[z^\mu(t)] = \alpha \int_1^2 ds = \alpha \int_1^2 \sqrt{dz^\mu dz_\mu} = \alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{z}^\mu \dot{z}_\mu} = \alpha c \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\dot{z}^2(t)}{c^2}}. \quad (26)$$

В нерелятивистском пределе скорость частицы мала $|\dot{z}(t)| \ll c$, $\forall t$, поэтому квадратный корень в выражении для действия можно разложить в ряд Тейлора:

$$S \approx \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\alpha c - \frac{\alpha \dot{z}^2(t)}{2c} \right].$$

Последнее действие сводится к вышеуказанному нерелятивистскому (с точностью до константы, не влияющей на уравнения движения), если $\alpha = -m c$.

В результате Лагранжиан для свободной релятивистской частицы равен:

$$L(z_\mu, \dot{z}_\mu) = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{z}^2(t)}{c^2}} = -m c \sqrt{\dot{z}^\mu \dot{z}_\mu}. \quad (27)$$

Подчеркну, что из-за наличия знака минус перед действием, оно принимает свое минимальное значение для траектории максимальной длины — прямой линии в ПВ. Действительно, интервал $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{x}^2}$ принимает максимальное значение для покоящейся частицы (или двигающейся с постоянной скоростью, как следует из принципа относительности).

Вероятно важным замечанием является то, что обсуждаемое действие (26) инвариантно относительно по крайней мере еще одной симметрии. А именно, в качестве параметризации мировой линии частицы мы можем взять любой другой параметр вместо координатного времени t (например, собственное время или время в любой другой системе отсчета):

$$S = -m c \int_1^2 \sqrt{dz^\mu dz_\mu} = -m c \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{z}^\mu \dot{z}_\mu} = -m c \int_{f_1}^{f_2} df \sqrt{\frac{dz_\mu}{df} \frac{dz^\mu}{df}}. \quad (28)$$

Единственное требование на замену t на другой параметр f — это то, что должно быть верно следующее условие: $df(t)/dt > 0$. То есть в новой параметризации порядок точек

вдоль мировой линии должен быть сохранен: если некоторая точка была позже другой в одной параметризации, то это должно быть верно и в новой параметризации.

Данное требование необходимо для того, чтобы было выполнено следующее условие $\sqrt{df^2} \equiv |df| = df$, которое необходимо для корректного извлечения квадратного корня при переходе от параметра t к f . Обсуждаемая симметрия называется репараметризационной инвариантностью. Как станет ясно из следующих лекций, все релятивистские действия для частиц, с которыми мы будем сталкиваться, инвариантны относительно этой симметрии. Действительно, очевидно, что законы движения частицы не должны зависеть от того, как мы запараметризовали ее мировую линию. Они могут зависеть только от того, как форма траектории определяется действующими на частицу силами.

5. Выведем уравнения движения для свободной релятивистской частицы из условия минимума действия. Сделаем это для общего вида действия $S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(z_\mu, \dot{z}_\mu)$ для релятивистской частицы с мировой линией $z^\mu(t)$, где $L(z_\mu, \dot{z}_\mu)$ — общего вида функция Лагранжа.

В этом случае мы варьируем мировую линию $z^\mu(t)$, а не траекторию $\vec{z}(t)$ с фиксированными концевыми мировыми точками $z^\mu(t_1) = x_1^\mu$ и $z^\mu(t_2) = x_2^\mu$. Тогда, разлагая Лагранжиан до линейного порядка по $\delta z^\mu(t)$, получаем:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt [L(z_\mu + \delta z_\mu, \dot{z}_\mu + \delta \dot{z}_\mu) - L(z_\mu, \dot{z}_\mu)] \Big|_{\text{linear in } \delta z} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial z_\mu} \Big|_{\dot{z}=\text{const}} \delta z_\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_\mu} \Big|_{z=\text{const}} \delta \dot{z}_\mu \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Интегрируя по частям второй член в последнем выражении, получаем:

$$0 = \delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_\mu} \delta z_\mu \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial z_\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_\mu} \right] \delta z_\mu$$

Первый вклад с правой стороны этого выражения тождественно равен нулю, т.к. $\delta z_\mu(t_1) = \delta z_\mu(t_2) = 0$. Поэтому, чтобы вся линейная вариация действия равнялась нулю при любом δz_μ , необходимо, чтобы выполнялось уравнение Лагранжа–Эйлера:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_\mu} = \frac{\partial L}{\partial z_\mu}. \quad (30)$$

В нашем случае $L(z_\mu, \dot{z}_\mu) = -m c \sqrt{\dot{z}^\mu \dot{z}_\mu}$. Поэтому:

$$\frac{\partial L}{\partial z_\mu} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_\mu} = -m c \frac{\dot{z}^\mu}{\sqrt{\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu}},$$

т.к. производная в первом из этих равенств берется по z_μ при постоянном \dot{z}_μ , как было указано выше в формуле (29).

Таким образом, уравнения движения для свободной релятивистской частицы имеют вид:

$$-m c \frac{d}{dt} \frac{\dot{z}^\mu}{\sqrt{\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu}} = -m c \frac{d}{dt} \frac{dz^\mu}{dt \sqrt{\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu}} = 0.$$

Вспоминая, что $dt\sqrt{\dot{z}^\mu\dot{z}_\mu} = ds$, и деля обе его стороны на $\sqrt{\dot{z}^\mu\dot{z}_\mu}$, это уравнение можно переписать в явно Лоренц инвариантном виде:

$$\frac{d}{ds} \frac{dz^\mu}{ds} \equiv w^\mu = 0. \quad (31)$$

Т.е., как и следовало ожидать, свободная релятивистская частица движется с нулевым 4-ускорением, т.е. с постоянной 4-скоростью. Иными словами — вдоль прямой линии в ПВ (с углом наклона к оси ct меньшим 45 градусов).

6. Действие для N взаимодействующих между собой частиц может иметь, например, такой вид:

$$S = - \sum_{q=1}^N m_q c \int dt \sqrt{\dot{z}_q^2(t)} + \sum_{q=1}^N \sum_{q'=1, q' \neq q}^N \int dt V [z_q - z_{q'}],$$

где $\dot{z}^2(t) \equiv \dot{z}^\mu(t)\dot{z}_\mu(t)$ и $V [z_q - z_{q'}]$ энергия взаимодействия между q -й и q' -й частицами. В нерелятивистском случае примером V может быть потенциальная энергия Кулона (или Ньютона):

$$V [\vec{z}_q - \vec{z}_{q'}] = \frac{e_q e_{q'}}{|\vec{z}_q - \vec{z}_{q'}|}.$$

К более подробному обсуждению того какими могут быть на самом деле взаимодействия мы перейдем в следующих лекциях. Для дальнейших рассуждений в этой лекции важно лишь то, что рассматриваемое действие не меняется при трансляциях, $S [\{z_q^\mu(t) + a^\mu\}] = S [\{z_q^\mu(t)\}]$, т.е. при переносе всей системы частиц на постоянный 4-вектор a^μ . Отражением этого факта является равенство $\sum_{q=1}^N \frac{\partial L}{\partial z_q^\mu} = 0$, которое можно получить, разлагая равенство

$$L [\{z_q^\mu(t) + a^\mu\}, \{\dot{z}_q^\mu(t)\}] = L [\{z_q^\mu(t)\}, \{\dot{z}_q^\mu(t)\}]$$

в ряд Тейлора до линейного порядка по a^μ . Легко показать, что для системы свободных частиц уравнения Лагранжа-Эйлера имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_q^\mu} = \frac{\partial L}{\partial z_q^\mu}.$$

В случае трансляционной инвариантности, когда $\sum_q \partial L / \partial z_q^\mu = 0$, из уравнений Лагранжа-Эйлера мы получаем:

$$\sum_{q=1}^N \frac{\partial L}{\partial z_q^\mu} = \frac{d}{dt} \sum_{q=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_q^\mu} = 0.$$

Последнее уравнение устанавливает закон сохранения суммарного 4-импульса системы частиц, т.к. для каждой отдельной частицы 4-импульс по определению равен:

$$p_\mu = - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\mu}. \quad (32)$$

Действительно, в случае приведенного выше Лагранжиана, получаем:

$$p_\mu = m c \frac{\partial \sqrt{\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu}}{\partial \dot{z}^\mu} = m c \frac{\dot{z}_\mu}{\sqrt{\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu}} = m c \frac{dz_\mu}{dt \sqrt{\dot{z}^\nu \dot{z}_\nu}} = m c \frac{dz_\mu}{ds} = m c u_\mu. \quad (33)$$

Используя выражение для компонент 4-скорости, выпишем компоненты ковариантного 4-импульса:

$$p^\mu = \left(\frac{m c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (34)$$

В нерелятивистском пределе $v \ll c$ нулевая компонента 4-импульса, умноженная на скорость света, сводится к:

$$p^0 c = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c^2 + \frac{m v^2}{2} + \dots$$

— сумме нерелятивистской кинетической энергии и энергии покоя $\mathcal{E}_0 = m c^2$. Т.е. нулевая компонента 4-импульса есть ни что иное, как релятивистская кинетическая энергия частицы, деленная на скорость света: \mathcal{E}/c . Пространственная часть 4-импульса в нерелятивистском пределе сводится к:

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathcal{E} \vec{v}}{c^2} = m \vec{v} + \dots,$$

т.е. к обычному трехмерному нерелятивистскому импульсу.

Таким образом, из трансляционной инвариантности Лагранжиана следует закон сохранения 4-импульса $p^\mu = (\mathcal{E}/c, \vec{p})$, или энергии и импульса. Это утверждение является частным случаем более общей теоремы Нетер, которая утверждает, что если действие для какой-нибудь системы инвариантно относительно какой-то симметрии, из этого следует закон сохранения какой-то величины. Наличие законов сохранения сильно упрощает решение динамических уравнений. В следующих лекциях мы выведем закон сохранения энергии-импульса для системы частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем.

Из 4-вектора импульса легко построить Лоренцевский инвариант — его скалярное произведение на самого себя (его норму):

$$p^\mu p_\mu = \frac{m^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^2.$$

Т.е. масса частицы является Лоренцевским инвариантом и не меняется при переходе из одной СО в другую. При этом энергия частицы меняется при смене СО как нулевая компонента 4-импульса.

В компонентах последнее равенство имеет знакомый вам вид:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (35)$$

7. Рассмотрим фотон — безмассовую частицу. Ее 4-импульс удовлетворяет соотношению $p_\mu p^\mu = m^2 c^2 = 0$. Для безмассовой частицы обычно используют волновой 4-вектор k_μ , вместо импульса $p_\mu = \hbar k_\mu$, где \hbar — постоянная Планка. При этом компоненты волнового 4-вектора имеют вид: $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$, где ω — частота фотона, а \vec{k} — пространственная часть волнового 4-вектора. В частности, при этом подразумевается, что энергия фотона равна $\mathcal{E} = \hbar\omega$. Итак, для фотона волновой 4-вектор удовлетворяет соотношению $k^\mu k_\mu = k_0^2 - \vec{k}^2 = 0$. Следовательно, $|\vec{k}| = k^0 = \omega/c$.

Теперь рассмотрим источник света,двигающийся с постоянной скоростью \vec{v} относительно нашей СО. В СО источника испускается фотон с волновым вектором \vec{k}_0 и соответствующей частотой ω_0 . Какова будет частота фотона $\omega = |\vec{k}|$ в нашей СО? Используя формулы для преобразования волнового 4-вектора при Лоренцевском бусте, получаем:

$$\frac{\omega_0}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{(\vec{v}, \vec{k})}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{v \omega \cos \theta}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

здесь θ — угол (в нашей СО) между направлением испускания электромагнитной волны и направлением движения источника. Из последнего уравнения следует формула для изменения частоты света от движущегося источника:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \quad (36)$$

— эффект Доплера.

8. Воспользуемся законом сохранения импульса, чтобы ответить на следующий вопрос: Может ли свободно двигающаяся частица с импульсом \vec{p} и массой M излучить частицу с импульсом \vec{q} и массой m и продолжить двигаться с импульсом \vec{k} , следующем из закона сохранения импульса?

Возведем закон сохранения 4-импульса $p_\mu = q_\mu + k_\mu$ в квадрат: $p^\mu p_\mu = (q + k)^\mu (q + k)_\mu$. Раскрывая скобки и воспользовавшись $p_\mu p^\mu = k_\mu k^\mu = M^2 c^2$ и $q_\mu q^\mu = m^2 c^2$, получаем:

$$0 = m^2 c^2 + 2 q_\mu k^\mu = m^2 c^2 + 2 \left(\frac{\mathcal{E}_k \mathcal{E}_q}{c^2} - \vec{k} \vec{q} \right).$$

Воспользовавшись $\vec{p} = \frac{\mathcal{E}_p}{c^2} \vec{v}_p$, выводим:

$$0 = m^2 c^2 + 2 \frac{\mathcal{E}_k \mathcal{E}_q}{c^2} \left(1 - \frac{\vec{v}_k \vec{v}_q}{c^2} \right).$$

Полученное равенство не может быть выполнено, т.к. правая сторона строго больше нуля даже, если $m = 0$, т.е. даже если излучаемая частица является, например, фотоном. Таким образом, рассматриваемый процесс не возможен. Как мы увидим в следующих лекциях, заряженная частица (скажем электрон) может излучать электромагнитные волны (фотоны), только если движется с ускорением, т.е. не свободно, а под действием внешней силы, совершение работы которой и необходимо для рождения фотонов.

9. Масса фотона равна нулю. А чему равна масса двух фотонов? Казалось бы тоже нулю, но не все так просто. Чтобы понять, что происходит, рассмотрим два фотона двигающихся с импульсами \vec{p}_1 и \vec{p}_2 . Тогда 4-импульсы этих фотонов равны $p_1^\mu = (|\vec{p}_1|, \vec{p}_1)$ и

$p_2^\mu = (|\vec{p}_2|, \vec{p}_2)$, так как $p_1^2 = 0$ и $p_2^2 = 0$. Найдем квадрат суммарного 4-импульса этих двух фотонов:

$$(p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 \cdot p_2 = 2 |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| [1 - \cos(\theta_{12})],$$

где θ_{12} — это угол между \vec{p}_1 и \vec{p}_2 . Очевидно, что полученная величина не равна нулю, если $\theta_{12} \neq 0$. Она называется эффективной массой и играет важную роль в релятивистской кинематике. Аналогичным образом можно определить эффективную массу произвольного набора из различных частиц.

Вопросы и задачи

- Вернемся опять к стандартному в СТО мысленному эксперименту, который мы обсуждали на первой лекции: Стационарный наблюдатель видит проходящий мимо него с постоянной релятивистской скоростью вагон. Посередине вагона стоит пассажир. Когда пассажир равняется со зрителем, он одновременно бросает в противоположных направлениях два камня с одинаковыми скоростями. Вместо камней могут быть те же лучи света, но для наглядности мы предпочитаем обсуждать камни. И в ИСО пассажира и в ИСО зрителя бросание камней одновременно. В ИСО пассажира оба камня одновременно отражаются от стенок вагона и одновременно возвращаются к пассажиру.

Однако в ИСО зрителя камень, брошенный по направлению движения вагона, достигнет его передней стенки позже, чем камень, брошенный против направления движения вагона, достигнет его задней стенки. Это очевидно, т.к. скорости сближения стенок и камней разные. Однако отраженные камни вернуться к пассажиру одновременно так же и в ИСО зрителя. Действительно после отражения камней от стенок их скорости сближения с пассажиром будут разные, но с противоположным знаком.

Таким образом, моменты отражения камней от стенок вагона, будучи одновременными в ИСО пассажира, не являются таковыми в ИСО зрителя. Но тогда мы имеем следующее кажущееся противоречие. А именно, в ИСО пассажира передача импульса от камней вагону происходит одновременно. Поэтому вагон движется монотонно — с постоянной скоростью. Но в ИСО зрителя передача импульса не будет одновременной. Поэтому вагон никак не может двигаться монотонно. Объясните это кажущееся противоречие.

- Найдите компоненты 4-вектора ускорения. Чему равен квадрат 4-ускорения?
- Найдите условие на экстремум для функции многих переменных (25).
- Подумайте, как должно выглядеть действие для безмассовой, $m = 0$, частицы? Например, для фотона.
- Вооружившись приобретенными на данный момент знаниями, попробуйте объяснить парадокс близнецов, который заключается в следующем. Пусть один из братьев близнецов, скажем, Ваня полетел на ближайшую звезду и вернулся обратно на землю,

где все время оставался другой близнец, — скажем, Вася. Какой из братьев окажется старше/младше, если с одной стороны в СО Васи двигался Ваня и происходило сокращение его собственного времени, а с другой стороны в СО Вани двигался Вася и наоборот должно было сокращаться его собственное время.

- Подумайте, каким должно быть действие для релятивистской струны — не точечного, а протяженного объекта. Это очень сложный вопрос для человека, впервые столкнувшегося с тензорным анализом и дифференциальной геометрией.
- Как будут выглядеть уравнения Лагранжа–Эйлера и начальные и конечные условия в случае, когда Лагранжиан зависит от ускорения: $S = \int dt L(z, \dot{z}, \ddot{z})$?
- Возможен ли обсуждаемый в секции 8 процесс, если и $M = 0$ и $m = 0$? Если да, то при каких условиях?

Лекция IV; Электромагнитное поле, калибровочные или градиентные преобразования, действие и уравнения движения релятивистской частицы в поле, тензор электромагнитного поля.

1. На прошлой лекции мы получили уравнения движения для свободной релятивистской частицы. Теперь мы хотим получить уравнения движения релятивистской частицы во внешнем электромагнитном (ЭМ) поле. Мы ожидаем, что уравнения движения будут иметь вид $m c w_\mu = F_\mu$, где w_μ — 4-ускорение, а F_μ — некоторый 4-вектор силы, т.е. 4-мерное обобщение обычной силы в механике Ньютона. Мы ожидаем, что 4-сила будет зависеть от внешнего ЭМ поля и, вообще говоря, может зависеть от характеристик мировой линии частицы.

Такое уравнение движения для частицы должно получаться из действия, имеющего вид $S = -m c \int_1^2 ds + \Delta S$, где ΔS — это дополнительный вклад за счет наличия внешнего поля. Именно этот вклад приводит к наличию 4-силы на правой стороне уравнений движения. ΔS — должно быть Лоренц-скаляром и зависеть от внешнего ЭМ поля и от мировой линии частицы.

Чтобы построить такое действие, следует понять, в каких терминах правильно описывать ЭМ поля. Для этого обратимся к уравнениям Максвелла, описывающим динамику этих полей, которые, по традиции, следуют из логически непротиворечивого описания следующих опытных фактов:

- Закон Кулона утверждает, что сила, с которой один заряд e_1 действует на другой e_2 , пропорциональна величинам этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними $|\vec{R}|$:

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{e_1 e_2}{|\vec{R}|^3} \vec{R} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1}.$$

В этой формуле я положил постоянную Кулона равной единице, переопределив величины зарядов. Эта форма записи закона Кулона не отражает конечности скорости распространения взаимодействия между зарядами: из нее следует, что если сместить заряд e_1 в новое положение, то заряд e_2 мгновенно это почувствует.

Правильный взгляд на вещи следует из понимания того факта, что между зарядами есть посредник — электрическое поле. Т.ч. скажем первый заряд создает поле $\vec{E}_1 = \frac{e_1}{|\vec{R}|^3} \vec{R}$, которое действует на второй заряд по закону $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = e_2 \vec{E}_1$. Или наоборот — второй заряд создает поле, которое действует на первый заряд.

Теперь смещение заряда в новое положение будет приводить к возмущению поля, которое будет распространяться с конечной скоростью, в соответствии с его динамическими уравнениями, до другого заряда. Ситуация очень похожа на тот процесс, который я описывал в первой лекции. Таким образом, казалось бы тавтологическая замена приводит к концептуально новому пониманию ситуации.

- Закон Био–Савара гласит, что сила, действующая на элемент тока $d\vec{l}_2$ силы J_2 со стороны элемента тока $d\vec{l}_1$ силы J_1 , равна

$$d\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{J_1 J_2}{c^2 |\vec{R}|^3} \left[d\vec{l}_2 \times \left[d\vec{l}_1 \times \vec{R} \right] \right] = -d\vec{f}_{2 \rightarrow 1},$$

где \vec{R} радиус-вектор от $d\vec{l}_1$ к $d\vec{l}_2$.

Аналогично закону Кулона, концептуально более правильный взгляд на этот закон следует из представления о том, что элемент тока $d\vec{l}_1$ создает магнитное поле

$$d\vec{B}_1 = \frac{J_1}{c} \left[d\vec{l}_1 \times \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} \right],$$

которое, в свою очередь, действует на второй элемент тока с силой:

$$d\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{J_2}{c} \left[d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_1 \right].$$

Или же наоборот — поле создает второй элемент тока, а оно уже действует на первый элемент тока.

- Принцип суперпозиции гласит, что электрическое поле от нескольких зарядов есть сумма электрических полей от каждого из них по отдельности. Аналогично магнитное поле от нескольких токов есть сумма магнитных полей от каждого из них по отдельности.
- Закон Гаусса гласит, что поток электрического поля через замкнутую поверхность S не зависит от ее формы, а просто равен полному заряду Q внутри области V_S ограниченной этой поверхностью:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \vec{E} d\vec{s} = Q.$$

Заряд Q , можно представить как $Q = \iiint_{V_S} \rho d^3V$, где ρ — плотность заряда. Применяя теорему Остроградского–Гаусса, получаем: $\iint_S \vec{E} d\vec{s} = \iiint_{V_S} (\vec{\nabla}, \vec{E}) d^3V = \iiint_{V_S} \operatorname{div} \vec{E} d^3V$. Поэтому рассматриваемое уравнение сводится к:

$$\iiint_{V_S} (\operatorname{div} \vec{E} - 4\pi\rho) d^3V = 0.$$

Т.к. последнее уравнение верно для любой 3-мерной области V_S , то оно может выполняться только, если

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho.$$

И мы получаем одно из уравнений Максвелла.

- В природе нет магнитных зарядов:

$$\iint_S \vec{B} d\vec{s} = 0$$

для любой замкнутой поверхности S в пространстве. Аналогично рассмотренному выше случаю, из этого уравнения следует, что

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

— еще одно из уравнений Максвелла.

- Закон электромагнитной индукции Фарадея гласит, что электродвижущая сила (или циркуляция электрического поля) по контуру C пропорциональна изменению потока магнитного поля через любую поверхность S_C , натянутую на контур C :

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_{S_C} \vec{B} d\vec{s}.$$

Преобразуя левую часть этого уравнения по теореме Стокса, получаем:

$$\iint_{S_C} \left(\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{s} = 0.$$

Т.к. это интегральное уравнение выполняется для любой поверхности S_C , то должно быть верно, что:

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

— очередное уравнение Максвелла.

- И наконец из эксперимента следует, что циркуляция магнитного поля по замкнутому контуру C пропорциональна сумме силы тока, протекающей через любую площадку S_C , натянутую на контур C , и скорости изменения потока электрического поля через ту же площадку:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \iint_{S_C} \vec{j} d\vec{s} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_{S_C} \vec{E} d\vec{s},$$

где \vec{j} — плотность электрического тока. Воспользовавшись теоремой Стокса с левой стороны этого равенства, получаем:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

— последнее из уравнений Максвелла.

2. Два из приведенных выше уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (37)$$

называются второй парой уравнений Максвелла и определяют то, как выглядят ЭМ поля, создаваемые той или иной конфигурацией токов и зарядов. Мы будем подробно обсуждать эти уравнения в следующих лекциях.

Сейчас же мы обратимся к другой — первой паре уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (38)$$

Эти уравнения не зависят от внешних источников — зарядов и токов. Т.е. они просто определяют то как ЭМ поля связаны между собой. Поэтому можно надеяться, что найдется такое представление для ЭМ полей, что рассматриваемые уравнения будут выполняться тождественно. Действительно, если

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (39)$$

для любого дифференцируемого векторного поля $\vec{A}(t, \vec{x})$, то первое из рассматриваемых здесь уравнений выполняется тождественно, т.к. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$. При этом второе из рассматриваемых уравнений принимает вид:

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Полученное уравнение выполняется тождественно, если:

$$\begin{aligned} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\operatorname{grad} \varphi \implies \\ \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \end{aligned} \quad (40)$$

для любого дифференцируемого поля $\varphi(t, \vec{x})$, т.к. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \equiv 0$. Поля φ и \vec{A} называются ЭМ потенциалами. Их вид, с точностью до некоторых преобразований, фиксируется второй парой уравнений Максвелла, как мы увидим на следующих лекциях.

Замечу, что, если сделать замену

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \operatorname{grad} \alpha \\ \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \end{aligned} \quad (41)$$

для любой дифференцируемой функции $\alpha(t, \vec{x})$, то построенные ЭМ поля \vec{E} и \vec{B} по новым потенциалам \vec{A}' и φ' не будут отличаться от ЭМ полей, построенных по старым потенциалам \vec{A} и φ . Это очень важное свойство представления ЭМ полей через потенциалы называется калибровочной или градиентной инвариантностью. Она лежит в основе современных представлений о фундаментальных свойствах природы. В следующих лекциях мы увидим важные следствия, вытекающие из этой инвариантности.

Итак, ЭМ поля \vec{E} и \vec{B} можно выразить с точностью до калибровочного преобразования (41), через потенциалы φ и \vec{A} . Как мы увидим в следующих лекциях, если объединить потенциалы φ и \vec{A} в одно 4-векторное поле $A^\mu \equiv (\varphi, \vec{A})$ (тогда $A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$), то уравнения Максвелла приобретают явно Лоренц ковариантный вид. Т.е., несмотря на то, что Максвелл ничего не знал о СТО, он написал уравнения, которые релятивистски инвариантны. И это не случайно, т.к. уравнения Максвелла в том числе описывают электромагнитные волны, распространяющиеся с релятивистской скоростью.

Поле $A^\mu(t, \vec{x})$ называется 4-вектор потенциалом ЭМ поля. Ясно, что называя эту величину 4-вектором, мы подразумеваем, что при замене одной ИСО на другую (при преобразовании Лоренца) потенциалы $A^0 \equiv \varphi$ и \vec{A} преобразуются как соответствующие компоненты 4-вектора, т.е. так же как и компоненты, скажем, x^μ .

Для 4-вектор потенциала калибровочные преобразования принимают вид: $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha$.

3. Как мы увидим в следующих лекциях, при выводе уравнений Максвелла из принципа наименьшего действия именно 4-вектор потенциал A_μ , а не ЭМ поля \vec{E} и \vec{B} , играет роль обобщенной координаты в теории ЭМ полей. Поэтому наша задача, поставленная в начале этой лекции, сводится к правильному описанию взаимодействия заряженной релятивистской частицы именно с 4-вектор потенциалом.

Чтобы получить вышеуказанный дополнительный вклад ΔS в действие, мы должны построить релятивистский инвариант из мировой линии частицы $z_\mu(t)$ и 4-вектор потенциала $A_\mu(x)$. Простейший релятивистский инвариант, который можно построить из этих величин, имеет следующий вид:

$$\int_1^2 A_\mu[z] dz^\mu = \int_1^2 A_\mu[z(s)] \frac{dz^\mu}{ds} ds = \int_1^2 A_\mu[z(s)] u^\mu ds,$$

где интеграл взят вдоль мировой линии частицы.

Таким образом, полное действие для заряженной релятивистской частицы во внешнем поле должно выглядеть как:

$$S = -mc \int ds + \kappa \int_1^2 A_\mu[z(s)] u^\mu ds,$$

где κ — это некоторая константа. Подчеркну, что при калибровочном преобразовании $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha$ рассматриваемое здесь действие сдвигается на константу, т.к.

$$\int_1^2 A'_\mu dz^\mu = \int_1^2 (A_\mu - \partial_\mu \alpha) dz^\mu = \int_1^2 A_\mu dz^\mu - \alpha(2) + \alpha(1),$$

где $\alpha(1)$ и $\alpha(2)$ — значения функции $\alpha(t, \vec{x})$ в начальной и в конечной мировых точках мировой линии, соответственно. Таким образом, рассматриваемое нами действие должно привести к калибровочно инвариантным уравнениям движения, т.к. при сдвиге действия на константу, положение его минимума не меняется, а потому не меняются и уравнения движения.

Заметим также, что компонента действия $\int_1^2 A_\mu[z(s)] u^\mu ds$ инвариантна относительно упомянутых в предыдущей лекции репараметризаций мировой линии частицы.

Ниже мы увидим, что если $\kappa = -e/c$, где e — электрический заряд частицы, то рассматриваемое действие правильно воспроизводит силу Лоренца — экспериментально на-

блюдаемую величину. Итак, если подставить $z^\mu(t) = (ct, \vec{z}(t))$, то действие представляется в форме:

$$S = - \int_1^2 \left(mc + \frac{e}{c} A_\mu[z(s)] u^\mu \right) ds = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{z}}^2(t)}{c^2}} - e\varphi[t, \vec{z}(t)] + \frac{e}{c} \vec{A}[t, \vec{z}(t)] \dot{\vec{z}}(t) \right) dt. \quad (42)$$

Здесь для полноты я выписал явно все аргументы всех функций в подинтегральном выражении. Далее я, как правило, этого делать не буду.

В результате Лагранжиан релятивистской частицы во внешнем поле равен:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{z}}^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c} (\vec{A}, \dot{\vec{z}}) \quad (43)$$

4. Итак, мы хотим вывести уравнения движения релятивистской частицы во внешнем поле из минимума действия:

$$S = - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(mc \sqrt{\dot{z}^2} + \frac{e}{c} A_\mu(z) \dot{z}^\mu \right),$$

где для краткости введено обозначение $\dot{z}^2 \equiv \dot{z}_\mu \dot{z}^\mu$. Воспользуемся уравнением Лагранжа-Эйлера для Лагранжиана общего вида $L(z_\mu, \dot{z}_\mu)$, которое мы вывели на прошлой лекции. В нашем случае:

$$\frac{\partial L}{\partial z^\mu} = -\frac{e}{c} \left(\partial_\mu A_\nu[z(t)] \right) \dot{z}^\nu \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\mu} = \frac{d}{dt} \left(-mc \frac{\dot{z}_\mu}{\sqrt{\dot{z}^2}} - \frac{e}{c} A_\mu[z(t)] \right).$$

В первой формуле мы обозначили $\partial_\mu A_\nu \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial z^\mu}$. Замечая, что по правилу дифференцирования сложной функции многих переменных:

$$\frac{d}{dt} A_\mu[z(t)] = \frac{\partial A_\mu}{\partial z^\nu} \frac{dz^\nu}{dt},$$

получаем следующее уравнение Лагранжа-Эйлера:

$$-\frac{e}{c} (\partial_\mu A_\nu) \dot{z}^\nu = -mc \frac{d}{dt} \frac{\dot{z}_\mu}{\sqrt{\dot{z}^2}} - \frac{e}{c} (\partial_\nu A_\mu) \dot{z}^\nu,$$

которое элементарно преобразуется в:

$$mc \frac{d}{dt} \frac{dz_\mu}{dt \sqrt{\dot{z}^2}} = \frac{e}{c} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \frac{dz^\nu}{dt}.$$

Вводя обозначение $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}$, вспоминая, что $dt\sqrt{\dot{z}^2} = ds$ и разделив обе части этого уравнения на $\sqrt{\dot{z}^2}$, мы получаем уравнение движения релятивистской частицы во внешнем ЭМ поле:

$$m c \frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu. \quad (44)$$

Теперь видно, что полученное нами уравнение явно Лоренц ковариатно, то есть удовлетворяет принципу относительности. А также это уравнение и явно калибровочно инвариантно: как мы сейчас увидим, тензор $F_{\mu\nu}$ инвариантен относительно калибровочных преобразований.

5. Введенный нами антисимметричный при перестановке индексов 4-мерный 2-тензор $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ называется тензором ЭМ поля. Заметим, что этот тензор не меняется при калибровочном преобразовании $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha$. Действительно:

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu (A_\nu - \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu (A_\mu - \partial_\mu \alpha) = \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \alpha = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \equiv F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Поэтому естественно ожидать, что компоненты этого тензора должны выражаться через ЭМ поля \vec{E} и \vec{B} . Действительно, в силу антисимметрии тензора ЭМ поля имеем, что его диагональные компоненты равны нулю:

$$F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0,$$

т.к. $F_{00} = -F_{00}$ и т.д.. Далее, т.к. $A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$, то

$$F_{0i} = -F_{i0} = -\partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\frac{\partial A_i}{c \partial t} - \partial_i \varphi = E_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где E_i — три компоненты вектора \vec{E} . И наконец:

$$F_{12} = -F_{21} = -\partial_1 A_2 + \partial_2 A_1 = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -(\text{rot } A)_3 = -B_3.$$

Аналогично можно показать, что $F_{13} = -F_{31} = B_2$ и $F_{23} = -F_{32} = -B_1$. Используя 3-мерный абсолютно антисимметричный тензор ϵ_{ijk} , который мы ввели на второй лекции, последние три равенства можно переписать в удобной форме:

$$F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k \Rightarrow B_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{kij} F_{ij}.$$

Таким образом, тензор ЭМ поля можно записать в виде квадратной 4×4 матрицы вида:

$$\|F^{\mu\nu}\| = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

6. Разобрав компоненты тензора ЭМ поля, запишем покомпонентно уравнения движения релятивистской частицы во внешнем поле. Нулевая компонента уравнения (44) имеет вид:

$$m c \frac{du^0}{dt} = \frac{e}{c} F^{0i} \frac{dz_i}{dt}.$$

Чтобы получить это уравнение, мы подняли индексы в уравнении (44), вспомнили, что $F^{00} = 0$ и умножили левую и правую части уравнения (44) на ds/dt , тем самым заменив du^μ/ds на du^μ/dt , а $u_\nu = dz_\nu/ds$ на dz_ν/dt . Теперь, т.к. $m c u^0 = p^0 = \mathcal{E}_{kin}/c$ — кинетическая энергия частицы деленная на скорость света, $F^{0i} = -E_i$ и $dz_i/dt = -v_i$, мы получаем уравнение:

$$\frac{d\mathcal{E}_{kin}}{dt} = e \left(\vec{E}, \vec{v} \right), \quad (46)$$

которое утверждает, что кинетическая энергия частицы растет за счет работы, совершаемой электрическим полем \vec{E} .

Пространственные компоненты рассматриваемого 4-мерного уравнения имеют вид:

$$m c \frac{du^i}{dt} = \frac{e}{c} F^{i\nu} \frac{dz_\nu}{dt} \equiv \frac{e}{c} \left(F^{i0} \frac{dz_0}{dt} + F^{ij} \frac{dz_j}{dt} \right).$$

Вспоминая, что $m c u^i = p^i$, $dz_0/dt = c$ и выражая компоненты тензора F^{0i} и F^{ij} через компоненты ЭМ полей B_i и E_i , получаем уравнение:

$$\frac{dp_i}{dt} = e E_i + \frac{e}{c} \epsilon_{ijk} v_j B_k,$$

которое в векторной форме имеет вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \quad (47)$$

и утверждает, что 3-мерный импульс частицы меняется под действием силы Лоренца. Подчеркну, что магнитное поле присутствует в силе Лоренца, но не совершает работу по увеличению энергии частицы, т.к. создает силу перпендикулярную скорости частицы.

7. Найдем теперь импульс, следующий из Лагранжиана для релятивистской частицы во внешнем ЭМ поле:

$$P_\mu \equiv -\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^\mu} = m c \frac{dz_\mu}{dt \sqrt{\dot{z}^2}} + \frac{e}{c} A_\mu = m c \frac{dz_\mu}{ds} + \frac{e}{c} A_\mu = m c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu = p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu. \quad (48)$$

Полученная величина называется обобщенным 4-импульсом в отличие от кинематического 4-импульса — $p_\mu \equiv m c u_\mu$.

Рассмотрим компоненты обобщенного 4-импульса:

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

— обобщенный 3-мерный импульс. Далее:

$$P^0 = \frac{m c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \varphi.$$

Т.е. полная энергия релятивистской частицы во внешнем поле есть сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$H = \mathcal{E}_{kin} + e \varphi.$$

Иными словами φ играет роль потенциальной энергии частицы в ЭМ поле.

Из определения \vec{p} и \mathcal{E}_{kin} следует, что $\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A}$ и $H - e \varphi$ удовлетворяют соотношению:

$$\left(\frac{H - e \varphi}{c} \right)^2 = m^2 c^2 + \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2.$$

Следовательно функция Гамильтона (или Гамильтониан) для релятивистской частицы равна:

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2} + e \varphi \quad (49)$$

В нерелятивистском пределе, когда $v \ll c$, Гамильтониан и Лагранжиан для частицы сводятся к:

$$\begin{aligned} H &\approx m c^2 + \frac{\left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2}{2 m} + e \varphi, \\ L &\approx \frac{m v^2}{2} + \frac{e}{c} \left(\vec{A}, \vec{v} \right) - e \varphi. \end{aligned} \quad (50)$$

Последнее выражение получено из (43), где $\vec{v} = \dot{\vec{z}}$. Далее, т.к. энергия определена с точностью до константы, то в первой формуле можно отбросить энергию покоя $m c^2$.

8. В качестве поясняющего упражнения/замечания обсудим взаимодействие частицы со скалярным полем ϕ . Простейшее действие, которое инвариантно относительно преобразований Лоренца и репараметризаций и, при этом, описывает взаимодействия частицы с внешним скалярным полем, имеет следующий вид:

$$S = - \int_1^2 \left\{ m c + q \phi [z(s)] \right\} ds, \quad (51)$$

где q — константа, определяющая силу взаимодействия частицы с обсуждаемым полем, то есть заряд частицы по полю. Фактически наличие взаимодействия частицы со скалярным полем приводит к тому, что эффективно ее масса становится зависящей от положения: $M = m + \frac{q}{c} \phi(x)$.

При вариации этого действия получаются следующие уравнения движения:

$$(m c + q \phi) \ddot{z}_\mu = q (\partial_\mu \phi - \partial_\nu \phi \dot{z}^\nu \dot{z}_\mu) \quad (52)$$

Здесь точка над z_μ означает дифференцирование по собственному времени.

Видно, что меру инерции с левой стороны этого уравнения определяет величина M . С правой стороны уравнения мы имеем два вклада в 4-силу. Первый вклад показывает, что положительный 4-градиент поля разгоняет, а отрицательный — замедляет рассматриваемую частицу. Вторым вкладом можно назвать "силой Циолковского". Действительно из-за того, что масса частицы меняется (может уменьшаться или увеличиваться в зависимости от знака градиента поля вдоль 4-скорости), мы получаем "реактивный" вклад в силу.

Воспользовавшись тем, что $\dot{z}_\mu = u_\mu$ и $u_\mu u^\mu = 1$, мы можем переписать обсуждаемое уравнение движение частицы в следующем виде:

$$(mc + q\phi) w_\mu = q (u_\nu \partial_\mu \phi - \partial_\nu \phi u_\mu) u^\nu \quad (53)$$

То есть и для скалярного поля можно ввести нечто аналогичное тензору электромагнитного поля: $\Phi_{\mu\nu} \equiv u_\nu \partial_\mu \phi - \partial_\nu \phi u_\mu$. Только в этом случае он зависит от 4-скорости частицы.

Вопросы и задачи

- Подумайте какой вид должно иметь действие для релятивистской частицы, описывающее ее взаимодействие со скалярным полем $\phi(t, \vec{x})$, а не с векторным полем $A_\mu(t, \vec{x})$? Предложите другие, менее простые, варианты действий, которые инвариантны относительно преобразований Лоренца и репараметризаций.
- Получите уравнение (52) из действия (51).

Лекция V; Инварианты поля, движение частицы во внешних постоянных, однородных и неоднородных полях, дрейф частиц.

1. Найдем как изменяются ЭМ поля \vec{E} и \vec{B} при бустах Лоренца. Несмотря на то, что эти величины преобразуются как 3-векторы при вращениях в пространстве, при Лоренцевских бустах в ПВ они не преобразуются как 3-мерные компоненты каких-то 4-векторов. Напомню, что \vec{E} и \vec{B} являются компонентами 4-мерного 2-тензора $F_{\mu\nu}$. Это и определяет то, как эти поля преобразуются при Лоренцевских бустах. А именно:

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\beta} (\Lambda^T)^{\beta}_{\nu},$$

где $\hat{\Lambda}$ — матрица буста Лоренца, которая нам знакома из предыдущих лекций. Подставляя явно в последнее уравнение компоненты тензоров $F_{\mu\nu}$ и Λ_{α}^{μ} , получаем следующий закон преобразования полей при бусте Лоренца (в положительном направлении оси x):

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, \\ E'_y &= \gamma (E_y - \beta B_z), \\ E'_z &= \gamma (E_z + \beta B_y), \\ B'_x &= B_x, \\ B'_y &= \gamma (B_y + \beta E_z), \\ B'_z &= \gamma (B_z - \beta E_y). \end{aligned} \tag{54}$$

Видно, что в отличие от тензоров $\eta_{\mu\nu}$, δ_{μ}^{ν} и $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ тензор $F_{\mu\nu}$ не инвариантен относительно преобразований Лоренца.

Напомню, что ЭМ потенциалы φ и \vec{A} преобразуются именно как компоненты 4-вектора $A^{\mu} = (\varphi, \vec{A})$.

2. Построим из тензора $F_{\mu\nu}$ Лоренцевские инварианты ЭМ поля. Простейший очевидный инвариант F_{μ}^{μ} тривиален, т.к. равен нулю. Проверьте это. Следующий инвариант имеет такой вид:

$$I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}.$$

Очевидно эта величина не зависит от СО (т.е. инвариантна), т.к. все индексы у нее свернуты правильным образом.

Распишем этот инвариант через \vec{E} и \vec{B} :

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij} = 2\vec{E} \cdot (-\vec{E}) + (-\epsilon_{ijk} B_k) (-\epsilon_{ijl} B_l) = -2 (\vec{E}^2 - \vec{B}^2).$$

Таким образом:

$$I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2 (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \tag{55}$$

— первый инвариант ЭМ поля.

С использованием 4-мерного абсолютно антисимметричного тензора $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ можно построить второй инвариант ЭМ поля:

$$I_2 = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \equiv F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}.$$

В этой формуле мы ввели определение дуального тензора ЭМ поля:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta}. \quad (56)$$

Распишем второй инвариант через \vec{E} и \vec{B} :

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = F_{0i} \epsilon^{0ijk} F_{jk} + F_{ij} \epsilon^{ij0k} F_{0k} = 2F_{0i} \epsilon^{0ijk} F_{jk} = 2E_i \epsilon_{ijk} (-\epsilon_{jkl} B_l) = -4 \left(\vec{E}, \vec{B} \right),$$

т.к. $\epsilon^{0ijk} = \epsilon^{ijk} = \epsilon_{ijk}$. Таким образом:

$$I_2 = F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -4 \left(\vec{E}, \vec{B} \right). \quad (57)$$

Казалось бы можно построить еще один инвариант квадратичный по $F_{\mu\nu}$: $I_3 = \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$. Но легко показать, что эта величина выражается через первый инвариант: $\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -2 I_1$.

3. Воспользуемся теперь приобретенными знаниями, чтобы определить как будет двигаться частица в заданных ЭМ полях. Для начала рассмотрим случай постоянных и однородных полей \vec{E} и \vec{B} (т.е. не зависящих ни от времени, ни от пространственных координат), которые перпендикулярны друг другу $\vec{E} \perp \vec{B}$.

В рассматриваемом случае $I_2 \equiv -4 \left(\vec{E}, \vec{B} \right) = 0$ и описание движения частицы зависит от того, каково значение I_1 . Если $I_1 \equiv -2 \left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right) > 0$, то $|\vec{B}| > |\vec{E}|$. Покажем, что в этом случае можно выбрать ИСО, где $\vec{E}' = 0$. Выберем в пространстве координатную сетку так, чтобы \vec{E} и \vec{B} имели вид:

$$\vec{E} = (0, E, 0), \quad \vec{B} = (0, 0, B), \quad B > E.$$

В результате буста вдоль оси x поля переходят в:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x = 0, \\ E'_y &= \gamma (E_y - \beta B_z) = \gamma (E - \beta B), \\ E'_z &= \gamma (E_z + \beta B_y) = 0, \\ B'_x &= B_x = 0, \\ B'_y &= \gamma (B_y + \beta E_z) = 0, \\ B'_z &= \gamma (B_z - \beta E_y) = \gamma (B - \beta E). \end{aligned} \quad (58)$$

Теперь видно, что если подобрать $\beta = E/B < 1$, то электрическое поле равно нулю $\vec{E}' = 0$, а модуль магнитного поля выражается через первый инвариант поля

$$B'_z = \gamma \left(B - \frac{E}{B} E \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{E}{B}\right)^2}} \left(B - \frac{E^2}{B} \right) = \sqrt{B^2 - E^2}.$$

Т.е. в новой ИСО задача сводится к движению частицы в постоянном магнитном поле при нулевом электрическом поле.

Отбросив в новой ИСО штрихи у полей, мы получаем следующие уравнения движения релятивистской частицы:

$$\frac{d\mathcal{E}_{kin}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}].$$

Т.к. $\vec{p} = \mathcal{E}_{kin} \vec{v}/c^2$, то:

$$\frac{\mathcal{E}_{kin}}{c^2} \dot{\vec{v}} = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}].$$

Если магнитное поле направлено вдоль оси z , то в компонентах последнее уравнение выглядит как:

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0,$$

где $\omega = e c B / \mathcal{E}_{kin}$ — релятивистское обобщение частоты Лармора — $e B / m c$. Полученные два уравнения в плоскости xy можно записать как одно комплексное уравнение:

$$\frac{d}{dt} (v_x + i v_y) = -i \omega (v_x + i v_y),$$

решение которого имеет вид:

$$v_x + i v_y = v_{\perp} e^{-i(\omega t + \alpha)},$$

где v_{\perp} и α — модуль скорости в плоскости xy перпендикулярной магнитному полю и начальная фаза, соответственно. Таким образом, легко получить явные выражения для Re и Im частей этой формулы, т.е. для компонент скорости. Проинтегрировав полученные значения компонент скорости, получим следующее выражение для траектории частицы:

$$x(t) = x_0 + R \sin(\omega t + \alpha), \quad y(t) = y_0 + R \cos(\omega t + \alpha), \quad z(t) = z_0 + v_{\parallel} t.$$

В этих уравнениях $R = v_{\perp} / \omega = v_{\perp} \mathcal{E}_{kin} / e c B$, v_{\parallel} — компонента скорости частицы вдоль магнитного поля, а (x_0, y_0, z_0) — начальное положение частицы. Таким образом, в постоянном магнитном поле частица движется по спирали радиуса R . Если перейти в исходную ИСО, где электрическое поле не равно нулю, то мы получим, что центр спирали будет дрейфовать со скоростью $\vec{v}_{dr} = [\vec{E} \times \vec{B}] c / B^2$ перпендикулярной \vec{E} и \vec{B} . (Смотрите рассуждения после формулы (58).) Конечно же при этом следует аккуратно преобразовать все векторы при переходе из одной ИСО в другую.

Подчеркну, что частица, совершающая ускоренное (в нашем случае вращательное движение), излучает ЭМ волны, как мы увидим в следующих лекциях. Но при решении вышеуказанной задачи мы пренебрегли этим фактом. Мы вообще пренебрегли полями, создаваемыми самой частицей, считая их намного меньшими чем внешние \vec{E} и \vec{B} . И вообще для всеобщности следует осознавать, что в этой лекции мы везде делаем такое пренебрежение.

4. Аналогично можно рассмотреть случай, когда $I_2 = 0$, а $I_1 < 0$, т.е. $|\vec{E}| > |\vec{B}|$. В этом случае можно выбрать такую ИСО, где $\vec{B}' = 0$, а модуль электрического поля выражается через величину первого инварианта. Т.е. задача сводится к поиску траектории частицы во внешнем постоянном электрическом поле. Выберем координатную сетку в пространстве так, чтобы движение происходило в плоскости xy . Тогда уравнения движения частицы будут иметь вид:

$$\dot{p}_x = e E, \quad \dot{p}_y = 0, \quad \frac{d\mathcal{E}_{kin}}{dt} = e E v_x,$$

где \mathcal{E}_{kin} — нулевая компонента кинематического 4-импульса.

Решая первые два из выписанных уравнений, получаем:

$$p_x = e E t, \quad p_y = p_0$$

при нулевом начальном импульсе вдоль оси x . Тогда из свойств кинематического 4-импульса получаем:

$$\mathcal{E}_{kin} = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + (c e E t)^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2},$$

где \mathcal{E}_0 — энергия частицы в начальный момент времени $t = 0$. Т.к. скорость частицы по определению равна $\vec{v} = \vec{p} c^2 / \mathcal{E}_{kin}$, то

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}_{kin}} = \frac{c^2 e E t}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2}}.$$

Замечу, что из этой формулы следует, что скорость частицы $v_x = dx/dt$ всегда меньше, чем скорость света как долго бы мы не ускоряли ее. Действительно $dx/dt \approx c$ только асимптотически при $t \rightarrow \infty$ — бесконечно долгом ускорении. При этом, если $p_0 \ll m c$ и в самом начале процесса ускорения, когда $e E t \ll m c$, квадратный корень в знаменателе формулы для v_x можно разложить. Тогда мы получаем формулу для обычного нерелятивистского ускорения $v_x = \frac{e E t}{m}$.

Интегрируя выражение для $v_x(t)$ по t , получаем:

$$x(t) = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2}}{e E} - \frac{\mathcal{E}_0}{e E}$$

при нулевом начальном значении $x(t)$. Для $y(t)$ имеем:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}_{kin}} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2}}.$$

Интегрируя по t , получаем:

$$y(t) = \frac{p_0 c}{e E} \operatorname{arcsch} \left(\frac{c e E t}{\mathcal{E}_0} \right).$$

Случай когда $I_2 = I_1 = 0$ можно найти в задачах к соответствующим параграфам в книге Ландау и Лифшица.

5. Теперь рассмотрим случай постоянных и однородных скрещенных ЭМ полей \vec{E} и \vec{B} произвольной ориентации, т.е. не обязательно перпендикулярных друг другу. Будем

решать эту задачу в нерелятивистском пределе, т.е. когда $v(t) \ll c, \forall t$. Тогда $\vec{p} \approx m\vec{v}$. Пусть поле \vec{B} направлено вдоль оси z , а плоскость, проходящая через \vec{E} и \vec{B} , совпадает с yz . Тогда уравнения движения частицы

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}]$$

запишутся в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c} \dot{y} B, \\ m\ddot{y} &= e E_y - \frac{e}{c} \dot{x} B, \\ m\ddot{z} &= e E_z. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения очевидно следует $z(t) = \frac{e E_z t^2}{2m} + v_{0z} t$ — обычное равноускоренное движение. Первые два уравнения в этой системе можно записать как одно комплексное:

$$\frac{d}{dt} (\dot{x} + i\dot{y}) + i\omega (\dot{x} + i\dot{y}) = i \frac{e}{m} E_y,$$

где $\omega = eB/mc$ — частота Лармора. Решение полученного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения $a e^{-i\omega t}$, с амплитудой a следующей из начальных условий, и частного решения неоднородного уравнения. В качестве последнего мы выберем $i(\dot{x} + i\dot{y})_{par} = e E_y/m\omega = e E_y/B$. Т.е. общее решение рассматриваемого комплексного уравнения есть:

$$\dot{x} + i\dot{y} = a e^{-i\omega t} + \frac{c E_y}{B}.$$

Выберем начальные условия такими, чтобы a была действительной. Тогда:

$$\dot{x} = a \cos \omega t + \frac{c E_y}{B}, \quad \dot{y} = -a \sin \omega t.$$

Полученные компоненты скорости частицы являются периодическими функциями. Их средние по времени значения равны:

$$\bar{\dot{x}} = \frac{c E_y}{B}, \quad \bar{\dot{y}} = 0,$$

и определяют среднюю скорость движения заряда в скрещенных ЭМ полях — скорость электрического дрейфа. Ее направление перпендикулярно обоим полям и не зависит от знака заряда. В векторном виде ее можно записать как $\vec{v}_{dr} = c [\vec{E} \times \vec{B}] / B^2$.

Все три рассмотренные в этой лекции задачи более подробно обсуждаются в книге Ландау и Лифшица.

6. Рассмотрим теперь движение частицы в слабонеоднородном постоянном магнитном поле. Т.е. в таком поле, которое не меняется во времени, а характерное расстояние L , на котором поле B меняется в пространстве существенным образом, намного больше, чем характерный радиус вращения частицы, который был бы в приближении, если неоднородностью поля можно было бы пренебречь:

$$L \gg \frac{u_{\perp}}{\omega},$$

где $\omega = ceB/\mathcal{E}$, а u_{\perp} — скорость вращения частицы в плоскости перпендикулярной \vec{B} в приближении, когда неоднородностью поля можно пренебречь.

Представим радиус-вектор частицы как $\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_{\perp}(t)$, где $\vec{R}(t)$ — радиус-вектор ведущего центра (медленно меняющаяся функция), а $\vec{r}_{\perp}(t)$ — радиус вращения вокруг ведущего центра (быстро меняющаяся величина). А именно, мы считаем, что в приближении когда можно пренебречь неоднородностью поля $\vec{r}(t) = \vec{r}_{\perp}(t)$, т.е. в этом приближении происходит только быстрое вращение со скоростью $\vec{u}_{\perp} = \dot{\vec{r}}_{\perp}$ и нет движения вдоль поля.

В произвольном неоднородном магнитном поле уравнение движения частицы имеет вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} \left[\vec{v} \times \vec{B} \left(\vec{R} + \vec{r}_{\perp} \right) \right].$$

Разложим магнитное поле в ряд Тейлора по степеням \vec{r}_{\perp} :

$$\vec{B} \left(\vec{R} + \vec{r}_{\perp} \right) = \vec{B}(R) + \left(\vec{r}_{\perp}, \vec{\nabla} \right) \vec{B}(R).$$

Мы будем работать в первом порядке по неоднородности. Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} \left[\vec{v} \times \vec{B}(R) \right] + \frac{e}{c} \left[\vec{v} \times \left(\vec{r}_{\perp}, \vec{\nabla} \right) \vec{B}(R) \right].$$

Разложим скорость на $\vec{v} = \vec{u}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, где как и выше $\vec{u}_{\perp} = \dot{\vec{r}}_{\perp}$, а $\dot{\vec{R}} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, при этом $\vec{v}_{\parallel} \parallel \vec{B}$, а $\vec{v}_{\perp} \perp \vec{B}$ — скорости дрейфа ведущего центра вдоль поля и в направлении перпендикулярном ему, соответственно. Как мы договорились выше, \vec{u}_{\perp} и \vec{r}_{\perp} описывают движение частицы в нулевом приближении, т.е. когда неоднородностью поля можно пренебречь:

$$m\gamma \frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt} = \frac{e}{c} \left[\vec{u}_{\perp} \times \vec{B}(R) \right].$$

В последней формуле мы воспользовались тем фактом, что в магнитном поле $\gamma = \text{const}$.

Таким образом, воспользовавшись последним уравнением и разложением скорости на составляющие, мы получаем:

$$m\gamma \frac{d}{dt} (\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) = \frac{e}{c} \left[\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \right] + \frac{e}{c} \left[(\vec{u}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) \times \left(\vec{r}_{\perp}, \vec{\nabla} \right) \vec{B} \right],$$

где также использован тот факт, что $[\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}] = 0$.

Чтобы найти скорость дрейфа, удобно усреднить по быстрому вращению по маленьким круговым орбитам, определяемым большой постоянной составляющей поля \vec{B} . Т.е. мы хотим усреднить функции от $\vec{r}_{\perp}(t)$ по периоду вращения с Ларморовской частотой. Линейные по \vec{r}_{\perp} члены при усреднении дают ноль. Поэтому мы получаем:

$$m\gamma \frac{d(\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp})}{dt} = \frac{e}{c} \left[\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \right] + \frac{e}{c} \left[\dot{\vec{r}}_{\perp} \times \left(\vec{r}_{\perp}, \vec{\nabla} \right) \vec{B} \right].$$

Используя уравнение на \vec{r}_\perp и $\dot{\vec{r}}_\perp$, $\dot{\vec{r}}_\perp = \omega \left[\vec{r}_\perp \times \vec{h} \right]$, где $\vec{h} = \vec{B}/B$, а так же тот факт, что⁴ $\overline{(r_\perp)_i (r_\perp)_j} = \frac{1}{2} \vec{r}_\perp^2 \delta_{ij}$, получаем:

$$m \gamma \frac{d}{dt} (\vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp) = \frac{e}{c} \left[\vec{v}_\perp \times \vec{B} \right] + \left(\vec{\mu}, \vec{\nabla} \right) \vec{B}, \quad (59)$$

где мы ввели обозначение $\vec{\mu} = -\vec{h} \frac{p_\perp^2}{2m\gamma B}$. Эта величина, как мы увидим из следующих лекций, имеет смысл магнитного момента, а $p_\perp = m u_\perp \gamma$, $\mathcal{E} = m c^2 \gamma$.

Таким образом, после проведенного усреднения мы получаем уравнение (59), которое определяет медленное движение ведущего центра. Это уравнение описывает эффективное движение частицы, которая теперь помимо заряда имеет еще и магнитный момент. Последний появился из-за быстрого вращения исходной частицы вокруг ведущего центра.

В рамках рассматриваемого приближения правая сторона (59) имеет порядок величины $v_\perp \omega \sim v_\perp \frac{u_\perp}{r_\perp}$. При этом характерное время изменения v_\perp , определяющее порядок величины dv_\perp/dt , есть

$$\tau \sim \frac{L}{v_\perp} \Rightarrow \frac{dv_\perp}{dt} \sim \frac{v_\perp}{\tau} \sim v_\perp \frac{v_\perp}{L} \sim v_\perp \frac{v_\perp r_\perp}{L} \ll v_\perp \frac{v_\perp}{r_\perp} \ll v_\perp \frac{u_\perp}{r_\perp} = v_\perp \omega.$$

Поэтому мы пренебрежем в левой части уравнения (59) величиной $d\vec{v}_\perp/dt$.

Теперь рассмотрим $\dot{\vec{v}}_\parallel$. Так как \vec{v}_\parallel направлено вдоль \vec{h} , то $\vec{v}_\parallel = v_\parallel \vec{h}$. Поэтому

$$\frac{d\vec{v}_\parallel}{dt} = \frac{d}{dt} (v_\parallel \vec{h}) = \vec{h} \frac{dv_\parallel}{dt} + v_\parallel \frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{h} \dot{v}_\parallel + v_\parallel \dot{\vec{h}}.$$

Производная у величины \vec{h} появляется, несмотря на то, что $\vec{h} = \vec{B}/B$ и \vec{B} не зависит от времени, потому что мы берем этот вектор в точке траектории частицы, которая движется вдоль силовой линии поля \vec{B} . Т.е.

$$\dot{\vec{h}} = \frac{\partial \vec{h}}{\partial R_i} \dot{R}_i = v_\parallel \left(\vec{h}, \vec{\nabla} \right) \vec{h},$$

где мы использовали равенство $\dot{R}_i = v_\parallel h_i$ и пренебрегли добавочной скоростью \vec{v}_\perp . *Подумайте почему мы можем это сделать.*

Таким образом, $\dot{\vec{v}}_\parallel = \vec{h} \dot{v}_\parallel + v_\parallel^2 \left(\vec{h}, \vec{\nabla} \right) \vec{h}$. Геометрический смысл присутствующей здесь величины $\left(\vec{h}, \vec{\nabla} \right) \vec{h}$ становится понятен, если рассмотреть бесконечно малый сдвиг вдоль силовой линии на dl :

$$\vec{h}(\vec{r}_0 + \vec{h} dl) = \vec{h}(r_0) + \left(\vec{h}, \vec{\nabla} \right) \vec{h} dl.$$

Эта величина представляет собой изменение единичного вектора скорости $\vec{h} = \vec{v}_\parallel/v_\parallel$ при сдвиге вдоль траектории, т.е. это центростремительное ускорение единичного вектора скорости. Поэтому мы можем представить ее как $\left(\vec{h}, \vec{\nabla} \right) \vec{h} = \frac{\vec{n}}{\rho}$, где ρ — радиус кривизны

⁴Смотри аппендикс в конце этой лекции. Подчеркнем, что здесь \vec{r}_\perp совершает быстрые вращения в двумерной плоскости перпендикулярной полю \vec{B} . Поэтому $\overline{(r_\perp)_i (r_\perp)_j} \equiv \langle (r_\perp)_i (r_\perp)_j \rangle = \frac{1}{2} \vec{r}_\perp^2 \delta_{ij}$, а не $\frac{1}{3} \vec{r}_\perp^2 \delta_{ij}$.

траектории, а \vec{n} — единичный вектор нормали к траектории, который направлен к ее центру кривизны. Введем так же вектор бинормали $\vec{b} = [\vec{h} \times \vec{n}]$.

Теперь преобразуем в уравнении (59) следующую величину:

$$(\vec{\mu}, \vec{\nabla}) \vec{B} = -\mu (\vec{h}, \vec{\nabla}) \vec{B} = -\mu (\vec{h}, \vec{\nabla}) \vec{h} B = -\mu B (\vec{h}, \vec{\nabla}) \vec{h} - \mu \vec{h} (\vec{h}, \vec{\nabla}) B.$$

Тогда, с учетом всего сказанного, уравнение (59) принимает следующий вид:

$$\vec{h} \dot{v}_{\parallel} + v_{\parallel}^2 (\vec{h}, \vec{\nabla}) \vec{h} = \omega [\vec{v}_{\perp} \times \vec{h}] - \frac{\mu B}{m \gamma} (\vec{h}, \vec{\nabla}) \vec{h} - \frac{\mu}{m \gamma} \vec{h} (\vec{h}, \vec{\nabla}) B. \quad (60)$$

Умножим векторно обе стороны этого равенства на \vec{h} и учтем, что $[\vec{h} \times \vec{h}] = 0$, $[\vec{h} \times [\vec{v}_{\perp} \times \vec{h}]] = \vec{v}_{\perp}$ и $[\vec{h} \times (\vec{h}, \vec{\nabla}) \vec{h}] = \frac{1}{\rho} [\vec{h} \times \vec{n}] = \frac{\vec{b}}{\rho}$. В итоге получаем:

$$\frac{v_{\parallel}^2 \vec{b}}{\rho} = \omega \vec{v}_{\perp} - \frac{\mu B}{m \gamma \rho} \vec{b}.$$

Подставляя сюда вышеуказанные значения μ и p_{\perp} , находим, что:

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{b}}{\omega \rho} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{u_{\perp}^2}{2} \right) \quad (61)$$

дрейфовая скорость ведущего центра направлена по бинормали к силовой линии магнитного поля.

Умножая обе стороны (60) скалярно на \vec{h} , находим:

$$\dot{v}_{\parallel} = -\frac{\mu}{m \gamma} (\vec{h}, \vec{\nabla}) B.$$

Вспоминая, что производная поля по времени определяется движением частицы вдоль силовой линии, т.е. $\dot{B} = v_{\parallel} (\vec{h}, \vec{\nabla}) B$ и подставляя явное выражение для μ , находим, что

$$v_{\parallel} \cdot \dot{v}_{\parallel} = -\frac{u_{\perp}^2}{2B} \dot{B} \Rightarrow v_{\parallel} \cdot dv_{\parallel} = -\frac{u_{\perp}^2}{2B} dB.$$

Величина u_{\perp}^2/B является адиабатическим инвариантом: в одной из задач в задании требуется это показать. Поэтому из полученного уравнения следует, что при движении частицы в область, где магнитное поле возрастает, ее продольная скорость монотонно уменьшается вплоть до нуля. После этого ускорение направлено в сторону уменьшения поля. Поэтому частица приобретет скорость в обратном направлении. Т.е. частица отражается от области с большим значением магнитного поля. Это явление называется магнитным зеркалом.

7. Для более глубокого понимания поведения частиц в слабонеоднородных внешних полях необходимо знать, что величина $\oint \vec{p} d\vec{q}$, где \vec{p} и \vec{q} — обобщенные импульс и координата частицы, является адиабатическим инвариантом. Доказательство этого факта проходят в курсе теоретической механики. Оно, в частности, содержится в первом томе курса Ландау и Лифшица. Мы приведем доказательство по этой книге.

Пусть мы имеем дело с частицей, совершающей периодическое движение вроде того, что происходит в постоянном магнитном поле. Пусть это движение характеризуется некоторым параметром λ , определяющим свойства либо самой системы, либо же внешнего поля. Т.е. эта величина представляет собой нечто вроде ЭМ полей в предыдущих задачах. Пусть λ медленно (адиабатически) меняется под влиянием каких-то внешних условий. (Например, частица движется в слабонеоднородном поле.) Т.е.

$$T \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda$$

— изменение λ за период T много меньше самого λ . Пусть $H(p, q; \lambda)$ — Гамильтониан частицы. Тогда

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t},$$

где мы воспользовались уравнениями Гамильтона $\dot{q} = \partial H / \partial p$, $\dot{p} = -\partial H / \partial q$ и продифференцировали $\partial H / \partial t$ как сложную функцию от $\lambda(t)$. Выражение, стоящее справа в полученной формуле для $d\mathcal{E}/dt$, зависит от медленно меняющейся λ и быстрых p и q . Для выделения интересующего нас систематического хода изменения энергии следует усреднить это равенство по периоду движения. А именно, свести его к уравнению:

$$\overline{\frac{d\mathcal{E}}{dt}} = \dot{\lambda} \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}.$$

Вследствии медленности λ мы можем вынести ее производную за знак усреднения. Далее

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt$$

и т.к. $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$, то $dt = \frac{dq}{\partial H / \partial p}$. Следовательно $T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\partial H / \partial p}$. Т.е.

$$\overline{\frac{d\mathcal{E}}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p} dq}{\oint \frac{dq}{\partial H / \partial p}}.$$

При периодическом движении $H(p, q; \lambda) = \mathcal{E} = const$. Из этого уравнения можно найти $p = p(q; \mathcal{E}, \lambda)$. Следовательно, дифференцируя равенство $H = \mathcal{E}$ по λ , получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0.$$

Откуда следует, что

$$-\frac{\partial p}{\partial \lambda} = \frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p}.$$

Тогда

$$\overline{\frac{d\mathcal{E}}{dt}} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial \mathcal{E}} dq}.$$

Следовательно

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial \overline{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) dq = \frac{d}{dt} \oint p dq = 0.$$

Из последнего равенства мы получаем, что следующая величина $I = \oint p dq$ сохраняется.

8. Аппендикс про усреднение по углам.

Допустим, единичный вектор $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ совершает быстрые вращения. Допустим, для решения некоторой задачи нам требуется провести усреднение в течении некоторого продолжительного промежутка времени T :

$$\langle \vec{n}(t) \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{n}(t). \quad (62)$$

Предположим, что все направления играют одинаковую роль при таком усреднении. Тогда, по аналогии с термодинамикой, мы можем заменить усреднение по времени, усреднением по углам. А именно:

$$\langle n_i \rangle \equiv \int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (63)$$

Здесь $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ — это элемент телесного угла и $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$.

Нетрудно проверить прямым вычислением данного интеграла по телесному углу, что $\langle n_i \rangle = 0$. Другой более универсальный способ получения ответа следующий: Ясно, что $\langle n_i \rangle$ не поменяется при повороте координатной сетки, так как в его определении дают вклад все направления. Поэтому $\langle n_i \rangle$ является трехмерным единичным вектором, который инвариантен относительно вращений. Единственный такой вектор — нулевой.

Допустим теперь, что нам необходимо вычислить следующее среднее:

$$\langle n_i n_j \rangle \equiv \int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j. \quad (64)$$

Можно просто вычислять этот интеграл, подставляя в него различные компоненты $n_i = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. Но есть другой, более универсальный, способ получения ответа. Действительно, $\langle n_i n_j \rangle$ должен быть инвариантным относительно вращений тензором с двумя индексами, который симметричен относительно перестановки его индексов. Единственным тензором в трехмерном пространстве, который удовлетворяет этим условиям, является метрический — δ_{ij} . То есть имеем следующее соотношение:

$$\langle n_i n_j \rangle = c \delta_{ij}, \quad (65)$$

где c — некоторая константа, которую невозможно зафиксировать из симметричных соображений. Чтобы найти эту константу, свернем индексы i и j (положим их равными и просуммируем по всем их значениям) слева и справа в полученном выражении. Тогда, пользуясь тем, что $n_i n_i \equiv \vec{n}^2 = 1$ и $\langle 1 \rangle = 1$, мы получаем следующее соотношение: $1 = c \cdot 3$. Откуда следует, что

$$\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}. \quad (66)$$

Заметим, что если бы \vec{n} был бы D -мерным единичным вектором, то мы получили бы $\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{D} \delta_{ij}$.

Допустим теперь, что нам необходимо вычислить следующее среднее:

$$\langle n_i n_j n_k \rangle \equiv \int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j n_k. \quad (67)$$

Как и выше, мы имеем дело с инвариантным относительно вращений тензором с тремя индексами, который симметричен относительно перестановки любой пары его индексов. Единственный тензор, обладающий такими свойствами, — это нулевой тензор. Поэтому

$$\langle n_i n_j n_k \rangle = 0. \quad (68)$$

Аналогично усреднение любого нечетного произведения n равно нулю:

$$\langle n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{2k+1}} \rangle = 0, \quad k \in Z_+. \quad (69)$$

Теперь вычислим среднее

$$\langle n_i n_j n_k n_l \rangle \equiv \int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j n_k n_l. \quad (70)$$

Это тензор с четырьмя индексами, который инвариантен относительно вращений и любой перестановки его индексов. Из этих симметрий следует, что

$$\langle n_i n_j n_k n_l \rangle = c (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (71)$$

где c — опять некоторая константа, которую невозможно зафиксировать из симметричных соображений. Чтобы найти ее, свернем слева и справа этого выражения индексы k и l . Тогда получим следующее соотношение:

$$\langle n_i n_j \rangle = c (\delta_{ij} 3 + \delta_{ik} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jl}) = c 5 \delta_{ij}. \quad (72)$$

Зная вычисленный выше ответ для $\langle n_i n_j \rangle$, получаем, что

$$\langle n_i n_j n_k n_l \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (73)$$

Вопросы и задачи

- Постройте другие инварианты ЭМ поля. Как они выражаются через \vec{E} и \vec{B} ? Найдите собственные значения $\|F_{\mu\nu}\|$ и выразите их через I_1 и I_2 . Сколько независимых собственных значений имеет матрица $\|F_{\mu\nu}\|$? Как через эти собственные значения выражается следующая величина: $F_{\mu_1}^{\mu_2} F_{\mu_2}^{\mu_3} \dots F_{\mu_{n-1}}^{\mu_n} F_{\mu_n}^{\mu_1}$?
- Получите (54).
- Вычислите следующие средние:
 - а)

$$\langle n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{2k}} \rangle = ?, \quad k \in Z_+. \quad (74)$$

б)

$$\langle (\vec{r}, \vec{a}) \vec{r} \rangle = ?, \quad (75)$$

где вектор \vec{a} постоянный, а усреднение ведется по всем направлениям вектора \vec{r} , модуль которого фиксирован: $|\vec{r}| = r$.

в)

$$\langle \left([\vec{r}, \vec{a}], [\vec{r}, \vec{b}] \right) \rangle = ?, \quad (76)$$

где вектора \vec{a} и \vec{b} постоянны, а усреднение ведется по всем направлениям вектора \vec{r} , модуль которого фиксирован: $|\vec{r}| = r$.

Лекция VI; Уравнения Максвелла в релятивистской форме и их вывод из принципа наименьшего действия для полей, 4-вектор тока, δ -функция.

1. В 4-й лекции мы обсудили происхождение уравнений Максвелла из совокупности опытных данных:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}.\end{aligned}$$

Первая пара этих уравнений выполняется тождественно, если

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

для некоторых потенциалов φ , \vec{A} . Зависимость ЭМ полей \vec{E} и \vec{B} от потенциалов определяется этими формулами с точностью до замены

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \alpha$$

называемой калибровочным преобразованием. Оказывается, что если ввести 4-вектор потенциал $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, то компоненты 3-векторов \vec{E} и \vec{B} определяют 4-мерный 2-тензор ЭМ поля $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, где $\partial_\mu A_\nu \equiv \partial A_\nu / \partial x^\mu$. А именно:

$$E_i = F_{0i}, \quad B_i = -\epsilon_{ijk} F_{jk}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Так же как \vec{E} и \vec{B} , тензор $F_{\mu\nu}$ инвариантен относительно калибровочных преобразований, которые в 4-мерной форме имеют вид $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha$.

В этой лекции мы хотим записать уравнения Максвелла в явной Лоренц ковариантной форме — через тензор $F_{\mu\nu}$ и его производные. Рассмотрим сначала первое уравнение:

$$0 = \operatorname{div} \vec{B} = \partial_i B_i = -\partial_i \epsilon_{ijk} F_{jk} = -\epsilon^{0ijk} \partial_i F_{jk} = \epsilon^{0\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta},$$

т.к. $\epsilon^{0ijk} = \epsilon^{ijk} = \epsilon_{ijk}$, последнее равенство верно в силу того, что в пространстве, в отличие от ПВ, верхние индексы не отличаются от нижних. Так же мы воспользовались тем фактом, что ненулевые компоненты $\epsilon^{0\nu\alpha\beta}$ совпадают с ϵ^{0ijk} . Итак, полученное уравнение $\epsilon^{0\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0$ выглядит как нулевая компонента какого-то 4-мерного уравнения.

Второе из уравнений Максвелла переписывается в следующем виде:

$$0 = \left(\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_i = \epsilon_{ijk} \partial_i E_k + \frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial t} = \epsilon^{0ijk} \partial_i F_{0k} - \epsilon^{0ijk} \partial_0 F_{jk} = \epsilon^{\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, полученное уравнение дополняет то, что было выведено выше до 4-мерного уравнения:

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0, \quad (77)$$

представляющего первую пару уравнений Максвелла. Легко проверить, что это уравнение выполняется тождественно, если в него подставить $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$:

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 2 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\nu \partial_\alpha - \partial_\alpha \partial_\nu) A_\beta = 0.$$

Рассмотрим теперь третье из уравнений Максвелла:

$$\text{div } \vec{E} = \partial_i E_i = \partial_i F^{i0} = \partial_\mu F^{\mu 0},$$

т.к. $F^{00} = 0$. Далее, четвертое из уравнений Максвелла принимает вид:

$$\left(\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_i = \epsilon_{ijk} \partial_j B_k + \partial_0 F^{0i} = -\partial_j F^{ij} + \partial_0 F^{0i} = \partial_j F^{ji} + \partial_0 F^{0i} = \partial_\mu F^{\mu i}$$

Таким образом, последние два уравнения преобразуются в

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &= 4\pi \rho, \\ \partial_\mu F^{\mu i} &= \frac{4\pi}{c} j^i \end{aligned}$$

Теперь должно быть видно, что если объединить плотность заряда ρ и плотность тока \vec{j} в единый 4-вектор плотности тока $j^\mu = (\rho c, \vec{j})$, то полученные два 3-мерных уравнения запишутся как одно 4-мерное уравнение:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (78)$$

представляющее вторую пару уравнений Максвелла. Итак уравнения Максвелла записываются в удивительно компактной Лоренц ковариантной форме, хотя Максвелл ничего и не знал о СТО. Подчеркну, что полученные уравнения также явно калибровочно инвариантны.

2. Из уравнения (78), применяя к обеим его сторонам 4-дивергенцию, получаем:

$$\frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\nu \partial^2 A^\nu - \partial_\mu \partial^2 A^\mu = 0,$$

где мы обозначили $\partial^2 = \partial_\alpha \partial^\alpha$. Таким образом, из уравнений Максвелла следует уравнение непрерывности:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (79)$$

Из этого уравнения следует закон сохранения заряда. Действительно, проинтегрируем полученное уравнение по некоторой области M 3-мерного пространства:

$$\int_M d^3V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) = \frac{d}{dt} \int_M d^3V \rho + \int_M d^3V \operatorname{div} \vec{j} = \frac{d}{dt} Q_M + \iint_{\partial M} \vec{j} d\vec{s} = 0,$$

где Q_M — заряд внутри области M , а ∂M — замкнутая 2-мерная граница 3-мерной области M . Т.е. полученное уравнение $\frac{d}{dt} Q_M = - \iint_{\partial M} \vec{j} d\vec{s}$ утверждает, что заряд в области M изменяется только за счет его притока или оттока через границу этой области. Если же через границу области M не проникает никакой ток, то заряд внутри этой области вообще не меняется $\frac{d}{dt} Q_M = 0$.

3. Мы уже знаем, что действие, описывающее взаимодействие заряженной точечной частицы с ЭМ полем, имеет вид:

$$\Delta S = -\frac{e}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \dot{z}^\mu(\tau) A_\mu [z(\tau)].$$

Это действие содержит один интеграл по собственному времени $d\tau = ds/c$. Мы же хотим представить его в виде интеграла по 4-мерному ПВ, т.е. как интеграл $\int d^4x \equiv \int dx^0 \int dx \int dy \int dz \equiv c \int dt \int dx \int dy \int dz$. Из дальнейшего станет ясно, зачем это нужно.

Чтобы преобразовать 1-мерный интеграл в 4-мерный, нам надо воспользоваться δ -функцией. В конце этой лекции мы обсудим эту функцию более подробно. Сейчас же нам понадобится просто ее определение: δ -функция — это такая функция, что для любой достаточно хорошей $f(x)$ верно, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$. Далее можно так же определить $\delta^{(4)}(x-y) \equiv \delta(x^0-y^0) \delta(x^1-y^1) \delta(x^2-y^2) \delta(x^3-y^3)$. С использованием последней функции, можно записать:

$$\frac{e}{c} \int d\tau \dot{z}^\mu(\tau) A_\mu [z(\tau)] = \frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu(x) A_\mu(x),$$

где

$$j^\mu(x) = e c \int d\tau \dot{z}^\mu(\tau) \delta^{(4)} [x - z(\tau)]. \quad (80)$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu(x) A_\mu(x) &= \frac{e}{c} \int d^4x A_\mu(x) \int d\tau \dot{z}^\mu(\tau) \delta^{(4)} [x - z(\tau)] = \\ &= \frac{e}{c} \int d\tau \dot{z}^\mu(\tau) \int d^4x A_\mu(x) \delta^{(4)} [x - z(\tau)] = \frac{e}{c} \int d\tau \dot{z}^\mu(\tau) A_\mu [z(\tau)]. \end{aligned}$$

Как мы сейчас увидим, (80) является 4-вектором плотности тока для точечной частицы. Его нулевая компонента имеет вид ($z^0 = ct$):

$$j^0(x) = ec \int d\tau \frac{dz^0}{d\tau} \delta^{(4)} [x - z(\tau)] = ec \int dz^0 \delta(x^0 - z^0) \delta^{(3)} [\vec{x} - \vec{z}(t)] = ec \delta^{(3)} [\vec{x} - \vec{z}(t)],$$

$\vec{z}(t)$ — траектория частицы в 3-мерном пространстве. Т.е. рассматриваемая компонента j^0 равна скорости света, умноженной на плотность заряда для точечной частицы $\rho(x) = e \delta^{(3)} [\vec{x} - \vec{z}(t)]$. Действительно, $\iiint_M d^3V j^0/c = e \iiint d^3V \delta^{(3)} [\vec{x} - \vec{z}(t)] = e$ для любой 3-мерной области M , включающей заряд в данный момент времени t .

Аналогично:

$$\vec{j} = ec \int dt \frac{d\vec{z}}{dt} \delta(x^0 - ct) \delta^{(3)} [\vec{x} - \vec{z}(t)] = e \dot{\vec{z}}(t) \delta^{(3)} [\vec{x} - \vec{z}(t)] = \rho(x) \vec{v}(t)$$

является плотностью 3-мерного тока для точечной частицы ($\vec{v} = \dot{\vec{z}}$). Таким образом, рассматриваемая величина $j^\mu(x) = ec \int d\tau \dot{z}^\mu(\tau) \delta^{(4)} [x - z(\tau)] = (c\rho, \vec{v}\rho)$ действительно является 4-вектором плотности тока для точечной частицы.

4. Теперь мы готовы сформулировать принцип наименьшего действия для ЭМ поля. Для этого надо определить действие для ЭМ поля. Оно должно быть Лоренц и калибровочно инвариантным, а также быть интегралом по ПВ $\int d^4x$ от некоторой плотности. Мы знаем два инварианта поля I_1 и I_2 построенных из $F_{\mu\nu}$. Они также и калибровочно инвариантны, а потому вполне подходят в качестве плотности для определения действия. Поэтому естественно предположить, что действие для ЭМ поля имеет вид

$$S_{EM} = \int d^4x \left[c_1 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + c_2 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right],$$

где $c_{1,2}$ — некоторые константы. Но оказывается, что I_2 является полной 4-дивергенцией:

$$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 4 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\alpha A_\beta) = 4 \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu \partial_\alpha A_\beta).$$

Где мы воспользовались антисимметрией $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ и тем, что $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\alpha A_\beta = 0$. Поэтому

$$\int d^4x F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \int_M d^4x \partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu \partial_\alpha A_\beta) = \oint_{\partial M} d^3\sigma_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu \partial_\alpha A_\beta,$$

где последний интеграл берется по замкнутой 3-мерной границе ∂M 4-мерного ПВ M (см. аппендикс в конце этой лекции). Т.е. его подинтегральное выражение зависит от граничных значений полей, которые обычно остаются фиксированными (равными нулю — поля в вакууме) в вариационном исчислении для полей. Поэтому вклад I_2 в действие для ЭМ полей можно отбросить, так как он не меняет уравнений движения.

Итак, действие, описывающее ЭМ поля и их взаимодействие с внешним 4-вектором тока, имеет вид:

$$S_{EM}(A_\mu) = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{c^2} \int d^4x A_\mu(x) j^\mu(x), \quad (81)$$

где мы зафиксировали константу $c_1 = -1/16 \pi c$, что приведет к верным коэффициентам в уравнениях Максвелла, как мы сейчас увидим.

Мы хотим вывести из условия минимума рассматриваемого действия вторую пару уравнений Максвелла, т.к. первая пара уравнений выполняется тождественно, если $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Обобщенной координатой в поставленной вариационной задаче является поле 4-вектор потенциала A_μ . Поэтому:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{16 \pi c} \delta \int d^4 x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \delta \int d^4 x j_\mu A^\mu = \\
&= -\frac{1}{16 \pi c} \int d^4 x (\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}) - \frac{1}{c^2} \int d^4 x j_\mu \delta A^\mu = \\
&= -\frac{1}{16 \pi c} \int d^4 x 2 F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \int d^4 x j_\mu \delta A^\mu = \\
&= -\frac{1}{8 \pi c} \int d^4 x F_{\mu\nu} (\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu) - \frac{1}{c^2} \int d^4 x j_\mu \delta A^\mu = \\
&= -\frac{1}{8 \pi c} \int d^4 x F_{\mu\nu} 2 \partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{c^2} \int d^4 x j_\mu \delta A^\mu = \\
&= \int d^4 x \left(\frac{1}{4 \pi c} \partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} j_\mu \right) \delta A^\mu,
\end{aligned}$$

где на последнем шаге мы взяли интеграл по частям, $-\frac{1}{4\pi c} \int d^4 x F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu = \frac{1}{4\pi c} \int d^4 x \partial^\mu F_{\mu\nu} \delta A^\nu$, и воспользовались тем, что $\delta A^\mu|_{\partial M} = 0$ на границе ∂M ПВ M . Итак, вариация должна быть равна нулю при любом δA_μ и мы получаем вторую пару уравнений Максвелла в Лоренц ковариатной форме (78).

5. Чтобы понять как варьировать по полям вроде $A_\mu(x)$ (раньше мы варьировали только по траекториям $\vec{z}(t)$ или мировым линиям $z_\mu(t)$), вернемся к механическому примеру, который мы обсуждали на первой лекции. А именно, мы имели дело с 1-мерной бесконечной решеткой шариков, уравнения движения для которых имели вид бесконечной системы уравнений

$$m \ddot{\phi}_i = k (\phi_{i+1} - \phi_i) - k (\phi_i - \phi_{i-1})$$

для каждого $i \in Z$. Здесь $\phi_i(t)$ отклонение i -го шарика из положения равновесия вдоль одного измерения (вдоль решетки) в момент времени t .

Эти уравнения следуют из действия:

$$S(\{\phi_i\}) = \int_{t_1}^{t_2} dt (T - V) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{m \dot{\phi}_i^2}{2} - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{k (\phi_{j+1} - \phi_j)^2}{2} \right].$$

В последнем выражении первая сумма — это сумма кинетических энергий всех шариков, а вторая сумма — это сумма потенциальных энергий всех пружин.

Уравнения Лагранжа–Эйлера для этой механической системы имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\{\phi_j\}, \{\dot{\phi}_j\})}{\partial \dot{\phi}_i} = \frac{\partial L(\{\phi_j\}, \{\dot{\phi}_j\})}{\partial \phi_i}$$

для каждого i , т.к. обобщенными координатами для рассматриваемой механической системы является набор $\{\phi_i\}$. Чтобы увидеть, что уравнения Лагранжа–Эйлера совпадают с указанными выше уравнениями движения, посчитаем:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_i} = k (\phi_{i+1} - \phi_i) - k (\phi_i - \phi_{i-1}), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} = m \dot{\phi}_i.$$

После чего уравнения движения следуют с очевидностью.

Рассмотрим теперь непрерывный предел, в котором рассматриваемая решетка должна превратиться в одномерное упругое тело. В непрерывном пределе $\phi_i(t) \rightarrow \phi(x_i, t) \rightarrow \phi(x, t)$. Тогда действие преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} S(\{\phi\}) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{m \dot{\phi}_i^2}{2} - \frac{k (\phi_{i+1} - \phi_i)^2}{2} \right] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \Delta x \left[\frac{m \dot{\phi}^2(x_i, t)}{\Delta x} - \frac{k \Delta x}{2} \left[\frac{\phi(x_i + \Delta x, t) - \phi(x_i, t)}{\Delta x} \right]^2 \right] \end{aligned}$$

и $\Delta x \rightarrow 0$. Теперь если в этом пределе держать $m/\Delta x = \bar{m} = const$ и $k \Delta x = \bar{k} = const$, чтобы получить теорию описывающую упругое тело, а не пыль из частиц или же абсолютно жесткий стержень, то рассматриваемое механическое действие переходит в действие 2-мерной теории поля:

$$\begin{aligned} S[\phi(t, x)] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\bar{m} \dot{\phi}^2(t, x)}{2} - \frac{\bar{k} \phi'^2(t, x)}{2} \right] = \\ &= \frac{\bar{k}}{2} \int d^2 x \left[\frac{1}{\bar{c}^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\bar{k}}{2} \int d^2 x \partial_a \phi \partial^a \phi, \end{aligned}$$

где $\int d^2 x \equiv \int dt \int dx$, а $\bar{c} = \bar{m}/\bar{k} = m/k \Delta x^2$ — скорость звука в решетке, введенная еще на первой лекции, $\phi' \equiv \partial \phi / \partial x$, $\dot{\phi} \equiv \partial \phi / \partial t$. Далее $\partial_a \phi \equiv \left(\frac{1}{\bar{c}} \dot{\phi}, \phi' \right)$ — 2-мерный градиент поля ϕ . Следовательно $\partial_a \phi \partial^a \phi = \eta^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi = \frac{1}{\bar{c}^2} \dot{\phi}^2 - \phi'^2$, где

$$\|\eta_{ab}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— аналог метрического тензора в 2-мерном ПВ.

В рассматриваемой теории в качестве обобщенной координаты мы имеем поле $\phi(t, x)$, в которое перешел в непрерывном пределе бесконечный набор координат шариков $\{\phi_i(t)\}$. Поэтому для нахождения уравнений движения для поля $\phi(t, x)$ необходимо варьировать рассматриваемое действие именно по этому полю. Выведем уравнения Лагранжа–Эйлера для более общего действия:

$$S(\phi) = \int d^2 x \mathcal{L}(\phi, \partial_a \phi).$$

В нашем случае Лагранжева плотность равна $\mathcal{L} = \frac{\hbar}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi$. Замечу, что Лагранжиан выражается через Лагранжеву плотность как $L = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathcal{L}$.

Итак:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &\equiv [S(\phi + \delta\phi) - S(\phi)]_{\text{linear in } \delta\phi} \equiv \\ &\equiv \int d^2x \{ \mathcal{L}[\phi + \delta\phi, \partial_a(\phi + \delta\phi)] - \mathcal{L}[\phi, \partial_a\phi] \}_{\text{linear in } \delta\phi} = \\ &= \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} (\partial_a \delta\phi) \right]. \end{aligned}$$

В последнем выражении второй член в сумме под интегралом пропорционален не $\delta\phi$, а его производной $\partial_a \delta\phi$. Мы же хотим найти условия (уравнения), при которых вариация действия равна нулю $\delta S = 0$ при любом $\delta\phi$. Поэтому надо некоторым образом избавиться в этом члене от производной от $\delta\phi$. Этого можно добиться, взяв интеграл по частям, следующим образом. Заметим, что по правилу Лейбница

$$\partial_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \delta\phi \right) = \left(\partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \partial_a \delta\phi.$$

Проинтегрируем обе стороны этого равенства по $\int d^2x$ и воспользуемся теоремой Стокса с левой стороны полученного равенства:

$$\int_M d^2x \partial_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \delta\phi \right) = \oint_{\partial M} dl_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \delta\phi,$$

где интеграл с правой стороны этого равенства берется по замкнутой 1-мерной границе ∂M 2-мерного ПВ M . Замечу, что в вариационной задаче в теории поля ПВ обычно берется бесконечно большим во всех направлениях: $[t_1, t_2] \rightarrow (-\infty, +\infty)$.

На границе мы фиксируем граничные и начальные значения полей, а потому фиксируем $\delta\phi \Big|_{\partial M} = 0$. Поэтому рассматриваемый интеграл равен нулю⁵. Следовательно,

$$\int d^2x \left(\partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \right) \delta\phi = - \int d^2x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \partial_a \delta\phi.$$

Воспользовавшись этим равенством в выражении для вариации действия, получаем

$$0 = \delta S = \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \left(\partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \right) \delta\phi \right] = \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \left(\partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \right) \right] \delta\phi.$$

Полученное выражение должно равняться нулю при любом значении $\delta\phi$. Поэтому мы получаем уравнение Лагранжа–Эйлера:

⁵ Аналогично тому, как это было в случае вариаций действий для частиц, есть несколько способов потребовать зануления вклада $\oint dl_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \delta\phi$ в вариацию действия. А именно, требование $\delta\phi \Big|_{\partial M} = 0$ называется граничным условием Дирихле. В то время как требование $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a \phi)} \Big|_{\partial M} = 0$ называется граничным условием Неймана. То есть, как и в случае частиц, из принципа наименьшего действия мы получаем и уравнения движения, и граничные условия.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \phi)}.$$

В нашем случае, когда $\mathcal{L} = \frac{\bar{k}}{2} \eta^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi$, мы имеем, что $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$, а $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a \phi)} = \bar{k} \partial_a \phi$. Поэтому мы получаем следующее уравнение движения:

$$\partial_a \partial^a \phi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = 0,$$

которое нам уже должно быть знакомо по первой лекции.

6. Теперь перейдем к варьированию действия для ЭМ поля по A_μ . Для действия общего вида $S = \int d^4x \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu)$ мы можем аналогично только что приведенному случаю вывести уравнения Лагранжа–Эйлера:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \quad (82)$$

В нашем случае Лагранжева плотность равна:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{c^2} A_\mu(x) j^\mu(x). \quad (83)$$

Поэтому

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial A_\nu} = -\frac{1}{c^2} j^\nu,$$

а

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{16\pi c} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} [F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] = \\ &= -\frac{1}{16\pi c} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} [\eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\sigma} (\partial_\alpha A_\gamma - \partial_\gamma A_\alpha) (\partial_\beta A_\sigma - \partial_\sigma A_\beta)] = -\frac{4}{16\pi c} F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\partial(\partial_\alpha A_\beta)/\partial(\partial_\mu A_\nu) = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu$, а так же свойствами символа Кронекера и метрического тензора. В результате из уравнений Лагранжа–Эйлера мы получаем:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

— вторую пару уравнений Максвелла.

7. Аппендикс. Свойства δ -функции. Удобным наглядным представлением δ -функции является следующее:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi \epsilon}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon}}. \quad (84)$$

График функции, стоящей под знаком предела имеет вид колокола с вершиной в $x = 0$, высотой $1/\sqrt{\pi\epsilon}$ и шириной ϵ , т.к. при $|x| \gg \epsilon$ рассматриваемая функция экспоненциально быстро стремится к нулю. Поэтому, если нам необходимо взять интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon}}$$

для любой достаточно хорошей функции $f(x)$, то при достаточно маленьком ϵ изменением функции внутри малой области $|x| < \epsilon$, где подинтегральное выражение существенно отлично от нуля, можно пренебречь. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon}} \approx f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon}}.$$

Разложив $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи 0, $f(x) = f(0) + x f'(0) + \dots$, можно убедиться, что поправки к полученному выражению стремятся к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$.

Возьмем теперь интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

где мы переобозначили $x/\sqrt{\epsilon} \rightarrow x$. Чтобы вычислить этот интеграл, заметим, что

$$I^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-x^2-y^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} dr r e^{-r^2} = \int_0^{+\infty} dr^2 e^{-r^2} = 1.$$

Где мы сделали замену переменных интегрирования под интегралом $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Таким образом, $I = 1$. Поэтому

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon}} = f(0)$$

для любой $f(x)$. Следовательно вышеуказанное представление δ -функции правомерно в силу определения последней. Замечу, что график функции $\frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon}}$ в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ имеет следующий вид: функция равна нулю везде кроме $x = 0$, а в $x = 0$ она равна бесконечности.

Абсолютно аналогичным образом можно убедиться, что δ -функцию можно представлять и другим образом:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \quad (85)$$

Приведем теперь несколько основных свойств δ -функции:

•

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x + x_0) \delta(x) = f(x_0); \quad (86)$$

-

$$\int_a^b dx f(x) \delta(x) = \begin{cases} f(0), & \text{if } 0 \in [a, b] \\ 0, & \text{if } 0 \notin [a, b] \end{cases} \quad (87)$$

т.к. график δ -функции имеет вышеуказанный вид: она равна нулю везде кроме $x = 0$, а в $x = 0$ она равна бесконечности;

- $\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(ax) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|a|} f\left(\frac{x}{a}\right) \delta(x) = \frac{f(0)}{|a|}$, где мы воспользовались тем фактом, что $\delta(x)$ четная функция. Поэтому

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}; \quad (88)$$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta[g(x)] = \sum_{a=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta[g'(x_a)(x - x_a)]$, где $x_a, a = 1, \dots, n$ — нули функции $g(x)$, а $g'(x_a)$ — производные этой функции в ее нулях. Мы приравняли $\delta[g(x)] = \sum_{a=1}^n \delta[g'(x_a)(x - x_a)]$, т.к. $\delta[g(x)]$ не равна нулю только при тех значениях x , при которых $g(x)$ равна нулю и разложили последнюю в ряд Тейлора вблизи ее нулей. Далее, воспользовавшись предыдущим свойством, мы получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta[g(x)] = \sum_{a=1}^n \frac{1}{|g'(x_a)|} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - x_a).$$

Следовательно

$$\delta[g(x)] = \sum_{a=1}^n \frac{\delta(x - x_a)}{|g'(x_a)|} \quad (89)$$

- Формула Сохотского. Рассмотрим предел

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x + i\epsilon}{(x - i\epsilon)(x + i\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} + i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \\ &= \text{v.p.} \frac{1}{x} + i\pi \delta(x) \end{aligned} \quad (90)$$

где $\text{v.p.} 1/x$ регулярная в нуле функция. В этой формуле мы воспользовались представлением δ -функции в виде (85).

- Фурье представление δ -функции:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \quad (91)$$

Докажем эту формулу. Наивно интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$ не берется. Однако представим его следующим образом:

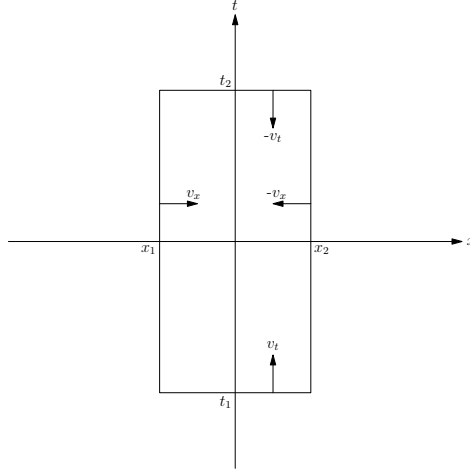


Рис. 7:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} &= \int_0^{+\infty} dk e^{ikx} + \int_{-\infty}^0 dk e^{ikx} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} dk e^{ikx - \epsilon k} + \\
&+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 dk e^{ikx + \epsilon k} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{x - i\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{x + i\epsilon} = 2\pi \delta(x). \quad (92)
\end{aligned}$$

При выводе последнего равенства мы использовали формулу Сохотского и ее комплексно сопряженный вариант.

8. Аппендикс. Теорема Стокса в произвольной размерности и с произвольной сигнатурой метрики.

Для начала рассмотрим в двух измерениях интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_R dt dx \partial_a v^a(t, x) \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx [\partial_0 v^0(t, x) + \partial_1 v^1(t, x)], \\
x^a &\equiv (x^0, x^1) \equiv (t, x). \quad (93)
\end{aligned}$$

Здесь область R изображена на рисунке (7) — это часть плоскости, ограниченная прямоугольником со сторонами, длины которых равны $t_2 - t_1$ и $x_2 - x_1$. В рассматриваемом выражении не важно какую сигнатуру имеет метрика: оно верно и для пространства Евклида, и для пространства-времени Минковского. Прделаем следующие преобразования с обсуждаемым выражением:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{t_1}^{t_2} dt \partial_0 v^0(t, x) + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \partial_1 v^1(t, x) = \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx [v^0(t = t_2, x) - v^0(t = t_1, x)] + \int_{t_1}^{t_2} dt [v^1(t, x = x_2) - v^1(t, x = x_1)]. \quad (94)
\end{aligned}$$

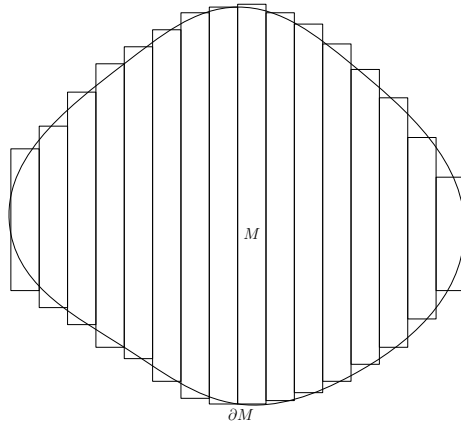


Рис. 8:

На последнем шаге здесь в первом выражении мы взяли интеграл по t от полной производной, а во втором выражении — интеграл по x от полной производной. Полученный интеграл можно представить в виде:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx [v^0(t=t_2, x) - v^0(t=t_1, x)] + \int_{t_1}^{t_2} dt [v^1(t, x=x_2) - v^0(t, x=x_1)] = \oint_{\partial R} d\sigma_a v^a. \quad (95)$$

Здесь ∂R — это граница области R , то есть сам прямоугольник, а $d\sigma_a$ — это вектор перпендикулярный границе, длина которого равна элементу длины границы.

Чтобы обобщить рассматриваемые формулы на случай областей более общей формы, приблизим такую произвольную область M некоторым ее разбиением на прямоугольники, как это изображено на рисунке (8). Тогда для каждого прямоугольника будет верно рассуждение, приведенное выше. В пределе когда разбиение будет становиться более мелким, вклады от сопряженных ребер прямоугольников будут сокращаться. В результате все, что останется — это интеграл по границе ∂M , то есть:

$$\iint_M d^2x \partial_a v^a = \oint_{\partial M} d\sigma_a v^a. \quad (96)$$

Обобщение этого вывода на случай большей размерности очевидно. Это завершает схематическое доказательство теоремы Стокса.

Вопросы и задачи

- Покажите, что $F_\nu^\mu F_\alpha^\nu F_\mu^\alpha = 0$.
- Найдите уравнения движения для действия $S = \int d^4x [a F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + b F_\nu^\mu F_\alpha^\nu F_\beta^\alpha F_\mu^\beta]$, где a и b — некоторые размерные константы.
- Получите (82) из принципа наименьшего действия.

- Рассмотрим не инвариантное относительно преобразований Лоренца, нелинейное действие $S = \int d^4x \left\{ \dot{\vec{A}}^2 - [\vec{\partial} \times \vec{A}]^2 + a \left(\dot{\vec{A}}, [\vec{\partial} \times \vec{A}] \right)^2 \right\}$, где a — некоторая размерная константа. Оно может описывать поведение ЭМ полей в какой-нибудь среде. Найдите уравнения движения следующие из этого действия.

Лекция VII; Симметрии и законы сохранения в присутствии полей, тензор энергии–импульса электромагнитного поля и частиц, баланс энергии частиц и поля.

1. На предыдущих лекциях мы ввели действие, которое описывает взаимодействие ЭМ поля и системы N заряженных точечных частиц:

$$S[A_\mu(x), \{z_q^\mu(\tau)\}] = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \int d^4x A_\mu(x) j^\mu(x) - \sum_{q=1}^N m_q c \int d\tau_q \sqrt{\dot{z}_q^2(\tau_q)}, \quad j^\mu(x) = \sum_{q=1}^N e_q c \int d\tau_q \dot{z}_q^\mu(\tau_q) \delta^{(4)}[x - z_q(\tau_q)], \quad (97)$$

где $z_q^\mu(\tau_q)$ — мировая линия q -й частицы $q = 1, \dots, N$, а τ_q — собственное время вдоль ее мировой линии.

В этом действии обобщенными координатами являются как $A_\mu(x)$, так и весь набор $z_q^\mu(\tau_q)$, $q = 1, \dots, N$. Если варьировать это действие по $z_{\bar{q}}^\mu(\tau_{\bar{q}})$ при фиксированном $A_\mu(x)$ и всех остальных $z_q^\mu(\tau_q)$, $q \neq \bar{q}$, то первый член в рассматриваемом действии не дает вклада вообще, а из последних двух мы получаем уравнение движения для частицы под номером \bar{q} во внешнем поле:

$$m_{\bar{q}} c \frac{du_{\bar{q}}^\mu}{ds_{\bar{q}}} = \frac{e_{\bar{q}}}{c} F_\nu^\mu u_{\bar{q}}^\nu, \quad s_{\bar{q}} = c\tau_{\bar{q}}$$

Так мы получим уравнения для всех q .

Если же варьировать действие по $A_\mu(x)$ при фиксированных $z_q^\mu(\tau_q)$, $q = 1, \dots, N$, то третий член в рассматриваемом действии не дает вклада, а из первых двух мы получаем уравнение для поля $A_\mu(x)$ с током $j^\mu(x)$ в качестве источника:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu.$$

Задача классической электродинамики (ЭД) состоит именно в решении полученной системы уравнений для ЭМ поля и системы частиц. В общей ситуации это является очень сложной задачей. В последующих лекциях мы изучим некоторые примеры, когда она решается точно и когда ее можно решить в хорошем приближении. Например, когда мы рассматривали дрейф частиц во внешних полях, мы решали эту задачу в приближении, когда поля, создаваемые самими частицами были пренебрежимо малы по сравнению с внешними полями.

При решении подобных задач очень помогает знание различных законов сохранения. Как вы возможно уже понимаете, законы сохранения следуют из инвариантностей действия. Рассматриваемое нами действие инвариантно по крайней мере относительно калибровочных преобразований $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha$, относительно преобразований Лоренца, а так же — относительно трансляций в ПВ. Последняя инвариантность следует из однородности ПВ. А именно, из того факта, что Лагранжева плотность для вышеуказанного действия не зависит явно от x_μ , а только как сложная функция — через зависимость $A_\mu(x)$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} [A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x), \{z_q^\mu(\tau_q)\}, \not{x}_\mu].$$

Найдем законы сохранения, следующие из этих инвариантностей Лагранжиана.

2. Рассмотрим как действие меняется при калибровочном преобразовании:

$$S[A_\mu - \partial_\mu \alpha] - S[A_\mu] = \int d^4x j_\mu \partial^\mu \alpha,$$

т.к. $F_{\mu\nu}$, $z_q^\mu(\tau_q)$ и, следовательно $j^\mu(x)$ не изменяются при калибровочных преобразованиях. При этом:

$$\int d^4x j_\mu \partial^\mu \alpha = \oint \alpha j_\mu dV^\mu - \int d^4x \alpha \partial^\mu j_\mu.$$

Интеграл по границе ПВ $\oint dV^\mu \dots$ равен нулю, как обычно, а потому для инвариантности действия относительно калибровочных преобразований необходимо, чтобы нулю равнялся интеграл $\int d^4x \alpha \partial^\mu j_\mu$ при любом $\alpha(x)$. Для этого необходимо, чтобы был верен

$$\partial^\mu j_\mu = 0$$

— закон сохранения электрического тока. Т.е. следствием калибровочной инвариантности является закон сохранения заряда. Это очень важный факт, подчеркивающий фундаментальность калибровочной симметрии.

3. Выведем теперь какой закон сохранения следует из трансляционной инвариантности в ПВ. Его можно вывести таким же способом, как был выведен выше закон сохранения заряда, но мы используем более простой способ. В силу вышеуказанной независимости Лагранжиана от положения системы зарядов и полей в ПВ, мы имеем, что:

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \partial_\mu A_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)} \partial_\mu \partial_\alpha A_\nu$$

в силу правила дифференцирования сложной функции $\mathcal{L}[A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)]$ от x . Воспользовавшись уравнением Лагранжа–Эйлера

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)},$$

получаем:

$$\partial_\mu \mathcal{L} = \left(\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)} \right) \partial_\mu A_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)} \partial_\alpha \partial_\mu A_\nu \Rightarrow \partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)} \partial_\mu A_\nu \right).$$

Теперь, перенося все члены в последнем равенстве на правую сторону, получаем:

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)} \partial_\mu A_\nu - \mathcal{L} \delta_\mu^\alpha \right) = 0,$$

т.е. закон сохранения вида

$$\partial_\alpha T_\mu^\alpha = 0, \tag{98}$$

где

$$T_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)} \partial_\mu A_\nu - \mathcal{L} \delta_\mu^\alpha \quad (99)$$

— канонический тензор энергии–импульса (ТЭИ). Полученный закон является некоторым тензорным обобщением закона сохранения тока $\partial_\mu j^\mu = 0$. Мы это увидим чуть позже.

Данное определение ТЭИ имеет неопределенность, связанную с тем, что тензор вида

$$\Delta T_\nu^\mu \equiv \partial_\alpha G_\nu^{\mu\alpha},$$

где $G_\nu^{\mu\alpha}$ — произвольный тензор антисимметричный при перестановке ковариантных индексов $G_\nu^{\mu\alpha} = -G_\nu^{\alpha\mu}$, имеет 4–дивергенцию тождественно равную нулю:

$$\partial_\mu \Delta T_\nu^\mu = \partial_\mu \partial_\alpha G_\nu^{\mu\alpha} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\alpha - \partial_\alpha \partial_\mu) G_\nu^{\mu\alpha} = 0.$$

Поэтому к выше определенному каноническому выражению ТЭИ всегда можно добавить член вида ΔT_ν^α , не нарушив при этом закон сохранения. От указанной неопределенности можно избавиться, если наложить на ТЭИ с двумя ковариантными индексами условие симметричности:

$$\hat{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu} = \hat{T}^{\nu\mu},$$

подобрав соответствующего вида вклад ΔT_ν^α . Этого можно добиться, если сохраняется тензор момента энергии–импульса $\mathcal{M}^{\mu\nu\alpha} \equiv x^\mu \hat{T}^{\nu\alpha} - x^\nu \hat{T}^{\mu\alpha}$. Действительно:

$$\partial_\alpha \mathcal{M}^{\mu\nu\alpha} = (\partial_\alpha x^\mu) \hat{T}^{\nu\alpha} - (\partial_\alpha x^\nu) \hat{T}^{\mu\alpha} = \hat{T}^{\nu\mu} - \hat{T}^{\mu\nu} = 0.$$

Мы всегда будем использовать симметричный ТЭИ, а не канонический (в случае если они отличаются).

4. Найдем явный вид ТЭИ для ЭМ поля в отсутствие зарядов, т.е. когда Лагранжева плотность равна: $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. Тогда находим:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{16\pi} 2 (F^{\nu\mu} - F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4\pi} F^{\nu\mu}$$

и канонический ТЭИ равен:

$$T_\alpha^\nu = -\frac{1}{4\pi} F^{\nu\mu} \partial_\alpha A_\mu + \frac{1}{16\pi} \delta_\alpha^\nu F^2, \quad (100)$$

где $F^2 \equiv F_{\mu\beta} F^{\mu\beta}$. Полученный канонический ТЭИ ни калибровочно инвариантен, ни симметричен. Добавим к нему член вида

$$\Delta T_\alpha^\nu = \frac{1}{4\pi} \partial_\mu (F^{\nu\mu} A_\alpha),$$

который, используя уравнения Максвелла без зарядов $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, можно записать в виде:

$$\Delta T_\alpha^\nu = \frac{1}{4\pi} F^{\nu\mu} \partial_\mu A_\alpha.$$

Тогда мы получаем:

$$\hat{T}_\alpha^\nu = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\nu\mu} F_{\alpha\mu} - \frac{1}{4} \delta_\alpha^\nu F^2 \right). \quad (101)$$

Замечу, что след такого тензора равен нулю: $\hat{T}_\nu^\nu = 0$. Помимо этого, полученный ТЭИ является и калибровочно инвариантным и симметричным. Отныне мы всегда будем использовать именно этот ТЭИ и опустим крышку в его знаке.

5. Распишем покомпонентно полученный ТЭИ через ЭМ поля \vec{E} и \vec{B} :

$$T_0^0 = -\frac{1}{4\pi} \left[F^{0\mu} F_{0\mu} - \frac{1}{4} \delta_0^0 F^2 \right] = -\frac{1}{4\pi} \left[F^{0i} F_{0i} - \frac{1}{2} (\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \right] = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (102)$$

Величина $W \equiv T_0^0$ является плотностью энергии ЭМ поля. Действительно, Лагранжева плотность ЭМ поля равна:

$$\mathcal{L} \propto F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \propto \vec{E}^2 - \vec{B}^2 \equiv T - U,$$

где $T \propto E_i^2 \propto (\partial_0 A_i - \partial_i A_0)^2$ — это кинетическая энергия ЭМ поля, т.к. содержит производные по времени от канонических переменных $\partial_0 A_i$, т.е. зависит от скорости изменения этих величин; при этом $U \propto B_i^2 \propto (\epsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2$ не содержит производных по времени, а потому является потенциальной энергией⁶. Т.к. Лагранжева плотность равна $\mathcal{L} = T - U$, то величина $W = T + U \propto \vec{E}^2 + \vec{B}^2$ должна быть плотностью энергии.

Рассмотрим теперь 3-вектор:

$$S_i = -c T_i^0 = \frac{c}{4\pi} F^{0\mu} F_{i\mu} = \frac{c}{4\pi} F^{0j} F_{ij} = \frac{c}{4\pi} (-E_j) (-\epsilon_{ijk} B_k) = \frac{c}{4\pi} \epsilon_{ijk} E_j B_k.$$

Величина

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}] \quad (103)$$

— называется вектором Умова–Пойнтинга.

Чтобы понять физический смысл вектора \vec{S} , рассмотрим нулевую компоненту закона сохранения энергии–импульса умноженную на скорость света:

$$c \partial_\mu T_0^\mu = c \partial_0 T_0^0 + c \partial_i T_0^i = c \partial_0 W + \partial_i S_i = \frac{\partial}{\partial t} W + \text{div } \vec{S} = 0.$$

Т.е. мы получаем уравнение непрерывности или закон сохранения энергии ЭМ поля. Т.е. вектор \vec{S} — это вектор, определяющий поток ЭМ энергии.

⁶Напомню, что выше при рассмотрении волн в кристаллической решетке мы получили Лагранжеву плотность вида $\mathcal{L} = \dot{\phi}^2/\bar{c}^2 - \phi'^2$, где при взятии непрерывного предела член $\dot{\phi}^2$, содержащий производные по времени, получался из кинетической энергии шариков, а член ϕ'^2 , содержащий только производную по пространственному направлению — из потенциальной энергии пружин.

6. В присутствии зарядов ситуация изменится. Умножим обе стороны уравнения движения заряда: $m c \frac{du^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$ на $\delta^{(4)} [x - z(s)]$ и проинтегрируем по $\int ds$ — собственному времени. Получим уравнение:

$$m c \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{du^\mu}{ds} \delta^{(4)} [x - z(s)] = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} ds u_\nu \delta^{(4)} [x - z(s)] = \frac{1}{c^2} F^{\mu\nu} j_\nu.$$

Проинтегрируем левую часть этого уравнения по частям, используя равенство:

$$\frac{d}{ds} \delta^{(4)} [x - z(s)] = - (\partial_\nu \delta^{(4)} [x - z(s)]) \frac{dz^\nu}{ds} = - (\partial_\nu \delta^{(4)} [x - z(s)]) u^\nu,$$

следующее из правила дифференцирования сложной функции. Тогда получаем:

$$m c \partial_\nu \int ds u^\nu u^\mu \delta^{(4)} [x - z(s)] = \frac{1}{c^2} F^{\mu\nu} j_\nu$$

или что тоже самое

$$\partial_\nu T_{part}^{\nu\mu} = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu, \quad (104)$$

где мы ввели

$$T_{part}^{\mu\nu} = m c^2 \int ds u^\mu u^\nu \delta^{(4)} [x - z(s)] \quad (105)$$

— ТЭИ точечной частицы. Действительно

$$T_{part}^{\mu\nu} = m c^2 \int dt \frac{ds}{dt} u^\mu u^\nu \delta(x_0 - ct) \delta^{(3)} [\vec{x} - \vec{z}(t)] = m c \frac{ds}{dt} u^\mu u^\nu \delta^{(3)} [\vec{x} - \vec{z}(t)].$$

В частности

$$T_{part}^{00} = m c^2 u^0 \delta^{(3)} [\vec{x} - \vec{z}(t)]$$

— плотность энергии точечной частицы, т.к. $\int_M d^3V T_{part}^{00} = m c^2 u^0 = p^0 c$, где M область 3-мерного пространства, включающая частицу в момент времени t . Далее

$$T_{part}^{0i} = m c^2 u^i \delta^{(3)} [\vec{x} - \vec{z}(t)] = T_{part}^{00} v^i$$

— плотность импульса точечной частицы. В последней формуле мы воспользовались тем, что $u^i = dz^i/ds$, а $v^i = dz^i/dt$.

Как мы видим, в присутствии поля ТЭИ частиц не сохраняется, т.к. в силу (104) мы имеем $\partial_\nu T_{part}^{\nu\mu} \neq 0$: поле очевидно может уносить энергию в виде излучения или же привносить ее разгоняя частицы. Так же в присутствии частиц не будет сохраняться ТЭИ поля $T_{field}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} (F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^2)$, рассмотренный нами выше в этой лекции. Однако, как мы сейчас увидим, будет сохраняться суммарный ТЭИ для частиц и поля $T^{\mu\nu} = T_{part}^{\mu\nu} + T_{field}^{\mu\nu}$. Действительно покажем, что выполняется уравнение —

$$\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu = -\partial_\nu T_{field}^{\mu\nu} \quad (106)$$

— баланса энергии частиц и ЭМ поля. Определим 4-вектор $4\pi f^\mu \equiv -\frac{4\pi}{c} F^{\mu\nu} j_\nu$ и подставим в него выражение для плотности 4-тока, следующее из уравнений Максвелла $j_\nu = \frac{c}{4\pi} \partial^\mu F_{\mu\nu}$. Тогда

$$4\pi f^\mu = -F^{\mu\alpha} \partial^\nu F_{\alpha\nu} = -\partial^\nu (F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}) + F_{\alpha\nu} (\partial^\nu F^{\mu\alpha}).$$

Воспользуемся теперь уравнением:

$$\partial^\nu F^{\mu\alpha} + \partial^\alpha F^{\nu\mu} + \partial^\mu F^{\alpha\nu} = 0, \quad (107)$$

которое тождественно эквивалентно первой паре уравнений Максвелла $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0$ и, как легко проверить, тождественно выполняется, если $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Проверьте оба последних утверждения.

Умножая рассматриваемое уравнение на $F_{\alpha\nu}$ и суммируя по повторяющимся индексам, получаем, что

$$F_{\alpha\nu} \partial^\nu F^{\mu\alpha} = -\frac{1}{2} F_{\alpha\nu} \partial^\mu F^{\alpha\nu} = -\frac{1}{4} \partial^\mu (F^2).$$

Тогда $4\pi f^\mu = -\partial^\nu [F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F^2]$. Т.е. действительно $f^\mu = -\partial_\nu T_{field}^{\nu\mu}$ и уравнение баланса энергии частиц и ЭМ поля верно.

7. Следовательно, мы имеем закон сохранения полного ТЭИ системы частиц и ЭМ поля

$$\partial_\nu (T_{part}^{\nu\mu} + T_{field}^{\nu\mu}) = 0. \quad (108)$$

Рассмотрим нулевую компоненту этого уравнения:

$$0 = \partial_\mu (T_{part}^{\mu 0} + T_{field}^{\mu 0}) = \partial_0 (T_{part}^{00} + T_{field}^{00}) + \partial_i (T_{part}^{i0} + T_{field}^{i0})$$

Проинтегрируем это уравнение по большой области M 3-мерного пространства в данный момент времени. Предполагая, что границу этой области в выбранный момент времени частицы не пересекают, мы получаем интегральное уравнение:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_M W d^3V + \sum_{q=1}^N \mathcal{E}_q \right] = - \oint_{\partial M} \vec{S} d\vec{s},$$

где \mathcal{E}_q — энергия q -й частицы, а ∂M — граница области M . Т.е. энергия системы частиц и поля в некоторой области пространства, включающей в себя все частицы системы, изменяется только, если существует поток энергии ЭМ поля через границу рассматриваемой области.

Вопросы и задачи

- Подумайте самостоятельно какой закон сохранения следует из инвариантности действия/Лагранжиана относительно преобразований Лоренца.
- Убедитесь, что к ТЭИ всегда можно добавить и тензор вида $\Delta T_{\mu\nu} \equiv [\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha] T$ для произвольного скалярного $T(x)$.
- Подумайте какой физический смысл имеют компоненты T^{ij} , $i = 1, 2, 3$ ТЭИ? T^{ij} называется тензором напряжений Максвелла. Обратите внимание, что

$$0 = \partial^\mu T_\mu^i = \partial^0 T_0^i + \partial^j T_j^i = \frac{\partial}{c \partial t} S^i + \partial^j T_j^i$$

тоже определяет три уравнения непрерывности.

- Простейшее действие для скалярного поля ϕ , которое инвариантно относительно преобразований Лоренца, имеет следующий вид:

$$S = \int d^4x [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)],$$

где $V(\phi)$ — произвольный полином от ϕ . Найдите уравнения движения и тензор энергии-импульса следующий из этого действия. Что является плотностью энергии, а что является аналогом вектора Пойнтинга в этом случае?

Лекция VIII; Электро- и магнито-статика, дипольный и квадрупольный моменты, мультипольное разложение, магнитный дипольный момент.

1. Начиная с этой лекции, мы будем решать уравнения Максвелла:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

относительно A_μ при заданном j^ν . Начнем мы со статических полей, создаваемых либо статическими зарядами, либо же стационарными токами.

Для начала обсудим общие свойства рассматриваемого уравнения. Подставим в него $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \equiv \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\nu.$$

В полученном уравнении $\partial_\mu \partial^\mu \equiv \square = \partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, где $\Delta \equiv \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. А оператор \square называется оператором д'Аламбера.

Полученное уравнение выглядит довольно сложно. Однако у нас есть некоторая свобода в выборе A_μ , связанная с калибровочной инвариантностью $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha$. Подберем функцию $\alpha(t, x, y, z)$ таким образом, чтобы $\partial^\mu A'_\mu \equiv \partial^\mu A_\mu - \partial^\mu \partial_\mu \alpha = 0$, т.е. $\partial^\mu \partial_\mu \alpha = \partial^\mu A_\mu$. В рассматриваемых здесь условиях, для любого наперед заданного A_μ всегда можно подобрать такую α . Ниже мы будем использовать вектор потенциал, удовлетворяющий этому условию, и опустим штрих в его обозначении.

Условие

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{109}$$

фиксирующее калибровочную свободу, называется калибровкой Лоренца. Если выбрать вектор потенциал, удовлетворяющий этому условию, то вторая пара уравнений Максвелла, записанная как уравнение на A_μ , сведется к:

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \tag{110}$$

Напомню, что в первой лекции мы получили аналогичное 2-мерное уравнение:

$$\square \phi(t, x) \equiv \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(t, x) = 0,$$

описывающее звуковые волны в кристалле. В случае электродинамики мы имеем дело, вообще говоря, с четырьмя уравнениями — для каждого $\nu = 0, 1, 2, 3$. А так же с правой стороны уравнения (110) имеется источник, отвечающий электрическому току. Замечу, что для поля $\phi(t, x)$ тоже можно добавить источник с правой стороны соответствующего уравнения. Физический смысл такого источника состоит как раз в том, что мы можем дислоцировать шарики из их положения равновесия. Действительно, действие внешней силы

на i -й шарик — на $\phi_i(t)$ (или же на $\phi(t, x)$ в некоторой точке x) — проявляется на правой стороне рассматриваемого уравнения в виде источника. *Покажите это самостоятельно.*

2. Найдем какое поле создает покоящийся в начале координат точечный заряд. Есть много способов решить эту задачу. Мы выберем не самый простой, но фундаментальный способ. Он даст нам метод решения аналогичных более сложных задач.

Мировая линия заряда, когда он покоится в начале координат, имеет вид $z^\mu(t) = (t, 0, 0, 0)$. Поэтому компоненты тока следующие:

$$j^0 = e c \int dt \frac{dz^0}{dt} \delta(x^0 - z^0) \delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{z}(t)] = e c \delta^{(3)}(\vec{x}),$$

т.к. $\vec{z}(t) \equiv 0$. При этом $\vec{j} = 0$ опять же потому что $\vec{z}(t) \equiv 0$. Итак, мы должны найти частное решение неоднородной системы уравнений:

$$\begin{aligned} \square A^0 &= 4\pi e \delta^{(3)}(\vec{x}), \\ \square \vec{A} &= 0. \end{aligned}$$

Нас интересует решение этой системы уравнений с граничным условием, что A_μ равно нулю на пространственной бесконечности. (Ясно, что точечный заряд создает нулевое поле очень далеко от его положения.) Тогда видно, что точечный покоящийся заряд не создает поле \vec{A} . Т.е. решение второго уравнения — $\vec{A} = 0$. В следующей лекции мы будем обсуждать ненулевые решения однородных уравнений (при $j^\nu = 0$), но они не создаются источниками на правой стороне таких уравнений, а существуют без источников. И они не равны нулю на бесконечности.

Итак, в рассматриваемом случае, $\vec{B} \equiv \text{rot} \vec{A} = 0$ — покоящийся электрический заряд не создает магнитного поля. Уравнение же на $A^0 \equiv \varphi$ имеет вид:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 4\pi e \delta^{(3)}(\vec{x}).$$

Из калибровочного условия $\partial_\mu A^\mu \equiv \partial_t \varphi - \vec{\partial} \vec{A} = 0$ и $\vec{A} = 0$ следует, что φ не зависит от времени. Следовательно, мы должны решать уравнение Пуассона:

$$\Delta \varphi = -4\pi e \delta^{(3)}(\vec{x}). \quad (111)$$

Разложим решение этого уравнения в интеграл Фурье:

$$\varphi(\vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \tilde{\varphi}(\vec{k}), \quad (112)$$

где $\tilde{\varphi}(\vec{k})$ — Фурье гармоники поля $\varphi(\vec{x})$. Математический смысл преобразования Фурье я обсуждаю в конце этой лекции. Сейчас же только замечу, что несмотря на то, что $e^{i\vec{k}\vec{x}}$ комплексная функция, результат ее интегрирования по $d^3 k$ является действительной функцией $\varphi(\vec{x})$, так как $\tilde{\varphi}^*(\vec{k}) = \tilde{\varphi}(-\vec{k})$, как следует из обратного преобразования Фурье.

Далее вспомним, что

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) \equiv \delta(x) \delta(y) \delta(z) = \int \frac{dk_x}{2\pi} e^{ik_x x} \int \frac{dk_y}{2\pi} e^{ik_y y} \int \frac{dk_z}{2\pi} e^{ik_z z} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}}.$$

Таким образом, уравнение Пуассона сводится к:

$$\Delta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \tilde{\varphi}(\vec{k}) = -4\pi e \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}}.$$

Здесь оператор Лапласа действует только на \vec{x} , поэтому его можно внести под знак интеграла и применить прямо к функции $e^{i\vec{k}\vec{x}}$:

$$\begin{aligned} \Delta e^{i\vec{k}\vec{x}} &\equiv \partial_j \partial_j e^{ik_l x_l} = \partial_j [e^{ik_l x_l} \partial_j (i k_n x_n)] = \partial_j \left[i k_n \frac{\partial x_n}{\partial x_j} e^{ik_l x_l} \right] = \partial_j [i k_n \delta_{nj} e^{ik_l x_l}] = \\ &= i k_j \partial_j e^{ik_l x_l} = (i k_j i k_j) e^{ik_l x_l} = -k_j k_j e^{i\vec{k}\vec{x}} = -\vec{k}^2 e^{i\vec{k}\vec{x}}. \end{aligned}$$

Поэтому рассматриваемое уравнение сводится к

$$\int d^3 k [k^2 \tilde{\varphi}(k) - 4\pi e] e^{i\vec{k}\vec{x}} = 0.$$

Но т.к. набор гармоник $e^{i\vec{k}\vec{x}}$ является полным базисом в пространстве функций, то это равенство может быть верно тогда и только тогда, когда

$$k^2 \tilde{\varphi}(k) - 4\pi e = 0.$$

Как мы видим, после преобразования Фурье, линейное дифференциальное уравнение свелось к простому алгебраическому уравнению. В этом и был смысл применения преобразования Фурье. Зная решение $\tilde{\varphi}(k) = 4\pi e/k^2$ рассматриваемого алгебраического уравнения, мы можем найти искомое решение исходного дифференциального уравнения:

$$\phi(x) = 4\pi e \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{k^2}.$$

Чтобы вычислить полученный интеграл, выберем в пространстве \vec{k} сферическую систему координат:

$$\begin{aligned} k_x &= k \cos \phi \sin \theta, \\ k_y &= k \sin \phi \sin \theta \\ k_z &= k \cos \theta \\ k &\in [0, +\infty), \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi] \end{aligned}$$

и направим ось k_z вдоль вектора \vec{x} . Тогда

$$\begin{aligned} \int d^3 k \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{k^2} &= \int_0^{+\infty} dk k^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{ikx \cos \theta}}{k^2} = 2\pi \int_0^{+\infty} dk \int_{-1}^1 d \cos \theta e^{ikx \cos \theta} = \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} dk \frac{1}{ikx} (e^{ikx} - e^{-ikx}) = \frac{4\pi}{x} \int_0^{+\infty} dk \frac{\sin kx}{k} = \frac{4\pi}{x} \int_0^{+\infty} d\kappa \frac{\sin \kappa}{\kappa}, \end{aligned}$$

где $\kappa = kx$. В последнем равенстве мы получаем табличный интеграл, известный вам из курса математического анализа. Он равен $\int_0^{+\infty} d\kappa \frac{\sin \kappa}{\kappa} = \frac{\pi}{2}$. Собирая все полученные формулы вместе, получаем, что решение уравнения Пуассона имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{e}{|\vec{x}|} \quad (113)$$

и определяет потенциал Кулона. Действительно, мы знаем, что покоящийся точечный заряд должен создавать статическое поле Кулона. В этом случае уравнения Максвелла имеют точное решение.

Аналогичным образом, N зарядов, зафиксированных в точках \vec{r}_q , $q = 1, \dots, N$ приводят к уравнению:

$$\Delta\varphi = -4\pi \sum_{q=1}^N e_q \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}_q), \quad (114)$$

решение которого имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{q=1}^N \frac{e_q}{|\vec{x} - \vec{r}_q|}. \quad (115)$$

Замечу, что полученное решение физически осмысленно, если заряды фиксированы в своих положениях какими-то внешними силами. Иначе, под действием сил взаимодействия между ними, они бы начали двигаться. Их мировые линии определялись бы решениями уравнений: $m_q c \frac{du_q^\mu}{ds_q} = \frac{e_q}{c} F_\nu^\mu u_q^\nu$, где $F_{\mu\nu}$ — ЭМ поле создаваемое самими же зарядами. Решения такой системы уравнений не отвечали бы покоящимся зарядам. Т.е. правая часть в уравнении Пуассона имела бы не статические источники. Я все это отметил для того, чтобы подчеркнуть, что замкнутая система уравнений, описывающая несколько частиц вместе с ЭМ полем, не имеет точного решения в отличие от ситуации с одним точечным зарядом.

3. Рассмотрим как выглядит электрическое поле, создаваемое системой статических зарядов, на больших расстояниях по сравнению с размерами этой системы:

$$\varphi(R) = \sum_{q=1}^N \frac{e_q}{|\vec{R} - \vec{r}_q|}.$$

Выберем центр СК внутри системы зарядов. Тогда, т.к. центр СК находится внутри системы зарядов, а размеры этой системы малы по сравнению с $|\vec{R}| \equiv R$, то $R \gg |\vec{r}_q|$, $\forall q$. Поэтому все члены в сумме, определяющей $\varphi(R)$, можно разложить в ряд Тейлора по степеням \vec{r}_q . При разложении до линейного члена, мы имеем:

$$\varphi(R) \approx \sum_q \left(\frac{e_q}{R} - e_q \vec{r}_q \vec{\nabla} \frac{1}{R} \right),$$

где $\vec{\nabla} \equiv \partial/\partial \vec{R}$. Следовательно в линейном порядке

$$\varphi(R) \approx \frac{\sum_q e_q}{R} - \left(\sum_q e_q \vec{r}_q \right) \vec{\nabla} \frac{1}{R}. \quad (116)$$

Здесь $\sum_q e_q = Q$ — полный заряд системы, а

$$\vec{d} \equiv \sum_{q=1}^N e_q \vec{r}_q \quad (117)$$

— дипольный момент системы зарядов.

Если $Q = 0$, то величина \vec{d} не зависит от выбора начала СК. Действительно, если сдвинуть начало СК $\vec{r}'_q = \vec{r}_q + \vec{a}$, $\forall q$, то вектор дипольного момента изменится следующим образом:

$$\vec{d}' = \sum_q e_q (\vec{r}_q + \vec{a}) = \sum_q e_q \vec{r}_q + \vec{a} \sum_q e_q = \vec{d} + 0 = \vec{d}.$$

Если полный заряд системы равен нулю, то при больших R потенциал имеет вид

$$\varphi^{(1)}(R) = -\vec{d} \vec{\nabla} \frac{1}{R} = \frac{(\vec{d}, \vec{R})}{R^3}, \quad (118)$$

а напряженность поля равна

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \frac{(\vec{d}, \vec{R})}{R^3} = \frac{3(\vec{n}, \vec{d})\vec{n} - \vec{d}}{R^3}, \quad (119)$$

где $\vec{n} = \vec{R}/R$.

Разложим теперь $\varphi(R)$ до второй степени по \vec{r}_q . Тогда

$$\varphi^{(2)}(R) = \frac{1}{2} \left(\sum_q e_q x_q^i x_q^j \right) \frac{\partial^2}{\partial X^i \partial X^j} \frac{1}{R},$$

здесь x_q^i , $i = 1, 2, 3$ — координаты вектора \vec{r}_q , а X^i — координаты вектора \vec{R} . Выражение $\sum_q e_q x_q^i x_q^j$ — симметричный 3×3 тензор с индексами i, j . Следовательно наивно $\varphi^{(2)}(R)$ зависит от $\frac{3(3+1)}{2} = 6$ независимых компонент этого тензора. Однако, $\Delta \frac{1}{R} = \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial X^i \partial X^j} \frac{1}{R} = 0$, ведь в силу того, что мы смотрим на систему с больших расстояний $R \neq 0$. Поэтому можно представить

$$\varphi^{(2)}(R) = \frac{1}{2} \sum_q e_q \left(x_q^i x_q^j - \frac{1}{3} \vec{r}_q^2 \delta^{ij} \right) \frac{\partial^2}{\partial X^i \partial X^j} \frac{1}{R},$$

где тензор $D_{ij} = \sum_q e_q (3 x_q^i x_q^j - \vec{r}_q^2 \delta^{ij})$ называется квадрупольным моментом системы. Из его определения следует, что его след $D_{jj} = 0$, т.е. это симметричный тензор с 5-ю независимыми компонентами. Таким образом:

$$\varphi^{(2)}(R) = \frac{D_{ij}}{6} \frac{\partial^2}{\partial X^i \partial X^j} \frac{1}{R} = \frac{D_{ij} n_i n_j}{2 R^3}. \quad (120)$$

При дальнейшем разложении по степеням \vec{r}_q выражения под знаком суммы в определении $\varphi(R)$, мы получаем мультипольные моменты системы зарядов.

4. Рассмотрим теперь такую же систему зарядов во внешнем электрическом поле. Ее полная потенциальная энергия равна:

$$U = \sum_q e_q \varphi(r_q).$$

Выберем начало СК внутри системы зарядов. Предположим, что внешнее поле слабо меняется внутри системы, т.е. является слабо неоднородным.

Тогда можно разложить $\varphi(r_q)$ по степеням \vec{r}_q вокруг нуля. Получаем:

$$\begin{aligned} U &= \sum_q \left(e_q \varphi(0) + e_q \vec{r}_q \vec{\nabla} \varphi(0) + \dots \right) = \varphi(0) \sum_q e_q + \left(\sum_q e_q \vec{r}_q \right) \vec{\nabla} \varphi(0) + \dots = \\ &= \varphi(0) Q - \left(\vec{E}_0, \vec{d} \right) + \dots, \end{aligned}$$

где $\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} \varphi(0)$ — электрическое поле в начале СК.

Таким образом, полная сила, действующая на систему, равна:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{E}_0 Q + \vec{\nabla} \left(\vec{d}, \vec{E}_0 \right) + \dots, \quad (121)$$

а полный момент силы, действующей на систему, равен

$$\vec{K} \approx \sum_q \left[\vec{r}_q \times e_q \vec{E}_0 \right] = \left[\vec{d} \times \vec{E}_0 \right]. \quad (122)$$

Следующий член в разложении U равен:

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_q e_q x_q^i x_q^j \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial X^i \partial X^j}.$$

Т.к. φ удовлетворяет уравнению Лапласа, ведь его источник находится далеко от начала СК, находящегося внутри системы зарядов, т.е. $\Delta \varphi = \delta_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^i \partial X^j} = 0$, то

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial X^i \partial X^j} \sum_q e_q \left(x_q^i x_q^j - \frac{1}{3} r_q^2 \delta_{ij} \right) = \frac{D_{ij}}{6} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial X^i \partial X^j}. \quad (123)$$

Аналогично можно показать, что общий член в разложении $U = \sum_q e_q \varphi(r_q)$ по степеням r_q может быть выражен через мультипольные моменты.

5. Рассмотрим теперь две системы зарядов с общими зарядами равными нулю $Q_{1,2} = 0$, но с ненулевыми дипольными моментами $\vec{d}_{1,2} \neq 0$. Пусть расстояние между этими системами велико по сравнению с их размерами. Нас интересует лидирующий вклад в потенциальную энергию их взаимодействия. Можно рассмотреть ситуацию с такой точки зрения, что одна из систем зарядов находится в поле созданном другой: $U = -\vec{d}_2 \vec{E}_1$, где \vec{E}_1 поле, созданное \vec{d}_1 . Т.е. ответ следующий:

$$U \approx \frac{(\vec{d}_1, \vec{d}_2) R^2 - 3 (\vec{d}_1, \vec{R}) (\vec{d}_2, \vec{R})}{R^5} \quad (124)$$

— потенциальная энергия взаимодействия двух диполей. Аналогично можно получить потенциальную энергию взаимодействия между двумя любыми мультипольными моментами.

6. Перейдем теперь к обсуждению статических магнитных полей. Найдем магнитное поле, создаваемое зарядами, совершающими финитное движение. Такое движение имеет стационарный характер и поэтому можно рассмотреть среднее по времени значение магнитного поля $\langle \vec{B} \rangle$. Токи, создающие такое не зависящее от времени поле, будут функциями только координат, но не времени.

Магнитное поле, создаваемое токами, является решением уравнений:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \text{rot } \vec{A}, \\ \text{rot } \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned}$$

Усредняя их по времени, получаем:

$$\begin{aligned} \langle \vec{B} \rangle &= \text{rot } \langle \vec{A} \rangle, \\ \text{rot } \langle \vec{B} \rangle &= \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j} \rangle, \end{aligned}$$

т.к. среднее по времени производной от величины, меняющейся в конечных пределах, равно нулю: $\langle \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rangle = 0$.

Тогда уравнение на среднее от вектор потенциала имеет вид:

$$\text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Для упрощения формул, мы не выписываем далее знак усреднения, имея его ввиду. На правой стороне последней формулы ток \vec{j} не зависит от времени.

Для упрощения последней формулы, используем произвол, связанный с калибровочной инвариантностью, чтобы зафиксировать Кулоновскую калибровку:

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (125)$$

Тогда уравнение на \vec{A} упрощается до:

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (126)$$

Мы знаем, что решение уравнения Пуассона $\Delta \varphi(\vec{x} - \vec{r}) = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r})$, где оператор Лапласа Δ действует только на \vec{x} , а \vec{r} играет роль параметра, имеет вид $\varphi(\vec{x} - \vec{r}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}|}$. Это знание помогает нам найти частное решение уравнения (126):

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(r)}{|\vec{x} - \vec{r}|} d^3r. \quad (127)$$

Действительно:

$$\Delta_x \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(r)}{|\vec{x} - \vec{r}|} d^3r = \frac{1}{c} \int \vec{j}(r) \Delta_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}|} d^3r = -\frac{4\pi}{c} \int \vec{j}(r) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}) d^3r = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(x),$$

где учтено, что Δ_x действует только на \vec{x} и поэтому его можно внести под знак интеграла по r . Зная векторный потенциал $\vec{A}(x)$, мы можем найти магнитное поле \vec{B} :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(r)}{|\vec{x} - \vec{r}|} d^3r = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j} \times (\vec{x} - \vec{r})]}{|\vec{x} - \vec{r}|^3} d^3r \quad (128)$$

— закон Био–Савара.

7. Если мы имеем N точечных зарядов, то $\vec{j}(x) = \left\langle \sum_{q=1}^N e_q \dot{\vec{r}}_q(t) \delta^{(3)}[\vec{x} - \vec{r}_q(t)] \right\rangle$, где мы подразумеваем усреднение по времени. Следовательно создаваемое ими поле равно:

$$\langle \vec{A}(x) \rangle = \frac{1}{c} \int \frac{d^3r}{|\vec{x} - \vec{r}|} \left\langle \sum_{q=1}^N e_q \dot{\vec{r}}_q(t) \delta^{(3)}[\vec{r} - \vec{r}_q(t)] \right\rangle = \frac{1}{c} \sum_{q=1}^N \left\langle \frac{e_q \dot{\vec{r}}_q(t)}{|\vec{x} - \vec{r}_q(t)|} \right\rangle.$$

Рассмотрим среднее поле, создаваемое системой стационарно движущихся зарядов, на больших расстояниях от этой системы:

$$\langle \vec{A}(R) \rangle = \frac{1}{c} \left\langle \sum_q \frac{e_q \dot{\vec{r}}_q}{|\vec{R} - \vec{r}_q|} \right\rangle.$$

Выберем начало СК внутри системы токов. Тогда выражение под суммой можно разложить по степеням \vec{r}_q . В лидирующем порядке имеем:

$$\langle \vec{A}(R) \rangle \approx \frac{1}{cR} \left\langle \sum_q e_q \dot{\vec{r}}_q \right\rangle - \frac{1}{c} \left\langle \sum_q e_q \dot{\vec{r}}_q (\vec{r}_q, \vec{\nabla}) \frac{1}{R} \right\rangle.$$

Первый из этих вкладов можно переписать как $\left\langle \sum_q e_q \dot{\vec{r}}_q \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \sum_q e_q \vec{r}_q \right\rangle$. Но среднее по времени значение производной от величины, которая меняется в конечном интервале, равно нулю. Следовательно:

$$\langle \vec{A}(R) \rangle \approx -\frac{1}{c} \left\langle \sum_q e_q \dot{\vec{r}}_q (\vec{r}_q, \vec{\nabla}) \frac{1}{R} \right\rangle = \frac{1}{cR^3} \left\langle \sum_q e_q \dot{\vec{r}}_q (\vec{r}_q, \vec{R}) \right\rangle.$$

Т.к. \vec{R} не зависит от времени, то

$$\sum_q e_q (\vec{R}, \vec{r}_q) \frac{d\vec{r}_q}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_q e_q \vec{r}_q (\vec{r}_q, \vec{R}) + \frac{1}{2} \sum_q e_q [\dot{\vec{r}}_q (\vec{r}_q, \vec{R}) - \vec{r}_q (\dot{\vec{r}}_q, \vec{R})].$$

Следовательно, положив $\langle d/dt \dots \rangle = 0$, имеем

$$\langle \vec{A}(R) \rangle = \frac{1}{2cR^3} \sum_q e_q \left[\langle \dot{\vec{r}}_q (\vec{r}_q, \vec{R}) \rangle - \langle \vec{r}_q (\dot{\vec{r}}_q, \vec{R}) \rangle \right].$$

Введем вектор магнитного момента системы:

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \left\langle \sum_q e_q [\vec{r}_q \times \dot{\vec{r}}_q] \right\rangle. \quad (129)$$

Тогда

$$\langle \vec{A}(R) \rangle = \frac{[\vec{m} \times \vec{R}]}{R^3} = \left[\vec{\nabla} \frac{1}{R} \times \vec{m} \right]. \quad (130)$$

Зная $\langle \vec{A}(R) \rangle$, нетрудно найти магнитное поле:

$$\langle \vec{B}(R) \rangle = \frac{3\vec{n} (\vec{m}, \vec{n}) - \vec{m}}{R^3}, \quad (131)$$

где, как обычно, $\vec{n} = \vec{R}/R$.

Если для всех частиц, входящих в систему, отношение заряда к массе $e_q/m_q = e/m$ одинаково, то

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2c} \left\langle \sum_q e_q [\vec{r}_q \times \dot{\vec{r}}_q] \right\rangle = \frac{e}{2mc} \left\langle \sum_q m_q [\vec{r}_q \times \dot{\vec{r}}_q] \right\rangle.$$

Теперь, если скорости всех зарядов малы $\dot{\vec{r}}_q \ll c$, то $m_q \dot{\vec{r}}_q = \vec{p}_q$. Следовательно

$$\vec{m} = \frac{e}{2mc} \sum_q \langle [\vec{r}_q \times \vec{p}_q] \rangle = \frac{e}{2mc} \vec{M}, \quad (132)$$

где \vec{M} — механический момент системы, а отношение модуля вектора \vec{m} к модулю вектора \vec{M} , т.е. $e/2mc$ в нашем случае, называется гиромагнитным отношением.

8. Рассмотрим систему зарядов во внешнем постоянном магнитном поле. Средняя сила, действующая на систему, равна

$$\langle \vec{F} \rangle = \sum_q \frac{e_q}{c} \langle [\dot{\vec{r}}_q \times \vec{B}] \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \sum_q \frac{e_q}{c} [\vec{r}_q \times \vec{B}] \right\rangle = 0.$$

При этом среднее значение момента сил равно:

$$\langle \vec{K} \rangle = \sum_q \frac{e_q}{c} \langle [\vec{r}_q \times [\dot{\vec{r}}_q \times \vec{B}]] \rangle \neq 0.$$

Но

$$\vec{K} = \sum_q \frac{e_q}{c} \left\{ \dot{\vec{r}}_q (\vec{r}_q, \vec{B}) - \vec{B} (\dot{\vec{r}}_q, \vec{r}_q) \right\} = \sum_q \frac{e_q}{c} \left\{ \dot{\vec{r}}_q (\vec{r}_q, \vec{B}) - \frac{1}{2} \vec{B} \frac{d}{dt} r_q^2 \right\},$$

поэтому

$$\langle \vec{K} \rangle = \sum_q \frac{e_q}{c} \langle \dot{\vec{r}}_q (\vec{r}_q, \vec{B}) \rangle = \frac{1}{2c} \sum_q e_q \left\{ \langle \dot{\vec{r}}_q (\vec{r}_q, \vec{B}) \rangle - \langle \vec{r}_q (\dot{\vec{r}}_q, \vec{B}) \rangle \right\},$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем же трюком, что и при выводе формулы для $\langle \vec{A} \rangle$ выше. Таким образом:

$$\langle \vec{K} \rangle = [\vec{m} \times \vec{B}]. \quad (133)$$

Рассмотрим вращение механического момента системы под действием внешнего момента сил:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} \equiv \langle \vec{K} \rangle = [\vec{m} \times \vec{B}].$$

Пусть теперь отношение заряда к массе, e_q/m_q , для всех частиц системы имеет одно и то же значение. Тогда

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -[\vec{\Omega} \times \vec{m}], \quad (134)$$

где $\vec{\Omega} \equiv \frac{e}{2mc} \vec{B}$ — частота Лармора. Полученное уравнение определяет прецессию магнитного момента системы во внешнем магнитном поле.

9. Аппендикс. О математическом смысле преобразования Фурье. Не претендуя на математическую строгость, поясним смысл разложения Фурье. Оно представляет собой разложение функции по полному базису функций на пространстве R^3 (в рассматриваемом нами случае). Дело в том, что пространство функций на некотором многообразии является (бесконечномерным и даже континуальным) векторным пространством, в котором можно ввести базис. Удобным базисом в пространстве функций на R^3 является набор плоских волн $e^{i\vec{k}\vec{x}}$ для все возможных \vec{k} , которые как бы нумеруют вектора в базисе. Рассматриваемый базис ортонормирован:

$$\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\vec{x}} e^{i\vec{k}'\vec{x}} = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$$

и удовлетворяет условию полноты:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\vec{x}} e^{i\vec{k}\vec{x}'} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}').$$

Поясним все это на примере обычного векторного пространства. D -мерный Вектор \vec{v} можно разложить по полному ортонормированному базису \vec{e}_a , $a = 1, \dots, D$ очевидным образом $\vec{v} = \sum_a v_a \vec{e}_a$. Т.к. рассматриваемый базис ортонормирован, то $(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \delta_{ab}$, а в силу своей полноты, он удовлетворяет условию: $\sum_a e_a^i e_a^j = \delta^{ij}$. Из условия полноты мы можем найти компоненты вектора в данном базисе. Действительно, умножим обе стороны условия полноты $\sum_a e_a^i e_a^j = \delta^{ij}$ на v^j и просуммируем по j . В результате мы получим

$$\sum_a v_a e_a^i = v^i \iff \sum_a v_a \vec{e}_a = \vec{v},$$

где $v_a \equiv v^j e_a^j \equiv (\vec{v}, \vec{e}_a)$

В случае пространства функций мы имеем дело с бесконечной размерностью и вместо векторных индексов i, j мы имеем континуальный индекс \vec{x}, \vec{x}' , а вместо индексов a, b , нумерующих базисные вектора, мы имеем \vec{k}, \vec{k}' . Вместо сумм — имеем интегралы, а вместо символов Кронекера δ^{ij} и δ_{ab} — δ -функции, $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$ и $\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$. При этом вместо проекций вектора \vec{v} на оси координат — v_a — мы имеем — Фурье гармоники $\tilde{\varphi}(\vec{k})$. Замечу так же, что вместо уравнения $v_a = (\vec{v}, \vec{e}_a)$, определяющего проекцию вектора \vec{v} на a -ю ось, и следующего из уравнения, утверждающего полноту базиса, мы имеем уравнение $\tilde{\varphi}(\vec{k}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \varphi(\vec{x})$, следующее из полноты набора гармоник $e^{i\vec{k}\vec{x}}$.

Вопросы и задачи

- Решите уравнение в R^3 :

$$\left(\Delta - \frac{1}{l^2}\right) G(\vec{x}) = -4\pi q \delta^{(3)}(\vec{x}),$$

где l некоторая постоянная, имеющая размерность длины, а q — безразмерная константа.

- Решите уравнение

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2) G(x_1, x_2) = -4\pi q \delta(x_1) \delta(x_2)$$

в R^2 , в верхней полуплоскости и на диске радиуса 1 для случая граничных условий Неймана и Дирихле. Условие Неймана гласит, что $\partial_{\vec{n}_1} G(x_1, x_2)|_{boundary} = 0$, где $\partial_{\vec{n}_1}$ — дифференцирование по x_1 вдоль вектора перпендикулярного границе. Условие Дирихле гласит, что $\partial_{\vec{t}_1} G(x_1, x_2)|_{boundary} = 0$, где $\partial_{\vec{t}_1}$ — дифференцирование по x_1 вдоль вектора касательного к границе. Используя конформные преобразования, найдите связь между решениями в верхней полуплоскости и на диске.

- Найдите решение уравнения на R^D :

$$\Delta G(\vec{x}) = -4\pi q \delta^{(D)}(\vec{x}),$$

для произвольного числа измерений D , где $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_D^2$ — оператор Лапласа в соответствующей размерности.

Лекция IX; Свободные электромагнитные волны, тензор поляризации, преобразование Фурье и собственные колебания поля, поле как бесконечный набор осцилляторов.

1. На этой лекции мы рассмотрим решение уравнений Максвелла без зарядов:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

Оказывается, что у такого уравнения есть нетривиальные решения. Такие ЭМ поля, которые существуют в отсутствии источников, называются свободными ЭМ волнами.

Зафиксируем калибровку Лоренца. Тогда рассматриваемое уравнение сведется к системе уравнений:

$$\begin{cases} \square A^\mu = 0 \\ \partial_\mu A^\mu = 0 \end{cases}, \quad (135)$$

где второе уравнение является просто калибровочным условием. Первое из этих уравнений $\square A^\mu = \partial_\alpha \partial^\alpha A^\mu = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) A^\mu = 0$ является 4-мерным аналогом 2-мерного волнового уравнения $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = 0$, описывающего звуковые волны в одномерном кристалле, которое мы уже встречали в предыдущих лекциях. Отличие ситуации для A^μ заключается в том, что ЭМ волны имеют поляризацию, связанную с тем, что A^μ является 4-векторным, а не скалярным (Лоренц инвариантным) полем. При этом звуковые волны в одномерном кристалле не имеют поляризации, т.к. решетка может колебаться только в одном направлении (вдоль самой себя), и описываются одним полем ϕ .

2. Заметим, что в (135) мы имеем дело с системой линейных дифференциальных уравнений. Поэтому если у нас есть два решения этой системы уравнений A_1^μ и A_2^μ , то $A_1^\mu + A_2^\mu$ тоже является решением этой системы уравнений. Этот факт является отражением принципа суперпозиции.

Подчеркну, что это совершенно нетривиальный факт. Например, если бы вместо второй пары уравнений Максвелла мы бы имели дело, скажем, с уравнением $\partial_\mu F^{\mu\nu} + a \partial^\alpha F^{\nu\mu} F_{\mu\alpha} = 0$, где a – некоторая размерная константа, то сумма двух решений этого уравнения уже не являлась бы его решением в силу нелинейности этого уравнения. Подобные нелинейные уравнения возникают в нелинейной оптике из-за специальных свойств среды, в которой распространяются ЭМ волны.

Мы будем искать решение системы уравнений (135) в виде

$$A_\mu = \text{Re} [\xi_\mu e^{-i k_\nu x^\nu}] = \xi_\mu e^{-i k_\nu x^\nu} + \xi_\mu^* e^{i k_\nu x^\nu}, \quad (136)$$

где ξ_μ – некоторый постоянный комплексный 4-вектор, называемый вектором поляризации ЭМ волны, а k_μ – некоторый постоянный вещественный 4-вектор, называемый волновым 4-вектором ЭМ волны.

В силу принципа суперпозиции мы можем отбросить знак Re в рассматриваемом выражении для A_μ и иметь дело прямо с комплексной волной $\xi_\mu e^{-i k_\nu x^\nu}$, коль скоро мы

будем выполнять исключительно линейные операции над ней. Такая волна называется плоской монохроматической волной. Найдем теперь условия, которым должны удовлетворять векторы ξ_μ и k_μ , чтобы рассматриваемая функция решала систему уравнений (135). Т.к.

$$\partial_\alpha \xi^\mu e^{-i k_\nu x^\nu} = \xi^\mu \partial_\alpha e^{-i k_\nu x^\nu} = -i k_\alpha \xi^\mu e^{-i k_\nu x^\nu},$$

и

$$\square \xi^\mu e^{-i k_\nu x^\nu} = -k_\alpha k^\alpha \xi^\mu e^{-i k_\nu x^\nu},$$

то, подставив выражение (136) в (135), мы найдем, что оно решает эту систему уравнений, если ее волновой 4-вектор и поляризационный 4-вектор удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} k_\mu k^\mu = 0 \\ \xi_\mu k^\mu = 0 \end{cases} \quad (137)$$

Из первого уравнения $k_\mu k^\mu = k_0^2 - \vec{k}^2 = 0$ следует, что k_μ — нулевой (светоподобный) 4-вектор. В силу того, что мы имеем дело с пространством с сигнатурой Минковского, а не Евклида (т.е. имеем дело с $k_0^2 - \vec{k}^2 = 0$, а не $k_0^2 + \vec{k}^2 = 0$), это уравнение имеет ненулевое решение. Поэтому уравнения Максвелла без источников имеют нетривиальные решения.

Заметим, что система уравнений (137) не меняется при замене ξ_μ на $\bar{\xi}_\mu = \xi_\mu + \alpha k_\mu$, где α — произвольная комплексная константа. Действительно,

$$k_\mu \bar{\xi}^\mu = k_\mu \xi^\mu + \alpha k_\mu k^\mu = k_\mu \xi^\mu.$$

Последнее равенство получено с использованием первого уравнения системы (137). Эта инвариантность уравнения (137) является отражением того факта, что система уравнений (135) не меняется при преобразованиях $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha$, если $\square \alpha = 0$.

Теперь мы хотим явно запараметризовать решения системы уравнений (137). Т.к. $k^\mu k_\mu = k_0^2 - \vec{k}^2 = 0$, то $k_0 = |\vec{k}| \equiv k$. Поэтому $k^\mu = (k, \vec{k})$. Поворотом СК в пространстве всегда можно положить $k^\mu = (k, k, 0, 0)$, что отвечает 3-мерному волновому вектору \vec{k} направленному вдоль оси x . Тогда $A_\mu = \xi_\mu e^{-i k_\nu x^\nu} = \xi_\mu e^{-i k c t + i k x} = \xi_\mu e^{-i k (c t - x)}$, что, как мы знаем из первой лекции, описывает волну распространяющуюся в положительном направлении оси x со скоростью света: Уровни постоянной фазы этой волны лежат на плоскостях yz перпендикулярных направлению распространения волны x . Поэтому такую волну называют плоской. Обычно k_0 обозначают как $k_0 = \frac{\omega}{c}$, где ω — частота волны. При этом $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} = \frac{2\pi \vec{n}}{\lambda}$, где $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$ — единичный вектор вдоль направления распространения волны, а λ — ее длина. Т.е. данная ЭМ волна отвечает одной определенной частоте. Поэтому она и называется монохроматической. Обычные волны, наблюдаемые в природе, являются суперпозицией некоторого количества плоских монохроматических волн с разными поляризациями и частотами, а потому сами не являются монохроматическими.

Найдем теперь какой вид должен иметь вектор ξ_μ , чтобы решать уравнение $k_\mu \xi^\mu = 0$. При нашем выборе СК это уравнение сводится к $k_\mu \xi^\mu = k \xi^0 - k \xi^1 = 0$. Следовательно $\xi^0 = \xi^1$, а ξ^2 и ξ^3 могут иметь произвольные значения, т.е. $\xi^\mu = (\xi^0, \xi^0, \xi^2, \xi^3)$. Воспользуемся теперь произволом $\xi^\mu \rightarrow \xi^\mu + \alpha k^\mu$ и подберем $\alpha = -\xi^0/k$. Тогда $\bar{\xi}^\mu = (0, 0, \xi^2, \xi^3)$. Т.е.

4-вектор поляризации имеет только две независимых компоненты из четырех и только вдоль пространственных направлений перпендикулярных направлению распространения волны.

3. Найдем \vec{E} и \vec{B} для электромагнитной волны. Мы проделаем это для более общего вида $A_\mu(x)$, чем плоская монохроматическая волна, который решает уравнение Максвелла. Как мы только что видели в рассматриваемой ситуации всегда можно положить $A^0 = \varphi = 0$, а \vec{A} можно сделать функцией только комбинации $t - x/c$ и не зависящей от y и z (в случае волны распространяющейся вдоль оси x). Действительно, если рассмотреть \vec{A} не зависящий от y и z координат, то уравнение Максвелла сведется к уравнению

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \vec{A}(t, x) = 0,$$

общим решением которого является (в случае, отвечающем волне, распространяющейся вдоль оси x) произвольная функция от $(t - x/c)$, т.е. именно $\vec{A}(t - x/c)$. При этом калибровочное условие Лоренца сводится к $\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{A} = 0 \implies \text{div} \vec{A} = 0$, т.к. $\varphi = 0$.

Далее, в рассматриваемом случае ЭМ поля выражаются через вектор потенциалы следующим образом: $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$. Т.к. вектор потенциал решает уравнение $\square \vec{A} = 0$, то ЭМ поля \vec{E} и \vec{B} тоже решают это уравнение, т.е. их можно представить как:

$$\vec{E} = \text{Re} \left(\vec{E}_0 e^{-i k_\nu x^\nu} \right), \quad \vec{B} = \text{Re} \left(\vec{B}_0 e^{-i k_\nu x^\nu} \right),$$

для некоторых комплексных постоянных векторов \vec{E}_0 и \vec{B}_0 .

Т.к. \vec{A} является функцией только линейной комбинации $t - x/c$, то

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(t - \frac{x}{c})}{\partial t} = -\frac{1}{c} \vec{A}' \\ \vec{B} &= [\vec{\nabla} \times \vec{A}] = -\frac{1}{c} [\vec{n} \times \vec{A}'], \end{aligned}$$

где $\vec{n} = \vec{k}/k$. (Для плоской монохроматической волны $\vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{A}' = i k \vec{A}$, а $\vec{B} = -\frac{1}{c} [\vec{n} \times \vec{A}'] = i [\vec{k} \times \vec{A}]$.) Таким образом, для ЭМ волны $\vec{B} = [\vec{n} \times \vec{E}]$ и вектора \vec{k} , \vec{B} и \vec{E} — являются взаимно ортогональными. Следовательно, ЭМ волна является всегда поперечно поляризованной (нет колебаний поля вдоль направления распространения волны), что является прямым следствием того факта, что ξ^μ не имеет компонент вдоль 4-вектора k^μ .

4. Найдем вектор Умова-Пойнтинга для свободной ЭМ волны:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times [\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} = \frac{c}{4\pi} B^2 \vec{n},$$

т.к. $(\vec{n}, \vec{E}) = 0$ и $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ в рассматриваемом случае. Плотность энергии при этом равна $W = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = \frac{E^2}{4\pi}$. Поэтому $\vec{S} = cW \vec{n}$ и, следовательно, W и \vec{S} связаны соотношением $c^2 W^2 - \vec{S}^2 = 0$. Т.е. плотность энергии W и плотность потока энергии \vec{S} для свободной монохроматической волны удовлетворяют тому же соотношению, что и 4-импульс безмассовой частицы: $p_\mu p^\mu = p_0^2 - \vec{p}^2 = 0$ или тому же соотношению, что и светоподобный волновой 4-вектор $k_\mu k^\mu = k_0^2 - \vec{k}^2 = 0$, т.к. $p_\mu = \hbar k_\mu$.

5. Рассмотрим более подробно вопрос о поляризации ЭМ волны на примере поведения вектора $\vec{E}(t, x) = \text{Re} \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right]$. Квадрат комплексного вектора \vec{E}_0 тоже является комплексным числом. Подберем комплексный вектор \vec{b} в представлении $\vec{E}_0 = \vec{b} e^{-i\alpha}$ так, чтобы его квадрат был действительным $\vec{b}^2 = |\vec{E}_0|^2$. Т.е. мы хотим представить $\vec{E} = \text{Re} \left[\vec{b} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \alpha)} \right]$, где $\vec{b} = \vec{b}_1 + i\vec{b}_2$, а векторы \vec{b}_1 \vec{b}_2 являются действительными. Причем, т.к. $\vec{b}^2 = \vec{b}_1^2 - \vec{b}_2^2 + 2i(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ является действительным числом, то $(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = 0$, т.е. векторы \vec{b}_1 и \vec{b}_2 ортогональны друг другу.

Пусть x — ось, вдоль которой распространяется ЭМ волна и пусть вектор \vec{b}_1 направлен в положительном направлении оси y . Тогда компоненты электрического поля ЭМ волны имеют вид:

$$\begin{aligned} E_y &= |\vec{b}_1| \cos(\omega t - \vec{k}\vec{x} + \alpha) \\ E_z &= \pm |\vec{b}_2| \sin(\omega t - \vec{k}\vec{x} + \alpha), \end{aligned}$$

где знак \pm зависит от того вдоль или против оси z направлен вектор \vec{b}_2 . Таким образом:

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1 \quad (138)$$

и мы видим, что в каждой точке пространства вектор \vec{E} вращается в плоскости перпендикулярной к направлению распространения ЭМ волны. Причем при произвольных \vec{b}_1 и \vec{b}_2 , конец вектора электрического поля описывает эллипс. Такая волна называется эллиптически поляризованной. Если же $|\vec{b}_1| = |\vec{b}_2|$, то конец вектора электрического поля описывает окружность, что отвечает волне с круговой поляризацией. Наконец, если скажем $b_2 = 0$, то электрическое поле ЭМ волны всегда и везде направленно вдоль оси y . В этом случае волну называют линейно поляризованной.

6. Как мы видим, плоская монохроматическая волна имеет определенную поляризацию. Однако естественный свет не имеет поляризации, т.к. является суперпозицией плоских монохроматических волн с разной частотой и поляризацией. В частности, электрическое поле такой волны в заданной точке пространства имеет вид⁷ $\vec{E} = \vec{E}_0(t) e^{-i\omega t}$, где ω — средняя частота волны, а комплексная амплитуда $\vec{E}_0(t)$ является некоторой медленно меняющейся функцией. Для плоской монохроматической волны $\vec{E}_0 = \text{const}$. Поскольку $\vec{E}_0(t)$ определяет поляризацию волны, то это значит, что в каждой точке волны ее поляризация меняется со временем. Такую волну называют частично поляризованной.

Свойства поляризации ЭМ волн наблюдаются экспериментально посредством пропускания их через различные тела и измерения интенсивности прошедшей волны. С математической точки зрения это означает, что о свойствах поляризации ЭМ волны судят, исходя из значений некоторых квадратичных функций от поля. При этом, разумеется, речь идет о средних по времени значениях этих функций.

Квадратичная функция поля состоит из членов, пропорциональных произведениям $E_i E_j$, $E_i^* E_j^*$ и $E_i E_j^*$, $i = 1, 2, 3$. Произведения вида $E_i E_j = E_{0i} E_{0j} e^{-2i\omega t}$ и $E_i^* E_j^* =$

⁷Для простоты формул мы отбросили знак действительной части в этой формуле.

$E_{0i}^* E_{0j}^* e^{2i\omega t}$ содержат быстро осциллирующие множители $e^{\pm 2i\omega t}$ и при усреднении по времени дают ноль. Произведения же $E_i E_j^* = E_{0i} E_{0j}^*$ такого множителя не содержат, и потому их средние значения отличны от нуля. Таким образом, мы видим, что свойства частично поляризованного света вполне характеризуются тензором

$$J_{ij} = \overline{E_{0i} E_{0j}^*}.$$

Поскольку вектор \vec{E}_0 всегда лежит в плоскости перпендикулярной к направлению распространения волны, то тензор J_{ij} имеет всего четыре компоненты. В этой лекции мы временно подразумеваем, что индексы i, j пробегает всего два значения $i = 1, 2$, отвечающие осям y и z в случае волны, бегущей вдоль x . Сумма диагональных компонент тензора J_{ij} есть величина вещественная $J \equiv J_{ii} = \overline{\vec{E}_0 \vec{E}_0^*}$. Эта величина является интенсивностью волны и не имеет прямого отношения к ее поляризационным свойствам. Чтобы исключить ее из рассмотрения, введем поляризационный тензор:

$$\rho_{ij} \equiv \frac{J_{ij}}{J}. \quad (139)$$

Из его определения видно, что $\rho_{ii} = 1$ и $\rho_{ij} = \rho_{ji}^*$. В силу этих свойств диагональные компоненты поляризационного тензора ρ_{11} и ρ_{22} вещественны, причем $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$, а $\rho_{12} = \rho_{21}^*$. Всего, следовательно, поляризационный тензор характеризуется тремя вещественными параметрами.

Выясним условия, которым должен удовлетворять поляризационный тензор для поляризованного света. В этом случае $\vec{E}_0 = const$, и поэтому имеем просто без усреднения по времени $\rho_{ij} = E_{0i} E_{0j}^* / J$. Т.е. компоненты рассматриваемого тензора могут быть представлены в виде произведений компонент постоянного вектора E_{0j} / \sqrt{J} . Необходимое и достаточное условие для этого выражается равенством нулю определителя тензора поляризаций:

$$|\rho_{ij}| \equiv \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} = 0.$$

Противоположным случаем является неполяризованный, или естественный, свет. Полное отсутствие поляризации означает, что все направления в плоскости yz вполне эквивалентны. Поэтому взятие среднего приводит к

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}.$$

При этом определитель равен $|\rho_{ij}| = 1/4$.

В общем случае произвольной поляризации этот определитель принимает значения между 0 и 1/4. Степенью поляризации называется положительная величина P , определенная согласно

$$|\rho_{ij}| \equiv \frac{1}{4} (1 - P^2). \quad (140)$$

Она пробегает значения от 0 для неполяризованного до 1 для поляризованного света, т.к. можно показать, что тензор обладающий теми свойствами, что и ρ_{ij} имеет всегда положительный детерминант.

Произвольный тензор ρ_{ij} может быть разложен на две части — симметричную и антисимметричную. Из них первая $S_{ij} \equiv \frac{1}{2} (\rho_{ij} + \rho_{ji})$ в силу $\rho_{ij} = \rho_{ji}^*$ является вещественной. Антисимметричная же, напротив, чисто мнима. Всякий инвариантный (являющийся результатом усреднения) антисимметричный тензор с двумя индексами, принимающими два значения, пропорционален 2-мерному абсолютно антисимметричному тензору, т.е.

$$\frac{1}{2} (\rho_{ij} - \rho_{ji}) = -\frac{i}{2} \epsilon_{ij} A,$$

где A — вещественный псевдоскаляр. Эта величина псевдоскаляр, а не скаляр (т.е. меняет знак при инверсии координат) потому что тензор ϵ_{ij} меняет знак при инверсии, а ρ_{ij} нет. Таким образом, поляризационный тензор можно представить как

$$\rho_{ij} = S_{ij} - \frac{i}{2} \epsilon_{ij} A, \quad S_{ij} = S_{ji}. \quad (141)$$

Есть и другие удобные представления для поляризационного тензора. Например, через кватернионы. Однако мы их здесь обсуждать не будем.

7. Теперь я хочу рассказать о том как увидеть, что поле является бесконечным набором осцилляторов. Этот факт мы уже встречали на первой лекции. Сейчас же нас интересует поиск собственных колебаний поля.

Произвольное решение системы уравнений (135) в силу принципа суперпозиции можно представить как сумму плоских монохроматических волн с разными волновыми 4-векторами k_μ , удовлетворяющими условию $k_\alpha k^\alpha = 0$, и разными поляризациями $\xi_\mu(k) \equiv \tilde{A}_\mu(k)$, удовлетворяющими условию $k^\mu \tilde{A}_\mu(k) = 0$:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) e^{-i k_\nu x^\nu} \delta(k_\alpha k^\alpha).$$

Т.к. спектр возможных значений k_μ , удовлетворяющих условию $k_\alpha k^\alpha = 0$, является непрерывным, то вместо суммы мы имеем интеграл. Фактически эта формула задает разложение в ряд Фурье произвольного решения рассматриваемой системы уравнений, а $\tilde{A}_\mu(k)$ — Фурье гармоники рассматриваемого поля, что и объясняет замену их обозначения. Условие $k_\alpha k^\alpha = 0$ учтено в интеграле Фурье в виде δ -функции. При этом, т.к. калибровочное поле является вещественным $A_\mu^*(x) = A_\mu(x)$, то, как не трудно видеть, $\tilde{A}_\mu^*(k) = \tilde{A}_\mu(-k)$.

Подчеркну, что $d^4 k$ является Лоренц инвариантом. Действительно, т.к. k_μ преобразуется как 4-вектор, то якобиан замены $d^4 k$ от одной СО к другой является детерминантом матрицы преобразования Лоренца, который равен единице. Следовательно, $d^4 k \delta(k_\alpha k^\alpha)$ тоже является Лоренц инвариантом. Поэтому $A_\mu(x)$, представленный в виде вышеуказанного интеграла Фурье, действительно преобразуется как 4-вектор, если $\tilde{A}_\mu(k)$ преобразуется как 4-вектор. Таким образом рассматриваемое представление корректно.

Представление в виде ряда Фурье можно упростить. Один из четырех интегралов $d^4 k$ можно взять с использованием δ -функции под интегралом. Действительно, воспользовавшись одним из свойств δ -функции, мы получаем:

$$\iiint d^4 k \delta(k_0^2 - \vec{k}^2) \dots = \int dk_0 \delta(k_0 - |\vec{k}|) \cdot \iiint \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} \dots = \iiint \frac{d^3 \vec{k}}{|\vec{k}|} \dots$$

Из этого равенства в частности следует, что выражение $d^3\vec{k}/|\vec{k}|$ является Лоренци инвариантом, а потому представление вектор потенциала в виде ряда Фурье

$$A_\mu(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3k}{k} \tilde{A}_\mu(k) e^{-ikct+i\vec{k}\vec{x}}, \quad k \equiv |\vec{k}| \quad (142)$$

преобразуется как 4-вектор при преобразованиях Лоренца. В Лоренц инвариантности комбинации d^3k/k можно убедиться и прямым образом, подставив в нее преобразованные по Лоренцу $|\vec{k}|$ и d^3k .

Теперь вспомним, что в случае свободных ЭМ волн всегда можно положить $A^0(x) = 0$, а потому и $\tilde{A}^0(k) = 0$. Далее, переопределим величину $\tilde{A}_i(k)$ таким образом, чтобы убрать все коэффициенты и зависимость от времени под интегралом в (142) в ее определении:

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \int d^3k \vec{A}(t, \vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}}. \quad (143)$$

Подставим это выражение в уравнение Максвелла

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3k \vec{A}(t, \vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} - \Delta \int d^3k \vec{A}(t, \vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} = \\ &= \int d^3k \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(t, \vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} - \int d^3k \vec{A}(t, \vec{k}) \Delta e^{i\vec{k}\vec{x}} = \\ &= \int d^3k \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(t, \vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} + \int d^3k \vec{A}(t, \vec{k}) \vec{k}^2 e^{i\vec{k}\vec{x}} = \\ &= \int d^3k \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(t, \vec{k}) + \vec{k}^2 \vec{A}(t, \vec{k}) \right] e^{i\vec{k}\vec{x}} \end{aligned}$$

Для того, чтобы последнее выражение равнялось нулю необходимо, чтобы было выполнено уравнение

$$\ddot{\vec{A}} + c^2 \vec{k}^2 \vec{A} = 0, \quad (144)$$

т.е. каждая из гармоник Фурье (для каждого \vec{k}) ЭМ волны представляет собой свободный (не взаимодействующий с осцилляторами для других значений \vec{k}) осциллятор. Это означает, что гармоники Фурье (плоские монохроматические волны) являются собственными колебаниями поля — колебаниями, в которых поле разбивается на набор независимых осцилляторов.

Не трудно убедиться прямым вычислением, что уравнения движения (144) следуют из принципа наименьшего действия для

$$S(\vec{A}) \propto \int dt \int d^3k \left[\left| \dot{\vec{A}} \right|^2 - c^2 \vec{k}^2 \left| \vec{A} \right|^2 \right], \quad (145)$$

а энергия поля задается выражением

$$\mathcal{E} \propto \int d^3k \left[\left| \dot{\vec{A}} \right|^2 + c^2 \vec{k}^2 \left| \vec{A} \right|^2 \right]. \quad (146)$$

В верности последних двух утверждений можно убедиться и прямой подстановкой выражения (143) в формулы для действия $S \propto \int dt \int d^3x \left[\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right]$ и энергии $\mathcal{E} \propto \int d^3x \left[\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \right]$, где $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ и $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$.

8. Чтобы прояснить ситуацию вернемся опять к одномерной решетке шариков. Уравнения движения для такой решетки имеют вид:

$$m \ddot{\phi}_j(t) = k [\phi_{j+1}(t) - \phi_j(t)] - k [\phi_j(t) - \phi_{j-1}(t)], \quad \forall j \in Z$$

и в непрерывном пределе переходят в

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\phi}(t, x) = \phi''(t, x).$$

В первом случае мы имеем систему связанных дифференциальных уравнений для всех $j \in Z$ (уравнение для ϕ_j зависит от ϕ_{j+1} и ϕ_{j-1}). Мы хотим сделать такую замену переменных, при которой эта система перейдет в систему независимых уравнений, т.е. мы хотим перейти к собственным колебаниям решетки.

Представим

$$\phi_j(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_n(t) e^{ij n}.$$

Это представление является дискретным аналогом непрерывного представления Фурье:

$$\phi(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\phi}(t, k) e^{ikx}. \quad (147)$$

Замечу, что т.к. обобщенные координаты шариков являются действительными $\phi_j^*(t) = \phi_j(t)$, то $\tilde{\phi}_n^*(t) = \tilde{\phi}_{-n}(t)$.

После подстановки данного дискретного представления Фурье в уравнения движения, мы получаем:

$$\begin{aligned} m \sum_n \ddot{\tilde{\phi}}_n e^{ij n} &= k \sum_n \tilde{\phi}_n [e^{i(j+1)n} - 2e^{ij n} + e^{i(j-1)n}] \implies \\ &\sum_n e^{ij n} [m \ddot{\tilde{\phi}}_n + k \tilde{\phi}_n (2 - e^{in} - e^{-in})] = 0. \end{aligned}$$

Чтобы последнее равенство было верно, необходимо выполнение следующего уравнения

$$m \ddot{\tilde{\phi}}_n + 2k \tilde{\phi}_n (1 - \cos n) = 0.$$

Т.е. в терминах $\tilde{\phi}_n$ мы имеем дело с системой независимых уравнений (для каждого n). Иными словами $\tilde{\phi}_n$ являются собственными колебаниями решетки с собственными частотами $\omega_n^2 = \frac{2k}{m} (1 - \cos n) = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{n}{2}$.

В непрерывном пределе подобное преобразование имело бы вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int dk \tilde{\phi}(t, k) e^{ikx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int dk \tilde{\phi}(t, k) e^{ikx} \implies \\ \int dk e^{ikx} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\phi}(t, k) - \int dk \tilde{\phi}(t, k) \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{ikx} &= 0 \implies \\ \int dk e^{ikx} \left[\ddot{\tilde{\phi}}(t, k) + k^2 c^2 \tilde{\phi}(t, k) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Т.е., проделав преобразование Фурье, мы перешли к собственным колебаниям поля:

$$\ddot{\tilde{\phi}}(t, k) + k^2 c^2 \tilde{\phi}(t, k) = 0$$

с собственными частотами $\omega_k = c^2 k^2$. И это произошло благодаря тому, что плоские волны e^{ikx} или $e^{i\vec{k}\vec{x}}$ являются собственными функциями оператора Лапласа в соответствующем числе измерений

$$\partial^2 e^{ikx} / \partial x^2 = -k^2 e^{ikx}$$

или

$$\Delta e^{i\vec{k}\vec{x}} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e^{i\vec{k}\vec{x}} = -\vec{k}^2 e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

Вопросы и задачи

- Найдите уравнения движения для действия в трехмерном пространстве–времени (с метрикой η_{ij} , а не δ_{ij}):

$$S = \int d^3x \left[a F_{ij} F^{ij} + b \epsilon_{ijk} A^i \partial^j A^k \right], \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь a и b — это некоторые размерные константы. Найдите решения полученных уравнений отвечающие свободным плоским монохроматическим волнам.

Лекция X; Поля создаваемые релятивистскими движущимися зарядами, функция Грина оператора д'Аламбера.

1. Эта лекция достаточно техническая и содержит много вычислений. Физический смысл полученных формул в основном будет обсуждаться в следующей лекции.

Для того, чтобы решать уравнение Максвелла в случае тока j^μ общего вида

$$\begin{cases} \square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \\ \partial_\mu A^\mu = 0 \end{cases} \quad (148)$$

нам необходимо знать функцию Грина, $G(x, y)$, которая по определению решает следующее волновое уравнение:

$$\square_x G(x, y) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta_x \right) G(x, y) = \delta^{(4)}(x - y). \quad (149)$$

Функция Грина имеет физический смысл значения поля в мировой точке x , созданного источником, находящимся в мировой точке y . Простейшим примером функции Грина, который мы уже встречали в предыдущих лекциях, является решение, $\varphi(|\vec{x} - \vec{y}|) \propto 1/|\vec{x} - \vec{y}|$, уравнения Пуассона $\Delta\varphi(|\vec{x} - \vec{y}|) \propto \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$. Действительно, закон Кулона определяет статическое поле в точке \vec{x} , созданное источником находящимся в точке \vec{y} .

Функция Грина нужна по той причине, что если она нам известна, то решение системы уравнений (148) имеет вид:

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4y j^\mu(y) G(x, y) + A_0^\mu(x), \quad (150)$$

где A_0^μ является решением однородной системы уравнений $\square A_0^\mu = 0$, $\partial_\mu A_0^\mu = 0$, т.е. является композицией ЭМ волн различной поляризации и с различными волновыми векторами. Везде ниже мы опускаем такой вклад в решение неоднородного уравнения Максвелла, т.е. мы предполагаем, что решение уравнения Максвелла определено с точностью до такого однородного вклада. Физический смысл же вклада $\frac{4\pi}{c} \int d^4y j^\mu(y) G(x, y)$ — это определение поля в точке x как суммы (композиции) полей, создаваемых в этой точке каждой мировой точкой, в которых источник j^μ не равен нулю.

Чтобы убедиться, что (150) решает (148), подставим его в первое уравнение из (148):

$$\begin{aligned} \square A^\mu(x) &= \frac{4\pi}{c} \square_x \int d^4y j^\mu(y) G(x, y) = \frac{4\pi}{c} \int d^4y j^\mu(y) \square_x G(x, y) = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int d^4y j^\mu(y) \delta^{(4)}(x - y) = \frac{4\pi}{c} j^\mu(x). \end{aligned}$$

Т.е. первое уравнение в (148) выполнено.

Прежде чем двигаться дальше, обратим внимание на то, что уравнение (149) не меняет своего вида при трансляциях в ПВ и при всевозможных преобразованиях Лоренца.

Поэтому его решение должно зависеть только от инвариантной относительно этих преобразований комбинации x_μ и y_μ . Такой комбинацией является модуль разности между ними: $G(x, y) = G(|x - y|)$, где $|x - y| \equiv \sqrt{(x - y)_\mu (x - y)^\mu}$. Подставим теперь (150) во второе уравнение из (148):

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu(x) &= \frac{4\pi}{c} \partial_\mu \int d^4 y j^\mu(y) G(|x - y|) = \frac{4\pi}{c} \int d^4 y j^\mu(y) \frac{\partial}{\partial x^\mu} G(|x - y|) = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int d^4 y j^\mu(y) \left(-\frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) G(|x - y|) = \frac{4\pi}{c} \int d^4 y \frac{\partial j^\mu(y)}{\partial y^\mu} G(|x - y|) = 0. \end{aligned}$$

Предпоследнее равенство получено после интегрирования по частям, а последнее — после применения закона сохранения заряда $\partial_\mu j^\mu = 0$. Т.е. второе уравнение в (148) тоже выполнено.

2. Чтобы решить уравнение (149), представим функцию Грина в виде интеграла Фурье:

$$G(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) e^{i k_\mu (x - y)^\mu}.$$

Далее вспомним, что Фурье представление δ -функции имеет вид:

$$\delta^{(4)}(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i k_\mu (x - y)^\mu}.$$

Тогда уравнение (149) принимает вид:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\tilde{G}(k) \square_x - 1 \right] e^{i k_\mu (x - y)^\mu} = 0.$$

Вспоминая, что $\square_x e^{i k_\mu (x - y)^\mu} = -k_\alpha k^\alpha e^{i k_\mu (x - y)^\mu}$, сводим последнее уравнение к алгебраическому:

$$k_\alpha k^\alpha \tilde{G}(k) = -1,$$

общим решением которого является:

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{k^2} + C(k) \delta(k^2),$$

где $C(k)$ произвольная регулярная при $k^2 \equiv k_\alpha k^\alpha = 0$ функция. Тогда

$$G(x - y) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i k_\mu (x - y)^\mu}}{k^2} + G^0(x - y),$$

где $G^0(x - y) \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{i k_\mu (x - y)^\mu} C(k) \delta(k^2)$ и следовательно $\square_x G^0(x - y) = 0$. Т.к. решение уравнения (149), так же как и решение уравнений Максвелла (148), в любом случае определено с точностью до решения однородного уравнения, то мы всегда можем отбросить $G^0(x - y)$ в формуле для $G(x - y)$.

Интегральное представление для функции Грина

$$G(x - y) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i k_\mu (x - y)^\mu}}{k_\alpha k^\alpha} = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{i k_0 (x - y)_0 - i \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}{k_0^2 - \vec{k}^2} \quad (151)$$

является формальным, а именно расходится, т.к. на оси интегрирования по k_0 мы имеем два полюса $k_0 = \pm|\vec{k}| = \pm k$. Нам необходимо определиться с правилом интегрирования по k_0 (т.е. с правилом обхода полюсов), чтобы придать смысл рассматриваемому интегралу — определить его в смысле главного значения.

Чтобы фиксировать правило обхода полюсов надо наложить определенные граничные условия на функцию Грина из общих физических соображений. Мы потребуем, чтобы

$$G_R(x - y) = 0, \quad \text{if } y^0 > x^0. \quad (152)$$

Этим условием определяется так называемая запаздывающая функция Грина. Из-за этого и возникает индекс R — от английского слова *retarded* (запаздывающий) — у функции Грина. Запаздывающая функция Грина удовлетворяет принципу причинности — возмущение поля должно приходить в мировую точку $x^\mu = (x^0, \vec{x})$ (точку где поле измеряется) только *после* того как оно было создано источником в мировой точке $y^\mu = (y^0, \vec{y})$, т.е. $G_R(x - y) \neq 0$, а следовательно и $A^\mu \neq 0$, только если $x^0 \geq y^0$.

Таким образом:

$$G_R(x - y) \equiv -\Theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i k_\mu (x-y)^\mu}}{k_\alpha k^\alpha} = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i \vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \int_C \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{i k_0 (x-y)_0}}{k_0^2 - \vec{k}^2} \quad (153)$$

где

$$\Theta(x^0 - y^0) \equiv \begin{cases} 1, & x^0 \geq y^0 \\ 0, & x^0 < y^0 \end{cases}, \quad (154)$$

а контур C в комплексной плоскости k_0 проходит вдоль действительной оси $\text{Im} k_0 = 0$ слева направо и обходит полюса подинтегрального выражения, $k_0 = \pm k$, снизу по небольшим полуокружностям (см. рисунок (9)). Сейчас мы увидим, что при таком определении контура, рассматриваемый интеграл приводит к функции Грина, удовлетворяющей принципу причинности.

Чтобы вычислить интеграл по k_0 с использованием формулы Коши (см. аппендикс в конце этой лекции), необходимо каким-то образом замкнуть определенный выше контур C в комплексной плоскости k_0 . Если $(x^0 - y^0) < 0$, то контур C следует замкнуть бесконечной полуокружностью, идущей по часовой стрелке в нижней полуплоскости комплексной плоскости k_0 . Действительно интеграл $\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{i k_0 (x-y)_0}}{k_0^2 - \vec{k}^2}$ вдоль этой полуокружности равен нулю, т.к. на ней мнимая часть k_0 равна минус бесконечности (на этой полуокружности $e^{i k_0 (x-y)_0} = 0$). Поэтому добавление к (153) интеграла вдоль такой полуокружности не меняет его значения. Но рассматриваемый замкнутый контур не охватывает никаких полюсов, т.к. $k_0 = \pm k$ находятся вне его в силу приведенного выше соглашения. Поэтому по теореме Коши мы получаем, что так определенная функция Грина удовлетворяет принципу причинности: $G_R(x - y) = 0$, если $x^0 < y^0$.

Далее, если $(x^0 - y^0) > 0$, то, по той же причине, контур C следует замкнуть бесконечной полуокружностью, идущей против часовой стрелки в верхней полуплоскости комплексной плоскости k_0 . Такой контур охватывает именно два полюса $k_0 = \pm k$, а потому рассматриваемый интеграл по k_0 не равен нулю. Найдем его значение при $x^0 - y^0 > 0$ по формуле Коши, вычислив сумму вычетов в полюсах $k_0 = \pm k$:

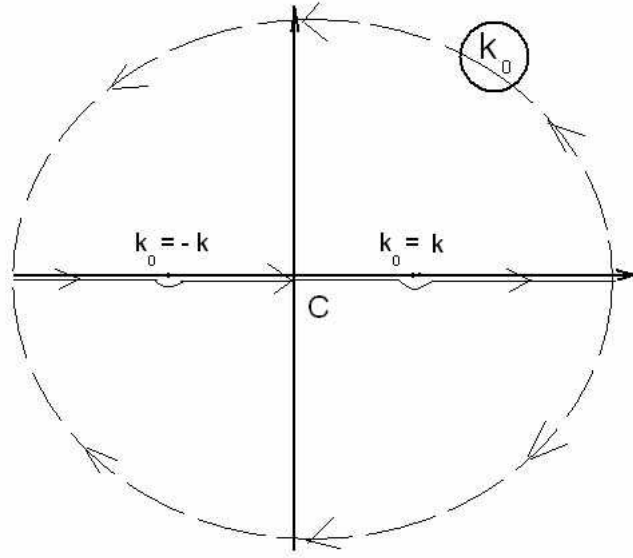


Рис. 9:

$$\int_C \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{i k_0 (x-y)_0}}{k_0^2 - \vec{k}^2} = \int_C \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{i k_0 (x-y)_0}}{2k_0} \left[\frac{1}{k_0 - k} + \frac{1}{k_0 + k} \right] =$$

$$= i \Theta(x^0 - y^0) \left[\frac{e^{i k (x-y)_0}}{2k} - \frac{e^{-i k (x-y)_0}}{2k} \right] = -\frac{\sin[k(x^0 - y^0)]}{k} \Theta(x^0 - y^0).$$

В последней формуле для определения знака результирующего выражения мы учли, что контур проходит против часовой стрелки — в положительном направлении.

Таким образом:

$$G_R(x - y) = -\Theta(\Delta x^0) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i \vec{k} \Delta \vec{x}} \frac{\sin[k \Delta x^0]}{k},$$

где $\Delta x^0 \equiv x^0 - y^0$, а $\Delta \vec{x} \equiv \vec{x} - \vec{y}$. Для вычисления интеграла по $d^3 k$ выберем в пространстве \vec{k} полярные координаты $\vec{k} = (k, \theta_k, \varphi_k)$, а ось k_z в этом пространстве направим вдоль $\Delta \vec{x}$. Тогда:

$$\begin{aligned}
G(\Delta x) &= -\frac{\Theta(\Delta x^0)}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dk k^2 \int_0^\pi d\theta_k \sin \theta_k \int_0^{2\pi} d\varphi_k e^{-ik|\Delta\vec{x}|\cos\theta_k} \frac{\sin(k\Delta x^0)}{k} = \\
&= -\frac{\Theta(\Delta x^0)}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk k \int_{-1}^1 d\cos\theta_k e^{-ik|\Delta\vec{x}|\cos\theta_k} \sin(k\Delta x^0) = \\
&= -\frac{\Theta(\Delta x^0)}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk k}{-ik|\Delta\vec{x}|} (e^{-ik|\Delta\vec{x}|} - e^{ik|\Delta\vec{x}|}) \frac{e^{ik\Delta x^0} - e^{-ik\Delta x^0}}{2i} = \\
&= \frac{\Theta(\Delta x^0)}{2(2\pi)^2 |\Delta\vec{x}|} \int_0^{+\infty} dk \left(e^{ik(\Delta x^0 + |\Delta\vec{x}|)} - e^{ik(\Delta x^0 - |\Delta\vec{x}|)} - e^{-ik(\Delta x^0 - |\Delta\vec{x}|)} + e^{-ik(\Delta x^0 + |\Delta\vec{x}|)} \right) = \\
&= \frac{\Theta(\Delta x^0)}{4\pi |\Delta\vec{x}|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \left(e^{ik(\Delta x^0 + |\Delta\vec{x}|)} - e^{ik(\Delta x^0 - |\Delta\vec{x}|)} \right) = \\
&= \frac{\Theta(\Delta x^0)}{4\pi |\Delta\vec{x}|} [\delta(\Delta x^0 - |\Delta\vec{x}|) - \delta(\Delta x^0 + |\Delta\vec{x}|)] \quad (155)
\end{aligned}$$

В последнем выражении $\delta(\Delta x^0 + |\Delta\vec{x}|) \neq 0$, если $\Delta x^0 = -|\Delta\vec{x}| < 0$, но $\Theta(\Delta x^0) \neq 0$, если $\Delta x^0 > 0$. Поэтому $\delta(\Delta x^0 + |\Delta\vec{x}|)$ в этом выражении можно отбросить, получив окончательный ответ для запаздывающей функции Грина:

$$G_R(x - y) = \frac{1}{4\pi |\Delta\vec{x}|} \delta(\Delta x^0 - |\Delta\vec{x}|). \quad (156)$$

Выражение (156) для функции Грина имеет прозрачный физический смысл. Оно не равно нулю только при $c(t_x - t_y) \equiv \Delta x^0 = |\Delta\vec{x}| > 0$, т.е. только на световом конусе и, более того, на той его части, которая исходит из мировой точки y в будущее. Действительно рожденная ЭМ волна должна распространяться после рождения в мировой точке y со скоростью света вперед в будущее.

Из свойства δ -функции

$$\delta[g(x)] = \sum_{q=1}^N \frac{\delta(x - x_q)}{|g'(x_q)|}, \quad g(x_q) = 0, \quad \forall q = 1, \dots, N \quad (157)$$

видно, что

$$\delta[(x - y)^2] = \frac{\delta(\Delta x^0 - |\Delta\vec{x}|) + \delta(\Delta x^0 + |\Delta\vec{x}|)}{2|\Delta\vec{x}|},$$

где $(x - y)^2 \equiv (x - y)_\mu (x - y)^\mu$, и мы можем представить запаздывающую функцию Грина в более удобной для дальнейших вычислений форме:

$$G_R(x - y) = \frac{\Theta(x^0 - y^0)}{2\pi} \delta[(x - y)^2] \quad (158)$$

3. Применим теперь найденную функцию Грина для вычисления поля, создаваемого точечной заряженной частицей, совершающей произвольное заданное движение. Пусть $z_\mu(s)$ — мировая линия частицы. Соответствующий 4-вектор тока имеет вид:

$$j^\mu(y) = e c \int_{-\infty}^{+\infty} ds u^\mu(s) \delta^{(4)}[y - z(s)], \quad u^\mu(s) \equiv \frac{dz^\mu(s)}{ds}.$$

Подставив явный вид запаздывающей функции Грина и это выражение для тока в формулу (150) и взяв интеграл по d^4y с использованием $\delta^{(4)}[y - z(s)]$, мы получим:

$$A^\mu(x) = 2e \int ds \Theta[x^0 - z^0(s)] \delta\{[x - z(s)]^2\} u^\mu(s). \quad (159)$$

Далее, используя свойство (157), представим

$$\delta\{[x - z(s)]^2\} = \frac{\delta(s - s_r)}{\left| \frac{d[x - z(s)]^2}{ds} \right|},$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d[x - z(s)]^2}{ds} &= 2[x - z(s)]_\mu \frac{d[x - z(s)]^\mu}{ds} = -2[x - z(s)]_\mu \frac{dz^\mu(s)}{ds} = \\ &= -2[x - z(s)]_\mu u^\mu(s) \equiv -2[x - z(s)] \cdot u(s), \end{aligned}$$

а s_r является решением уравнения

$$[x - z(s_r)]^2 = 0, \quad x^0 > z^0(s_r).$$

В трехмерной форме это уравнение имеет вид:

$$t - t_r = \frac{|\vec{x} - \vec{z}(t_r)|}{c},$$

где $t_r \equiv z^0(s_r)/c$ — координатное время, соответствующее собственному s_r .

Покажем, что уравнение на s_r имеет единственное решение. Действительно, рассмотрим функцию $\varphi(s) \equiv [x - z(s)]^2$. Ее производная равна:

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = -2[x - z(s)]_\mu u^\mu(s) = -2u^0[x^0 - z^0] \left[1 - \frac{(\vec{v}, [\vec{x} - \vec{z}])}{c(x^0 - z^0)} \right] < 0,$$

т.к. $|\vec{v}| < c$ и $x^0 > z^0$ ($\vec{v} = d\vec{r}/dt$, $u_0 = c dt/ds$). Следовательно $\varphi(s)$ является монотонной функцией от s . Поэтому у уравнения $\varphi(s_r) = 0$ может быть только один корень.

Физический смысл t_r и s_r — это моменты координатного и собственного, соответственно, времени излучения (radiation) той ЭМ волны, которая наблюдается в мировой точке x . Эта волна создается в точке $z_\mu(s_r)$ на мировой линии частицы, которая сидит в вершине светового конуса, содержащего мировую точку $x^\mu = (t, \vec{x})$. При этом разность $t - t_r = |\vec{x} - \vec{z}(t_r)|/c > 0$ представляет собой время распространения ЭМ волны из точки $z(t_r)$ в точку x , измеренное в лабораторной системе отсчета (смотрите рисунок).

Таким образом:

$$A^\mu(x) = 2e \int ds \frac{\delta(s - s_r)}{\left| \frac{d[x - z(s)]^2}{ds} \right|} u^\mu(s) = \frac{e u^\mu(s_r)}{u(s_r) \cdot [x - z(s_r)]} = \frac{e u^\mu(s)}{u(s) \cdot X(s)} \Big|_{s=s_r}, \quad (160)$$

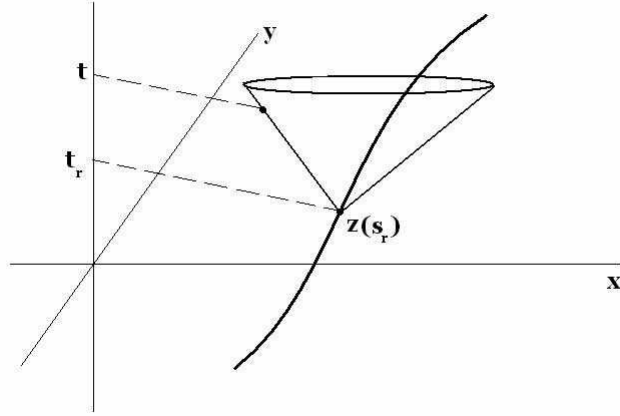


Рис. 10:

где мы ввели обозначение $X^\mu(s) = x^\mu - z^\mu(s)$. При этом s_r решает уравнение $X^2(s_r) = 0$.
 Простой подстановкой получаем, что в 3-мерной форме уравнение (160) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 A^0(t, \vec{x}) = \varphi(t, \vec{x}) &= \frac{e}{R \left(1 - \frac{(\vec{v}, \vec{n})}{c}\right)} \Big|_{t_r}, \\
 \vec{A}(t, \vec{x}) &= \frac{e \vec{v}}{c R \left(1 - \frac{(\vec{v}, \vec{n})}{c}\right)} \Big|_{t_r},
 \end{aligned} \tag{161}$$

где $\vec{R} \equiv \vec{x} - \vec{z}(t)$ — 3-мерный радиус вектор ведущий из точки излучения в точку наблюдения ЭМ волны, $\vec{v} = \dot{\vec{z}}(t)$, $R \equiv |\vec{R}|$ и $\vec{n} = \vec{R}/R$ — единичный вектор в направлении излучения ЭМ волны. Потенциалы (160)-(161) называются потенциалами Лиенара-Вихерта.

4. Вычислим теперь тензор ЭМ поля $F_{\mu\nu}$. Для этого удобнее исходить из интегрального представления вектор потенциала (159). Тогда

$$\partial^\nu A^\mu(x) = 2e \frac{\partial}{\partial x_\nu} \int ds u^\mu(s) \Theta[X^0(s)] \delta[X^2(s)] = 2e \int ds u^\mu(s) \Theta[X^0(s)] \frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta[X^2(s)]$$

В качестве домашнего задания покажите, что применение производной $\partial/\partial x_\nu$ к $\Theta[X^0(s)]$ не дает вклада в $\partial^\nu A^\mu$. При этом имейте ввиду, что $d\Theta(x)/dx = \delta(x)$.

Далее

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta[X^2(s)] = 2 X^\nu(s) \frac{d}{dX^2} \delta[X^2(s)] = 2 X^\nu \frac{d}{ds} \delta[X^2(s)] \frac{1}{\frac{dX^2(s)}{ds}} = -\frac{X^\nu}{u \cdot X} \frac{d}{ds} \delta[X^2(s)].$$

Таким образом,

$$\partial^\nu A^\mu = -2e \int ds \Theta [X^0(s)] \frac{u^\mu(s) X^\nu(s)}{u(s) \cdot X(s)} \frac{d}{ds} \delta [X^2(s)].$$

Проинтегрировав по частям в последнем интеграле, мы получаем

$$\partial^\nu A^\mu = 2e \int ds \Theta [X^0(s)] \delta [X^2(s)] \frac{d}{ds} \left[\frac{u^\mu(s) X^\nu(s)}{u(s) \cdot X(s)} \right].$$

Вычислив полученный интеграл с использованием δ -функции, точно также как мы это сделали при вычислении $A^\mu(x)$ выше, мы получим

$$\partial^\nu A^\mu(x) = \frac{e}{u \cdot X} \frac{d}{ds} \left[\frac{u^\mu X^\nu}{u \cdot X} \right] \Big|_{s_r}.$$

Следовательно тензор ЭМ поля равен:

$$F^{\mu\nu} = \frac{e}{u \cdot X} \frac{d}{ds} \left[\frac{X^\mu u^\nu - X^\nu u^\mu}{u \cdot X} \right] \Big|_{s_r}$$

Далее, вычислив производную d/ds , при этом воспользовавшись свойствами $u_\mu u^\mu = 1$ и $w_\mu u^\mu = 0$, где $w^\mu \equiv du^\mu/ds$ — 4-ускорение, мы получаем

$$F^{\mu\nu} = \frac{e}{(u \cdot X)^2} \left[(X^\mu w^\nu - X^\nu w^\mu) - \frac{w \cdot X - 1}{u \cdot X} (X^\mu u^\nu - X^\nu u^\mu) \right] \Big|_{s_r}. \quad (162)$$

Чтобы вычислить компоненты \vec{E} и \vec{B} тензора ЭМ поля, найдем компоненты 4-ускорения:

$$\begin{aligned} w^\mu &\equiv \frac{d}{ds} u^\mu = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \\ &= \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{(\vec{v}, \dot{\vec{v}})}{c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}, \frac{\dot{\vec{v}}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\vec{v} (\vec{v}, \dot{\vec{v}})}{c^3 (1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \right) = \\ &= \left(\frac{(\vec{v}, \vec{a})}{c^3 (1 - \frac{v^2}{c^2})^2}, \frac{\vec{a}}{c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})} + \frac{\vec{v} (\vec{v}, \vec{a})}{c^4 (1 - \frac{v^2}{c^2})^2} \right), \end{aligned}$$

где $\vec{a} \equiv \ddot{\vec{x}}$. Тогда после подстановки компонент 4-векторов X , u и w в (162), получаем:

$$\begin{aligned} \vec{B}(t, \vec{x}) &= \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) [\vec{v} \times \vec{n}]}{c R^2 \left(1 - \frac{(\vec{v}, \vec{n})}{c}\right)^3} \Big|_{t_r} + \frac{e (c [\vec{a} \times \vec{n}] + [\vec{n} \times [(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{n}]])}{c^3 R \left(1 - \frac{(\vec{v}, \vec{n})}{c}\right)^3} \Big|_{t_r} \\ \vec{E}(t, \vec{x}) &= \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c})}{R^2 \left(1 - \frac{(\vec{v}, \vec{n})}{c}\right)^3} \Big|_{t_r} + \frac{e [\vec{n} \times [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \times \vec{a}]]}{c^2 R \left(1 - \frac{(\vec{v}, \vec{n})}{c}\right)^3} \Big|_{t_r}, \end{aligned} \quad (163)$$

где $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$ — единичный вектор вдоль направления распространения ЭМ волны. Легко видеть, что полученные выражения для ЭМ полей удовлетворяют условию $\vec{B}(t) = [\vec{n}(t_r) \times \vec{E}(t)]$ и вектора \vec{n} , \vec{B} и \vec{E} образуют ортогональную тройку.

Физический смысл полученных выражений мы обсудим в следующей лекции.

6. Аппендикс с некоторыми свойствами функции Грина.

- Помимо запаздывающей есть еще и опережающая (advanced) функция Грина :

$$G_A(x-y) = \frac{\Theta(y^0 - x^0)}{2\pi} \delta[(x-y)^2] = \frac{\delta(\Delta x^0 + |\Delta \vec{x}|)}{4\pi |\Delta \vec{x}|},$$

которая обладает свойством $G_A(x-y) = 0$, если $x^0 > y^0$

- Сумма запаздывающей и опережающей функций Грина

$$G(x-y) = G_R(x-y) + G_A(x-y) = \frac{\delta[(x-y)^2]}{2\pi}$$

тоже решает уравнение (149).

- Уравнение на функцию Грина имеет так же и следующее решение

$$G(x-y) = -\frac{i}{2\pi^2 (x-y)^2}.$$

В этом можно убедиться, воспользовавшись формулой Сохотского, которая в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(x-y)^2 + i\epsilon} = v.p. \frac{1}{(x-y)^2} + i\pi \delta[(x-y)^2].$$

В этом выражении $v.p. \frac{1}{(x-y)^2}$ не имеет особенностей при $(x-y)^2 = 0$. Поэтому оно решает однородное уравнение $\square G^0(x-y) = 0$, поэтому функции Грина $\frac{\delta[(x-y)^2]}{2\pi}$ и $-\frac{i}{2\pi^2 (x-y)^2}$ равны друг другу с точностью до прибавления решения однородного уравнения, т.е. решают одно и тоже неоднородное уравнение (149).

7. Аппендикс о теореме Коши.

Рассмотрим интеграл вида:

$$I_m = \oint_{C_{z_0, R}} dz (z - z_0)^m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (164)$$

Здесь $C_{z_0, R}$ — это окружность радиуса R с центром в точке z_0 . Чтобы вычислить этот интеграл, представим z , который лежит на этой окружности, в следующем виде: $z = z_0 + R e^{i\varphi}$, где $\varphi \in [0, \pi)$. Тогда обсуждаемый интеграл принимает следующий вид:

$$I_m = R^{m+1} i \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m+1)\varphi}. \quad (165)$$

В силу периодичности подинтегрального выражения, полученный интеграл равен нулю при всех m , кроме $m = -1$. То есть:

$$I_m = \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases} \quad (166)$$

Рассмотрим теперь интеграл вида:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{z_0, R}} dz \frac{f(z)}{z - z_0}. \quad (167)$$

Здесь $f(z)$ — аналитическая функция внутри окружности $C_{z_0, R}$. Это значит, что в разложении этой функции в ряд Лорана внутри этой окружности вокруг любой точки не присутствуют члены отрицательной степени: например, $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m (z - z_0)^m$, где $f_m = 0$ при $m < 0$. Тогда, разлагая $f(z)$ в ряд Лорана внутри обсуждаемой области и воспользовавшись рассуждениями приведенными выше, получаем:

$$I = f_0 \equiv f(z_0). \quad (168)$$

Чтобы обобщить все эти выкладки на случай контуров более общего вида, чем окружность, рассмотрим контур $C_{R, \epsilon}$, который изображен на рисунке (11). А именно, пусть интеграл идет вдоль контура окружности радиуса R , а в некоторой точке ответвляется на окружность малого радиуса ϵ , а затем продолжает идти вдоль исходного контура. Пусть $f(z)$ аналитическая в соответствующей области. В силу аналитичности всего подинтегрального выражения внутри маленького контура радиуса ϵ , этот контур дает нулевой вклад в интеграл. То есть,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R, \epsilon}} dz \frac{f(z)}{z - z_0} = f(z_0). \quad (169)$$

Используя контура малых радиусов различного размера, мы можем продеформировать исходную окружность в контур произвольной формы, коль скоро нам позволяет сделать это аналитичность функции $f(z)$. То есть при таких деформациях контура он не должен пересекать полюса и разрывы функции $f(z)$, если они имеются. Это завершает схематическое доказательство формулы Коши.

Вопросы и задачи

- Найдите решение уравнения в трехмерном пространстве–времени:

$$\square G(x - y) = \delta^{(3)}(x - y),$$

где в этом случае $\square \equiv \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2$.

- Получите (161) из (160).

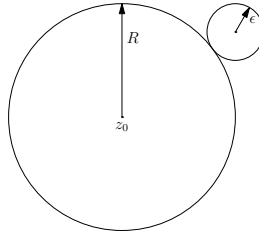


Рис. 11:

- Повторите вычисления приведенные в этой лекции для случая скалярного поля:

$$\square\phi(x) = j(x),$$

где $j(x) = q \int ds \delta^{(4)}[x - z(s)]$, а q — константа взаимодействия между точечной частицей и скалярным полем. Вычислите также $\partial_\mu\phi$.

- Вычислите интеграл

$$I = \oint_{C_{0,1}} \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

где $C_{0,1}$ — окружность единичного радиуса с центром в точке 0. У функции $1/\sqrt{z}$ есть разрез в комплексной плоскости z . Как этот интеграл зависит от положения разреза? Как он зависит от выбора листа?

Лекция XI; Излучение электромагнитных волн движущимися зарядами, интенсивность излучения и мощность потерь, излучение в дипольном приближении, мультипольное разложение в нерелятивистском приближении.

1. На предыдущей лекции мы вычислили ЭМ поля, создаваемые в мировой точке t, \vec{x} релятивистской точечной частицей, совершающей произвольное движение вдоль мировой линии $z^\mu(t)$:

$$\begin{aligned}\vec{B}(t, \vec{x}) &= \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) [\vec{v} \times \vec{n}]}{c R^2 \left(1 - \frac{(\vec{v}, \vec{n})}{c}\right)^3} \Big|_{t_r} + \frac{e (c [\vec{a} \times \vec{n}] + [\vec{n} \times [(\vec{v} \times \vec{a}) \times \vec{n}]])}{c^3 R \left(1 - \frac{(\vec{v}, \vec{n})}{c}\right)^3} \Big|_{t_r} \\ \vec{E}(t, \vec{x}) &= \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right)}{R^2 \left(1 - \frac{(\vec{v}, \vec{n})}{c}\right)^3} \Big|_{t_r} + \frac{e [\vec{n} \times [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \times \vec{a}]]}{c^2 R \left(1 - \frac{(\vec{v}, \vec{n})}{c}\right)^3} \Big|_{t_r},\end{aligned}\quad (170)$$

где $\vec{R}(t) \equiv \vec{x} - \vec{z}(t)$ — 3-мерный радиус-вектор, ведущий из точки излучения в точку наблюдения ЭМ волны, $\vec{v} = \dot{\vec{z}}(t)$, $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, $R \equiv |\vec{R}|$, а $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$ — единичный вектор вдоль направления распространения ЭМ волны. При этом t_r — момент времени порождения частицей ЭМ поля, которое наблюдается в точке t, \vec{x} — решает уравнение $t - t_r = \frac{|\vec{x} - \vec{z}(t_r)|}{c}$.

Каждое из полей \vec{E} и \vec{B} в (170) содержит два вклада: первый, который не зависит от ускорения \vec{a} и спадает с расстоянием как $1/R^2$, и второй, который зависит от ускорения и спадает с расстоянием как $1/R$. Т.е. первое слагаемое в каждом из ЭМ полей соответствует полю равномерно движущегося заряда. Действительно при $\vec{v} = const$ имеем:

$$\vec{R}(t_r) + \vec{v} \frac{R(t_r)}{c} = \vec{R}(t_r) + \vec{v} (t - t_r) = \vec{R}(t),$$

т.е. это вектор, соединяющий местоположение заряда в момент наблюдения с точкой наблюдения. Откуда следует

$$R \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right) \Big|_{t_r} = R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta} \Big|_t,$$

где θ — угол между $\vec{R}(t)$ и \vec{v} . В результате первый вклад скажем в электрическое поле сводится к

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \frac{e \vec{R}}{R^3} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}} \Big|_t$$

— известному выражению для электрического поля равномерно движущегося заряда. Аналогичная ситуация получается и для магнитного поля. Такие ЭМ поля получаются из электрического поля Кулона после буста Лоренца. Они привязаны к заряду, т.е. не

могут существовать независимо от их источника. Действительно, можно посчитать вектор Умова–Пойнтинга для таких ЭМ полей и найти, что хотя он и не нулевой (если $\vec{a} \neq 0$), но спадает с расстоянием быстро (как $1/R^4$) и отвечает нулевому потоку энергии через бесконечно удаленную поверхность. Как мы сейчас увидим, ситуация для вторых вкладов в ЭМ поля (170) сильно отлична от этой.

На больших расстояниях от частицы (источника), $R \gg (1 - v^2/c^2)c^2/a$, выражения для ЭМ полей упрощаются, и остаются только вторые вклады, зависящие от ускорения:

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, \vec{x}) &\approx \frac{e [\vec{n} \times [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \times \vec{a}]]}{c^2 R \left(1 - \frac{(\vec{v}, \vec{n})}{c}\right)^3} \Bigg|_{t_r}, \\ \vec{B}(t) &= [\vec{n}(t_r) \times \vec{E}(t)]. \end{aligned} \quad (171)$$

Вычислим поток энергии для таких полей внутри телесного угла $d\Omega$ на больших расстояниях от частицы:

$$dI = \frac{c}{4\pi} \left([\vec{E} \times \vec{B}], \vec{n} \right) R^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 R^2 d\Omega.$$

Следовательно

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{[\vec{n} \times [(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}) \times \vec{a}]]^2}{\left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right)^6} \Bigg|_{t_r}. \quad (172)$$

Поток энергии в единицу телесного угла, $dI/d\Omega$, зависит от R только через аргумент $t_r = t - R(t_r)/c$. Это означает, что поток энергии через площадки $R^2 d\Omega$ внутри выбранного телесного угла $d\Omega$, находящиеся на разных расстояниях от частицы в соответствующие моменты времени (с учетом конечности скорости переноса энергии) будет одинаковым. Т.е. ЭМ возмущение распространяется от генерирующей его заряженной частицы на бесконечность. Оно образует поле излучения, которое, возникнув, отрывается от своего источника. В этом и состоит явление излучения. Квазистационарное поле, отвечающее первым слагаемым в формуле (170), как мы видели, таким свойством не обладает. Для него $dI/d\Omega \sim 1/R^2$.

2. Обратим теперь внимание на угловое распределение излучения ультрарелятивистской частицы, для которой $v \approx c$. Здесь в первую очередь важно обратить внимание на знаменатель в формуле для дифференциальной интенсивности (172) — это шестая степень выражения $1 - (\vec{n}, \vec{v})/c = 1 - v \cos \theta/c$, где θ — угол между направлением скорости частицы \vec{v} и направлением излучения \vec{n} в момент времени излучения t_r . Это выражение близко к нулю при $\cos \theta \approx 1$ и к единице, при $\cos \theta < 1$. Поэтому возникает резкая анизотропия излучения — практически все излучение идет в малой окрестности углов вблизи направления скорости. Т.е. частица излучает вперед в области углов $0 < \Delta\theta \ll 1$, где $\Delta\theta$ — характерная ширина области излучения.

Оценим эту ширину ($v/c \approx 1$):

$$\begin{aligned}
1 - \frac{v}{c} \cos \theta &\approx 1 - \frac{v}{c} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = 1 - \frac{v}{c} + \frac{v}{c} \frac{\theta^2}{2} \approx \\
&\approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{v}{c}\right) + \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right),
\end{aligned} \tag{173}$$

где γ — релятивистский фактор. Таким образом, излучение в направлении углов $\theta > 1/\gamma$ подавлено степенным образом — высокой степенью релятивистского фактора. Т.е. излучение в основном сосредоточено в конусе с угловым раствором $\sim 1/\gamma$ — в области углов $\theta \lesssim 1/\gamma \approx \Delta\theta$.

Это свойство излучения релятивистских частиц, хотя и получено нами сейчас из формулы для $dI/d\Omega$, на самом деле легко объясняется релятивистским преобразованием углов в СТО, о котором уже у нас была речь в начале курса. Я имею ввиду абберацию света. Вспомним, что если движущийся со скоростью v источник испускает свет под углом θ' к направлению скорости, то в покоящейся СО угол θ испускания света определяется по формуле:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta},$$

которая следует из закона сложения скоростей.

Тогда распределение испущенных частиц по углам имеет такой вид:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{dN}{d\Omega'} \frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{dN}{d\Omega'} \frac{d \cos \theta'}{d \cos \theta} = \frac{dN}{d\Omega'} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2},$$

где dN — число частиц, летящих в данный телесный угол.

Таким образом, в знаменателе появляется тот же самый фактор, что и выше. Даже если распределение по углам в СО, сопутствующей источнику, является изотропным, т.е. $dN/d\Omega' = const$, то по отношению к лабораторной СО вылет частиц резко анизотропен и они в основном вылетают вперед. Именно этот эффект в первую очередь приводит к узкой направленности излучения вдоль направления скорости.

3. Рассмотрим нерелятивистский предел ($v \ll c$) формулы для излучения (172):

$$\frac{dI}{d\Omega} \approx \frac{e^2}{4\pi c^3} [\vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{a}]]^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3} [\vec{n} \times \dot{\vec{v}}]^2 = \frac{e^2 \ddot{\vec{r}}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3}.$$

Здесь $\vec{d} = e\vec{r}$ — дипольный момент заряженной частицы, $\ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = e\dot{\vec{v}} = e\vec{a}$, а θ — здесь угол между ускорением \vec{a} и направлением наблюдения излучения \vec{n} , т.е. не совпадает с тем θ , который мы использовали выше. Полученное выражение описывает интенсивность излучения в дипольном приближении для одного точечного заряда. Мы сейчас выведем эту формулу для системы нерелятивистских движущихся зарядов на больших расстояниях по сравнению с размерами системы. Мы знаем, что

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4y G_R(x-y) j^\mu(y).$$

При этом

$$G_R(x - y) = \frac{\delta(x^0 - y^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|},$$

а $j^\mu(y) = (c\rho(y), \vec{j}(y))$. Подставив эти выражения в формулу для вектор-потенциала и взяв интеграл по y^0 , получаем:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c} \int d^3y \frac{j^\mu(x^0 - |\vec{x} - \vec{y}|; \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

— запаздывающие потенциалы. Выберем начало координат внутри системы зарядов. Пусть $\vec{n} = \vec{x}/x$ и, т.к. в той области, где $j^\mu(y) \neq 0$ мы имеем $y \ll x$, то $|\vec{x} - \vec{y}| \approx x - (\vec{n}, \vec{y})$. Подставим эту формулу в полученное выше интегральное представление для $A^\mu(x)$. В знаменателе можно пренебречь (\vec{n}, \vec{y}) по сравнению с x . В аргументе же j^μ это пренебрежение сделать нельзя. Возможность такого пренебрежения определяется не относительной величиной x и (\vec{n}, \vec{y}) , а тем, насколько меняются компоненты j^μ за время $(\vec{n}, \vec{y})/c$. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса ниже.

Таким образом, вообще говоря:

$$A^\mu(x) \approx \frac{1}{cx} \int j^\mu(x^0 - x + (\vec{n}, \vec{y}); \vec{y}) d^3y.$$

Пока все наши формулы верны и в релятивистском случае.

На достаточно больших расстояниях от системы зарядов — источника поля — полученное A^μ решает однородное уравнение Максвелла, т.е. является ЭМ волной в том смысле, в котором мы ее определяли на 9-й лекции. Для этого надо, чтобы расстояния были велики не только по сравнению с размерами системы, но и по сравнению с длиной излучаемой системой зарядов ЭМ волны. В терминах начала этой лекции это та область, где можно пренебречь теми частями в выражениях для \vec{E} и \vec{B} , которые не зависят от \vec{a} и спадают как $1/R^2$ по сравнению с зависящими от \vec{a} членами. Об этой области поля говорят как о волновой зоне излучения.

Как мы знаем, для определения \vec{E} и \vec{B} полей для ЭМ волны достаточно знать только \vec{A} . Действительно, в плоской волне $\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{1}{c} [\dot{\vec{A}} \times \vec{n}]$, а $\vec{E} = [\vec{B} \times \vec{n}]$. Заметим, что как и раньше $\frac{x - (\vec{n}, \vec{y})}{c}$ определяет время прохождения ЭМ волны от источника в точке \vec{y} к точке наблюдения в \vec{x} .

Обсудим теперь условия, при которых можно пренебречь (\vec{n}, \vec{y}) в аргументе \vec{j} в подынтегральном выражении для \vec{A} . Временем $(\vec{n}, \vec{y})/c$ можно пренебречь, если за это время \vec{j} мало меняется. Пусть T определяет порядок величины времени, в течении которого \vec{j} меняется заметным образом. Очевидно излучение такой системы будет обладать периодом порядка T . Пусть d — характерный размер системы. Тогда время $(\vec{n}, \vec{y})/c \sim d/c$. Для того, чтобы за это время \vec{j} в системе не успел заметно измениться, необходимо, чтобы $d/c \ll T$. Но $cT \approx \lambda$ — характерная длина излучаемой системой ЭМ волны. Следовательно искомое условие имеет вид: $d \ll \lambda$. Это условие можно записать еще и в другом виде, заметив, что $T \sim d/v \Rightarrow \lambda \sim cd/v$, где v — порядок величины скорости зарядов в системе. При этом из $d \ll \lambda$ следует, что

$$v \ll c, \tag{174}$$

т.е. получаем нерелятивистский предел для скоростей зарядов, входящих в систему. Этой формулой и определяются пределы применимости дипольного приближения.

Итак, в рассматриваемом приближении мы имеем:

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{c x} \int \vec{j} \left(t - \frac{x}{c}, \vec{y} \right) d^3 y, \quad t \equiv \frac{x^0}{c}.$$

Подставив сюда $\vec{j} = \rho \vec{v}$ и $\rho = \sum_q e_q \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{r}_q)$, получаем

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{c x} \sum_q e_q \vec{v}_q \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Но $\sum_q e_q \vec{v}_q = \frac{d}{dt} \sum_q e_q \vec{r}_q = \dot{\vec{d}}$, где \vec{d} — дипольный момент системы. Поэтому

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} [\vec{n} \times \dot{\vec{A}}] = \frac{1}{c^2 x} [\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}], \quad \vec{E} = [\vec{B} \times \vec{n}].$$

Таким образом, заряды могут излучать только, если $\ddot{\vec{d}} \neq 0$, т.е., если они движутся ускоренно $\vec{a} \neq 0$.

Подставив полученное выражение для \vec{B} в формулу для интенсивности излучения в элемент телесного угла $d\Omega$, находящийся на расстоянии x от системы зарядов,

$$dI = c \frac{\vec{B}^2}{4\pi} x^2 d\Omega,$$

получаем

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}]^2 d\Omega = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta d\Omega, \quad (175)$$

где θ — угол между векторами $\ddot{\vec{d}}$ и $\vec{n} = \vec{x}/x$. Это выражение для дифференциальной интенсивности излучения от системы зарядов совпадает с тем, что было получено выше в нерелятивистском приближении для одного заряда. Полученная величина определяет количество энергии, излучаемой в единицу времени в элемент телесного угла в данном направлении.

Отметим, что угловое распределение излучения в этом случае дается множителем $\sin^2 \theta$, т.е. является практически однородным. Подставив в dI выражение $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ и интегрируя по θ от 0 до π , получаем:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2. \quad (176)$$

— полную интенсивность излучения в дипольном приближении.

4. Теперь вернемся снова к релятивистским частицам. Вычисленная нами величина $dI/d\Omega$ представляет собой поток ЭМ энергии, отнесенной к единичному телесному углу, который может измерить неподвижный в ЛСО наблюдатель. Такая величина не является Лоренц инвариантом (зависит от выбора наблюдателя), т.к. пропорциональна скалярному произведению двух 3-мерных векторов: $I \sim \int \vec{S} d\vec{\sigma}$, где \vec{S} — вектор Умова–Пойнтинга,

а $d\vec{\sigma}$ — вектор перпендикулярный элементарной площадке, через которую и измеряется поток энергии. Модуль последнего равен площади этой площадки.

Оказывается, как мы сейчас увидим, Лоренц инвариантом являются мощность потерь энергии самой заряженной частицей. Вычислим эту величину. Очевидно, что порция $dI \cdot dt$ ЭМ энергии, которую внутри телесного угла $d\Omega$ измеряет неподвижный наблюдатель за промежуток времени $[t, t+dt]$ испущена частицей в течении интервала времени $[t_r, t_r+dt_r]$. Обозначим эту величину за $-d^2\mathcal{E} = dI \cdot dt$. Излученную частицей энергию нужно относить именно к интервалу времени dt_r — времени реального испускания ЭМ волны, а не ее измерения каким-то далеким наблюдателем. Поэтому искомая мощность потерь в данный телесный угол равна:

$$-\frac{d^2\mathcal{E}}{dt_r d\Omega} = \frac{dI \cdot dt}{dt_r d\Omega} = \frac{dI}{d\Omega} \frac{dt}{dt_r}.$$

Это соотношение устанавливает связь между потерей энергии частицей и интенсивностью излучения, регистрируемого наблюдателем.

Интересуясь полными потерями энергии частицы в полный телесный угол 4π , получаем, что

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = \int \frac{dI}{d\Omega} \frac{dt}{dt_r} d\Omega.$$

Т.к. $t - t_r = R(t_r)/c$, где $R(t_r) = |\vec{x} - \vec{z}(t_r)|$, то

$$\frac{dt}{dt_r} = 1 + \frac{d}{dt_r} \frac{R(t_r)}{c} = 1 - \frac{(\vec{R}(t_r), \dot{\vec{R}}(t_r))}{R(t_r) c} = \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right) \Big|_{t_r}, \quad (177)$$

где, как обычно, $\vec{n} = \vec{R}/R$. Таким образом,

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = \int \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c} \right) \frac{dI}{d\Omega} d\Omega \Big|_{t_r} \Rightarrow I \equiv \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega \neq -\frac{d\mathcal{E}}{dt_r}. \quad (178)$$

Как видно мощность потерь энергии вовсе не совпадает с полной интенсивностью. Как мы уже упомянули, величина $d\mathcal{E}/dt_r$ является Лоренц инвариантом, а потому является более удобной характеристикой излучения, чем полная интенсивность I .

Чтобы убедиться в том, что мощность потерь является Лоренц инвариантом, посчитаем ее в двух различных ИСО: в мгновенно сопутствующей ИСО, где частица в данный момент времени покоится, и в ЛСО. В мгновенно сопутствующей ИСО имеем:

$$-\frac{d\mathcal{E}_0}{d\tau_r} = \int \left(\frac{dI}{d\Omega} \right)_0 d\Omega = \int \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta d\Omega = \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3}, \quad (179)$$

где время τ_r в мгновенно сопутствующей ИСО совпадает с собственным временем частицы. В мгновенно сопутствующей ИСО частица покоится, поэтому в ней мы можем использовать нерелятивистскую формулу для $\left(\frac{dI}{d\Omega} \right)_0$. Следовательно, в качестве ответа для

мощности потерь мы и получаем полную нерелятивистскую интенсивность дипольного излучения. Это важное нерелятивистское выражение (179) называется формулой Лармора.

Далее, поскольку $\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_0$ является четной функцией от θ , то в мгновенно сопутствующей ИСО не происходит потери импульса частицей, т.е. $d\vec{P}_0 = 0$. Значит 4-вектор потерь энергии-импульса частицы за время $d\tau_r$ в сопутствующей ИСО имеет вид $(-d\mathcal{E}_0/c, 0)$. Перейдем теперь путем преобразования Лоренца в ЛСО. Для рассматриваемого 4-вектора имеем:

$$-d\mathcal{E} = \frac{-d\mathcal{E}_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Поэтому

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = -\frac{d\mathcal{E}_0}{dt_r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Но заметим, что $dt_r \sqrt{1 - v^2/c^2} = d\tau_r$ по определению связи собственного τ_r с координатным t_r временем. Поэтому имеем, что

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = -\frac{d\mathcal{E}_0}{d\tau_r},$$

т.е. мощность потерь совпадает в двух ИСО, а поэтому является Лоренц инвариантом.

Релятивистское обобщение формулы Лармора достаточно очевидно: \dot{v}^2 следует заменить релятивистским инвариантом, который переходит в $\dot{v}^2 = a^2$, когда $v/c \rightarrow 0$. Такой инвариант нам известен. Это квадрат 4-ускорения $w^\mu = du^\mu/ds = d^2x^\mu/ds^2$. Если $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, то, воспользовавшись выражением для компонент w^μ , которые получены нами на прошлой лекции, мы находим, что он равен:

$$\begin{aligned} w^\mu w_\mu &= \gamma^8 \frac{(\vec{v}, \vec{a})^2}{c^6} - \gamma^4 \frac{a^2}{c^4} - \gamma^8 \frac{v^2 (\vec{v}, \vec{a})^2}{c^8} - 2\gamma^6 \frac{(\vec{v}, \vec{a})^2}{c^6} = \\ &= \gamma^8 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{(\vec{v}, \vec{a})^2}{c^6} - 2\gamma^6 \frac{(\vec{v}, \vec{a})^2}{c^6} - \gamma^4 \frac{a^2}{c^4} = -\gamma^4 \frac{a^2}{c^4} - \gamma^6 \frac{(\vec{v}, \vec{a})^2}{c^6} = \\ &= -\frac{\gamma^6}{c^4} \left\{ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) a^2 + \frac{1}{c^2} (\vec{v}, \vec{a})^2 \right\} = -\frac{\gamma^6}{c^4} \left\{ a^2 - \frac{1}{c^2} (a^2 v^2 - (\vec{v}, \vec{a})) \right\} = \\ &= -\frac{\gamma^6}{c^4} \left\{ a^2 - \frac{1}{c^2} [\vec{v} \times \vec{a}]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (180)$$

Видно, что $-c^4 w^\mu w_\mu \rightarrow a^2$ при $v/c \rightarrow 0$. Таким образом, получаем

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = -\frac{2e^2 c}{3} w_\mu w^\mu = \frac{2e^2 \gamma^6}{3c^3} \left\{ a^2 - \frac{[\vec{v} \times \vec{a}]^2}{c^2} \right\} \quad (181)$$

— релятивистское обобщение формулы Лармора.

5. Аппендикс о квадрупольном и магнитодипольном излучении. Рассмотрим теперь излучение в нерелятивистском приближении, обусловленное следующими членами

разложения \vec{A} по степеням отношения $d/\lambda \ll 1$. Хотя эти члены малы по сравнению с дипольным, они существенны в тех случаях, когда дипольный момент системы равен нулю, т.ч. дипольное излучение отсутствует. Разлагая выражение

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{cx} \int \vec{j} \left(t_r + \frac{(\vec{n}, \vec{y})}{c}, \vec{y} \right) d^3y, \quad t_r \equiv t - \frac{x}{c},$$

по степеням $(\vec{n}, \vec{y})/c$ до первой степени, получаем:

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{cx} \int \vec{j}(t_r, \vec{y}) d^3y + \frac{1}{c^2 x} \frac{\partial}{\partial t_r} \int \vec{j}(t_r, \vec{y}) \cdot (\vec{n}, \vec{y}) d^3y.$$

Переходя к точечным зарядам, получаем:

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{cx} \sum_q e_q \vec{v}_q(t_r) + \frac{1}{c^2 x} \frac{\partial}{\partial t_r} \sum_q e_q \vec{v}_q \cdot (\vec{n}, \vec{r}_q)(t_r).$$

Т.к.

$$\vec{v} \cdot (\vec{r}, \vec{n}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{r} \cdot (\vec{n}, \vec{r}) + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot (\vec{n}, \vec{r}) - \frac{1}{2} \vec{r} \cdot (\vec{n}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{r} \cdot (\vec{n}, \vec{r}) + \frac{1}{2} [(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{n}],$$

то

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\dot{\vec{d}}}{cx} + \frac{1}{2c^2 x} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_q e_q \vec{r}_q (\vec{n}, \vec{r}_q) + \frac{1}{cx} [\dot{\vec{m}} \times \vec{n}],$$

где \vec{d} — дипольный момент системы, а

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_q e_q [\vec{r}_q \times \vec{v}_q]$$

— ее магнитный момент.

Заметим далее что, если к \vec{A} добавить любую величину пропорциональную \vec{n} , то это не изменит $\vec{E} = [\vec{n} \times \vec{B}]$ и $\vec{B} = -\frac{1}{c} [\vec{n} \times \vec{A}']$. Поэтому \vec{A} можно записать как:

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{\dot{\vec{d}}}{cx} + \frac{1}{6c^2 x} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_q e_q [3\vec{r}_q (\vec{n}, \vec{r}_q) - \vec{n} r_q^2] + \frac{1}{cx} [\dot{\vec{m}} \times \vec{n}].$$

Стоящее в этой формуле под знаком $\partial^2/\partial t^2$ выражение есть произведение $n_i D_{ij}$, вектора \vec{n} на 3-мерный тензор квадрупольного момента D_{ij} . Вводя вектор \vec{D} с компонентами $D_j \equiv n_i D_{ij}$, записываем

$$\vec{A} = \frac{\dot{\vec{d}}}{cx} + \frac{1}{6c^2 x} \ddot{\vec{D}} + \frac{1}{cx} [\dot{\vec{m}} \times \vec{n}]. \quad (182)$$

Тогда

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2 x} \left\{ [\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}] + \frac{1}{6c} [\ddot{\vec{D}} \times \vec{n}] + [[\dot{\vec{m}} \times \vec{n}] \times \vec{n}] \right\}, \quad \vec{E} = [\vec{B} \times \vec{n}]$$

Дифференциальная интенсивность определяется как и выше. Мы напишем здесь ответ для полной интенсивности. Для этого усредним dI по всем направлениям \vec{n} с использованием формулы $\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}$. При усреднении выражения для \vec{B}^2 все взаимные произведения первого, второго и третьего вкладов в \vec{B} исчезают, т.ч. мы получаем:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{ij}^2 + \frac{2}{3c^3} \ddot{m}^2. \quad (183)$$

Таким образом, полное излучение состоит из трех независимых частей — дипольного, квадрупольного и магнитнодипольного излучений.

Вопросы и задачи

- Рассмотрим покоящийся заряд в пространстве Минковского. Наблюдатель же движется с ускорением далеко от заряда. Излучает ли заряд в системе отсчета наблюдателя? Мотивировать ответ.
- Идеальная равномерно заряженная сфера совершает радиальные колебания с соблюдением идеальной сферической симметрии. Излучает ли такая сфера? Мотивировать ответ.
- Используя решения задач из предыдущих лекций, покажите, что аналогом вектора Пойнтинга для скалярного поля ϕ является вектор $S_i = \partial_0 \phi \partial_i \phi$. Используя это выражение, покажите, что для формирования излучения скалярного поля достаточно наличия заряда (не нужен дипольный момент как для электромагнитного излучения) и движения с постоянной скоростью (не нужно ускорение). Как это наблюдение соотносится с пунктом 8 лекции III?
- На самом деле при $\vec{d} \neq 0$ в выражение (183) для интенсивности есть еще один не подавленный вклад, который мы упустили при нашем выводе (наш вывод квадрупольного и магнитнодипольного излучения корректен только, если $\vec{d} = 0$). Попробуйте восстановить упущенный вклад.

Лекция XII; Синхротронное излучение и его свойства, сила радиационного трения, Лоренцева линия, пределы применимости классической электродинамике.

1. Применим полученные на предыдущей лекции формулы для анализа потерь энергии на излучение релятивистской частицей, движущейся в однородном постоянном магнитном поле \vec{B} в плоскости, перпендикулярной \vec{B} . Излучение при вращении в магнитном поле называется синхротронным или магнитно-тормозным.

При движении рассматриваемого типа, $\vec{v} \perp \dot{\vec{v}} \perp \vec{B}$, мощность потерь определяется по формуле:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = \frac{2e^2\gamma^6}{3c^3} \left[\dot{v}^2 - \frac{v^2\dot{v}^2}{c^2} \right] = \frac{2e^2\gamma^4}{3c^3} \dot{v}^2.$$

Далее в рассматриваемой ситуации:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m\dot{\vec{v}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\gamma\dot{\vec{v}} = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}].$$

Следовательно

$$\dot{v}^2 = \frac{e^2}{m^2 c^2 \gamma^2} v^2 B^2$$

и

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = \frac{2e^4\gamma^2 v^2 B^2}{3m^2 c^5}. \quad (184)$$

Для ультррелятивистской частицы $v \approx c$ и поэтому

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} \sim \gamma^2 \sim \mathcal{E}^2,$$

т.е. потери энергии пропорциональны ее второй степени ($\mathcal{E} = m c^2 \gamma$).

Синхротронное излучение можно с очень хорошей точностью описать с использованием аппарата спецфункций. Это выходит за рамки нашего курса, поэтому мы ограничимся качественными общефизическими соображениями. Для начала воспроизведем вышеуказанные свойства синхротронного излучения из общефизических соображений. Прделаем это, положив скорость света $c = 1$. В мгновенно сопутствующей вращающемуся электрону ИСО интенсивность равна

$$W \equiv -\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} \sim e^2 (a')^2 \sim \frac{e^4}{m^2} (E')^2.$$

Как мы знаем из предыдущей лекции, полная интенсивность в мгновенно сопутствующей ИСО совпадает с мощностью потерь и является Лоренц инвариантом. Здесь e и m — заряд

и масса электрона, a — его ускорение, E — напряженность электрического поля; a и E снабжены штрихами, чтобы указать, что они относятся к мгновенно сопутствующей ИСО. E' получается из магнитного поля B в ЛСО преобразованием Лоренца

$$E' \sim B \gamma.$$

Поэтому

$$W \sim \frac{e^4}{m^2} B^2 \gamma^2,$$

что, как видно, воспроизводит полученный выше результат. Если вместо магнитного поля B фиксировать радиус R траектории электрона (или, что тоже самое в релятивистском пределе, частоту вращения), связанный с B соотношением $eB \sim m\gamma/R$, то выражение для мощности потерь выглядит как:

$$W \sim \frac{e^2 \gamma^4}{R^2}.$$

Очевидно, что в нерелятивистском случае электрон, вращаясь с частотой Лармора ω_0 , будет излучать дискретный спектр частот $\omega_n = n\omega_0$, где n — пробегает значения в натуральных числах. При этом характерная частота излучения в нерелятивистском случае будет отвечать $n \sim 1$. В нерелятивистском случае можно применить формулы дипольного приближения. Поэтому излучение в этом случае практически однородно по углам $dI/d\Omega \sim \sin^2 \theta$, в отличие от релятивистского случая. Общие характеристики углового распределения излучения в релятивистском случае мы обсудили на прошлой лекции. Очевидно, что все выводы сделанные там верны и для случая синхротронного излучения.

Проанализируем теперь частотный спектр, т.е. распределение интенсивности по частотам, в релятивистском случае. Для начала оценим характерную частоту синхротронного излучения в релятивистском случае. Вращающаяся по радиусу R релятивистская частица излучает вперед с расстройкой угла $1/\gamma$. В заданном направлении излучение может идти с части траектории, которая имеет длину $l \sim R \Delta\theta \sim R/\gamma$ и называется длиной формирования излучения или длиной когерентности. Время формирования излучения в данном направлении соответственно равно $\Delta t_r \sim R/\gamma c$. Тогда длительность приема сигнала равна

$$\Delta t \sim \left(1 - \frac{(\vec{n}, \vec{v})}{c}\right) \Delta t_r \sim \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right) \Delta t_r \sim \frac{R}{c\gamma^3}.$$

Это означает, что характерная частота излучения в γ^3 раз больше, чем частота обращения частицы по окружности:

$$\omega_c \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \frac{\gamma^3 c}{R} \sim \gamma^3 \omega_0.$$

Т.е. характерное значение $\omega_c/\omega_0 \equiv n_c \sim \gamma^3 \gg 1$. При этом, так как расстояние между линиями спектра порядка ω_0 , а $\omega_c \gg \omega_0$, то в ультрарелятивистском случае спектр можно считать практически непрерывным.

График распределения мощности потерь W_ω синхротронного излучения по частотам изображен на рисунке (12). Как видно при частоте $\omega > \omega_c$ интенсивность очень быстро

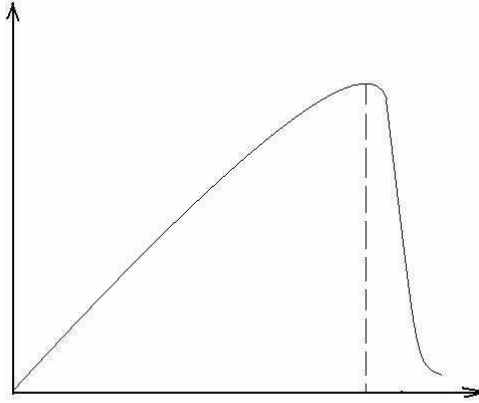


Рис. 12: По вертикальной оси этого графика отложена мощность потерь при данной частоте W_ω . По горизонтальной — ω . Пик графика приходится на ω_c .

спадают. Мне не известно, как можно восстановить из общезначимых соображений поведение графика в этой части спектра, но его характерное поведение $W_\omega \sim e^{-\text{const} \omega / \omega_c}$ легко угадывается.

При $\omega < \omega_c$ наблюдается медленный рост. Естественно предположить, что при малых частотах, $\omega \lesssim \omega_c$, спектр имеет степенное поведение: $W_\omega \sim \omega^\nu$, где ν некоторая константа. В силу быстрого спада при $\omega > \omega_c$, основной вклад в полную мощность набирается на малых частотах $W \sim \int_0^{\omega_c} d\omega W_\omega \sim \omega_c^{\nu+1} \sim \gamma^{3(\nu+1)}$. Сравнивая полученный ответ с известным нам выражением $W \sim \gamma^4$, получаем, что $\nu = 1/3$, т.е. $W_\omega \sim \omega^{1/3} \sim n^{1/3}$ при $\omega < \omega_c$. Что действительно верно воспроизводит более точное вычисление.

2. Теперь мы обратимся к изучению вопроса о реакции заряженной частицы на созданное ею излучение. Для полного решения задачи безусловно мы должны решать систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 4\pi e \int d\tau u^\nu(\tau) \delta^{(4)}[x - z(\tau)] \\ m c w^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu + F_0^\mu, \end{cases} \quad (185)$$

где F_0^μ внешняя 4-сила (которая сама нередко бывает ЭМ происхождения и, следовательно, порождается какими-то внешними зарядами), заставляющая нашу частицу двигаться ускоренно. Но всюду в предыдущих лекциях мы решали либо второе уравнение при заданном внешнем поле, пренебрегая при этом полем, создаваемым частицей, либо же первое уравнение при заданном движении частицы, пренебрегая при этом откликом излучения на движение частицы. Единственное точное решение этой системы уравнений, которое известно мне — это ситуация, когда $F_0^\mu = 0$ и единственная частица, покоится создавая поле Кулона. Если не ошибаюсь, все остальные точно решаемые задачи в рассматриваемой ситуации получаются из этой преобразованием Лоренца⁸. Например, уже даже ситуация с

⁸Можно, конечно, еще добавить несколько банальных примеров вроде ситуации с группой статических зарядов, которые держат внешние силы.

двумя заряженными частицами имеет только приближенное решение, т.к. частицы, взаимодействуя друг с другом, движутся ускоренно, а следовательно, создают ЭМ излучение и рассматриваемая задача становится сложнее даже задачи многих тел, т.к. включает в себя еще и поле (сверх двух частиц).

Однако нередко рассматриваемая задача позволяет приближенное решение с достаточно хорошей точностью. Например, движение излучающей частицы можно считать заданным в том случае, когда влияние излучения на движение мало. Количественный критерий малости реакции излучения можно получить, сравнивая потерю энергии на излучение за некоторое время Δt с изменением кинетической энергии частицы под действием внешних сил за то же время.

Оценим обе энергии в СО, в которой, скорость частицы мала по сравнению со скоростью света:

$$\Delta \mathcal{E}_{rad} = \frac{2 e^2 \dot{v}^2 \Delta t}{3 c^3} = \frac{2 e^2 \dot{v} \Delta v}{3 c^3},$$

где Δv — изменение скорости за время Δt . При этом $\Delta \mathcal{E}_{kin} = m v \Delta v$. Неравенство $\Delta \mathcal{E}_{rad} \ll \Delta \mathcal{E}_{kin}$ дает

$$\frac{2 e^2 \dot{v}}{3 c^3} \ll m v.$$

Следовательно

$$\Delta t \approx \frac{v}{\dot{v}} \gg \frac{2 e^2}{3 m c^3} \sim \frac{r_e}{c}, \quad (186)$$

где $r_e = e^2/m c^2$ — классический радиус частицы (электрона, например). Объясним происхождение этой величины. Равномерно заряженный шар радиуса r и заряда e имеет электростатическую энергию e^2/r . Следовательно электростатическая энергия точечной частицы равна бесконечности, т.к. $r \rightarrow 0$. Предполагая же, что электростатическая энергия частицы и определяет ее энергию покоя $e^2/r_e = m c^2$, находим, что ее радиус равен $r_e = e^2/m c^2$. Безусловно это очень грубое рассуждение. В частности электрон несет заряд не только по ЭМ полю, не говоря уже о том, что в смысле квантовой теории его нельзя рассматривать как точечную частицу. Поэтому вышеприведенное рассуждение следует рассматривать лишь как просто определение такой величины как классический радиус частицы (электрона).

Полученное же нами условие (186) показывает, что характерный масштаб времени для изменения скорости частицы должен превышать время распространения ЭМ волны на расстояние порядка классического радиуса частицы. Для электрона это время $t_e \approx 0,63 \cdot 10^{-23}$ с. При периодическом или квазипериодическом движении критерий имеет вид: $T \gg t_e$ или $\omega t_e \ll 1$, где $T = 2\pi/\omega$ — период движения. Таким образом, реакцию частицы на излучение можно рассматривать как малый эффект, если движение частицы достаточно плавное: ее состояние слабо меняется за время t_e или на расстояниях порядка $r_e = c t_e$. При этих условиях можно попытаться учесть влияние реакции излучения на движение частицы в рамках последовательных приближений, считая ее малой поправкой.

Рассмотрим движение нерелятивистской частицы под действием внешней силы \vec{F}_0 . Для учета реакции на излучение добавим в правую часть уравнения движения эффективную силу \vec{F}_{rad} :

$$m \dot{\vec{v}} = \vec{F}_0 + \vec{F}_{rad}$$

Сконструируем эту силу таким образом, чтобы ее работа за единицу времени (т.е. мощность) была бы равна энергии излучаемой частицей за единицу времени:

$$\left(\vec{F}_{rad}, \vec{v} \right) = -\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2 = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{d}{dt} \left(\vec{v}, \dot{\vec{v}} \right) + \frac{2e^2}{3c^3} \left(\vec{v}, \ddot{\vec{v}} \right).$$

Строго это равенство, как видно, удовлетворить не возможно. Но, если движение частицы финитное, то при усреднении полная производная по времени зануляется, и мы можем записать закон сохранения энергии в среднем:

$$\overline{\left(\vec{F}_{rad}, \vec{v} \right)} = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{\left(\vec{v}, \ddot{\vec{v}} \right)}.$$

Следовательно, можно выбрать

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}} \quad (187)$$

Эта величина называется Лоренцевой силой радиационного торможения. При этом интегрально закон сохранения энергии соблюден. В итоге уравнение движения частицы имеет вид:

$$m \dot{\vec{v}} = \vec{F}_0 + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}}.$$

Полученное уравнение довольно не обычно и приводит к ряду противоречий. Прежде всего, оно содержит $\ddot{\vec{v}}$. Такая структура уравнения движения, как вы должны были усвоить на первой лекции, находится в противоречии с основными положениями классической механики, вся схема которой предполагает, что уравнения движения должны иметь второй порядок по производным по времени. Поэтому некоторые его решения оказываются физическими бессмысленными. Например, при $\vec{F}_0 = 0$ уравнение $\dot{\vec{v}} = \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\vec{v}}$ имеет решение вида $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 e^{t/\tau}$, где $\tau = 2e^2/3mc^3$, а \vec{v}_0 и \vec{v}_1 некоторые постоянные вектора. Полученное нами решение описывает неограниченное самоускорение частицы в отсутствие внешних сил. Это происходит потому, что рассмотренное нами эффективное уравнение движения описывает незамкнутую систему, из которой исключены ЭМ поля.

3. Поясним ситуацию на примере простой механической системы. Рассмотрим два шарика одинаковой массы m , соединенных пружинами жесткости k друг с другом и со стенками, как изображено на рис. (13). Пусть x_1 и x_2 смещения первого и второго шариков из положения равновесия. Тогда уравнения движения шариков имеют вид:

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 = -k x_1 - k(x_1 - x_2) = -2k x_1 + k x_2 \\ m \ddot{x}_2 = -k x_2 - k(x_2 - x_1) = -2k x_2 + k x_1 \end{cases} \quad (188)$$

Я хочу решить эту систему уравнений относительно x_2 и найти уравнение движения только для первого из шариков — для x_1 . Дважды продифференцировав первое уравнение,

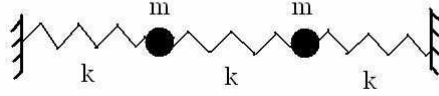


Рис. 13:

получим $m \ddot{x}_1 = -2k \ddot{x}_1 + k \ddot{x}_2$. Подставим в полученное уравнение \ddot{x}_2 из второго уравнения:

$$m \ddot{x}_1 = -2k \ddot{x}_1 + \frac{k}{m} (-2k x_2 + k x_1).$$

Подставим в это уравнение x_2 , выразив его через x_1 и \ddot{x}_1 из первого уравнения рассматриваемой системы. В результате получаем дифференциальное уравнение только на x_1 :

$$m \ddot{x}_1 = -4k \ddot{x}_1 - 3k x_1.$$

Т.е., явно исключив из рассмотрения одну из частиц, для другой мы получаем уравнение, содержащее более высокие степени по производным, что, в частности, приводит к самоускоряющимся решениям.

Аналогично при поиске силы радиационного трения, мы решили систему уравнений (185) относительно ЭМ поля A_μ и подставили это решение во второе уравнение для мировой линии частицы. Поэтому мы получили более высокую, чем вторая степень по производным по времени. Более того, в отличие от рассмотренной только что механической системы, для системы частица–поле мы это сделали только приближенно.

В любом случае, когда сила радиационного трения входит в уравнения движения как малая добавка к внешним силам, описываемая по методу последовательных приближений, тогда она дает физически осмысленные результаты. Эту силу используют, т.к. в некоторых приложениях она очень удобна, как мы сейчас увидим.

4. Учет силы радиационного трения приводит к некоторым качественным эффектам при рассмотрении излучения и рассеяния ЭМ волн атомными системами. Конечно излучение, поглощение и рассеяние ЭМ волн атомными системами — это сугубо квантовые процессы, последовательное описание которых возможно только на основе квантовой электродинамики. Но многие качественные характеристики этих явлений хорошо передаются моделью взаимодействия ЭМ волн с гармоническим осциллятором — зарядом, колеблющимся под действием силы Гука, которая моделирует реальную силу в атомной системе.

Свободные колебания электрона под действием упругой силы с центром в начале координат описываются уравнением:

$$m \ddot{\vec{r}} + m \omega_0^2 \vec{r} = 0$$

Если бы не было излучения, это уравнение точно описывало бы поведение частицы, и мы имели бы дело с незатухающими гармоническими колебаниями с частотой ω_0 . Но реакция на излучение приводит к появлению силы радиационного трения, которую следует добавить в правую часть уравнения:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{2e^2}{3mc^3} \dddot{\vec{r}}.$$

В принципе это уравнение можно решить точно, но т.к. мы в любом случае решаем эту задачу приближенно, то будем искать ее решение методом последовательных приближений, считая силу радиационного трения малой. В нулевом приближении $\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r}$, поэтому $\dddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \dot{\vec{r}}$. Тогда рассматриваемое уравнение упрощается до уравнения движения осциллятора с трением:

$$\ddot{\vec{r}} + \Gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = 0,$$

где $\Gamma = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^3} \ll \omega_0$, если характерная длина волны излучения $\lambda_0 \gg r_e$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\vec{r}(t) = \text{Re } \vec{r}_0 e^{-i\omega t},$$

где $|\vec{r}_0|$ — начальная амплитуда осцилляций, а

$$\omega^2 - i\omega\Gamma + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega \approx -\frac{i}{2}\Gamma + \omega_0,$$

если $\Gamma \ll \omega_0$. Таким образом, $\vec{r} = \text{Re } \vec{r}_0 e^{-\frac{\Gamma}{2}t - i\omega_0 t}$.

Поскольку поле излучения в волновой зоне пропорционально $\vec{d} \sim \ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r}$, то $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{\Gamma}{2}t - i\omega_0 t}$. Фурье компоненты такого поля равны

$$\vec{E}_\omega = \int_0^{+\infty} dt \vec{E}(t) e^{i\omega t} = \frac{\vec{E}_0}{i(\omega - \omega_0) - \frac{\Gamma}{2}}.$$

Т.е. интенсивность излучения с данной частотой имеет вид:

$$I_\omega \sim \left| \vec{E}_\omega \right|^2 \sim \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

Из того, что полная интенсивность равна I_0 , находим коэффициент пропорциональности в последнем выражении:

$$I_0 = C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = C \frac{2\pi}{\Gamma}$$

Следовательно:

$$I_\omega = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{I_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (189)$$

Такая форма спектра называется Лоренцевой линией.

Если $\Gamma \rightarrow 0$, т.е. реакция на излучение отсутствует, то $I_\omega = I_0 \delta(\omega - \omega_0)$, где мы воспользовались одним из определений δ -функции, приведенном на одной из прошлых лекций. Как видно, в этом случае осциллятор излучает только с одной частотой. А учет радиационного трения приводит к качественно новому эффекту — конечной ширине спектра излучения гармонического осциллятора. При этом Γ называется естественной шириной линии.

На самом деле в естественную ширину линии есть еще и другие вклады, помимо того, что мы учли. Например, за счет столкновений и теплового движения. Но оказывается, что более точный квантово теоретико полевой расчет линии спектра для атомных систем дает такую же форму линии спектра, но с другим значением Γ . Т.е. наши выкладки качественно верно отражают реальную картину.

5. Теперь рассмотрим ту же задачу о гармоническом осцилляторе, но уже в другой постановке, когда на этот осциллятор действует внешнее ЭМ поле плоской монохроматической волны. Тогда под действием внешней силы частица станет совершать вынужденные колебания, двигаясь ускоренно, и тем самым, излучая ЭМ волны. Эти волны называются рассеянными волнами, а сам этот процесс — процессом рассеяния падающей ЭМ волны осциллятором (или какой либо другой атомной системой).

Рассматривая процесс рассеяния ЭМ волн, в правую часть уравнения движения заряженной частицы нужно добавить силу взаимодействия заряженной частицы с полем волны:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \left(\vec{E}_0 + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}_0] \right) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\vec{r}}.$$

В таком виде уравнение слишком сложно. Во-первых учтем, что магнитное поле входит с фактором $v/c \ll 1$, т.к. мы рассматриваем нерелятивистский случай, и член с магнитным полем можно отбросить в грубом приближении. Далее, будем считать амплитуду колебаний "a" электрона малой по сравнению с длиной падающей ЭМ волны, т.е. $a \ll \lambda$, чтобы в фазе волны можно было бы пренебречь $(\vec{k}, \vec{r}) \sim a/\lambda \ll 1$ по сравнению с ωt . Тогда имеем:

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\vec{r}}.$$

Будем искать решение полученного уравнения последовательными приближениями и в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$, отвечающем вынужденным колебаниям. Получим:

$$\vec{r}_0 (-\omega^2 + \omega_0^2 - i\Gamma\omega) = \frac{e}{m} \vec{E}_0,$$

здесь $\Gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}$ и в принципе зависит от частоты внешнего поля. Таким образом,

$$\vec{r}(t) = \text{Re} \frac{e \vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega)}.$$

Далее, вычисляя вторую производную дипольного момента колеблющейся частицы $\ddot{\vec{d}} = e \ddot{\vec{r}}$

$$\ddot{\vec{d}} = -\frac{e^2 \omega^2 \vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega)},$$

получаем

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{8\pi c^3} \left| \left[\ddot{\vec{d}} \times \vec{n} \right] \right|^2 = \frac{e^4 \omega^4 |\vec{E}_0|^2 \sin^2 \theta}{8\pi c^3 m^2 \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2 \right]}$$

— распределение интенсивности излучения волн осциллятором по углам.

Процесс рассеяния обычно характеризуется эффективным дифференциальным сечением рассеяния, которое определяется как отношение потока рассеянного излучения в данный элемент телесного угла к полному потоку падающего излучения:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{|\vec{S}|} \frac{dI}{d\Omega}. \quad (190)$$

Здесь $|\vec{S}| = c |\vec{E}_0|^2 / 8\pi$ — плотность потока энергии в падающей волне. Учитывая эти формулы, получаем выражение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}, \quad (191)$$

которым удобно пользоваться при изучении рассеяния волны с линейной поляризацией.

Рассмотрим теперь один частный важный случай свободного заряда. Т.е. когда $\omega_0 = 0$ и к тому же $\Gamma \ll \omega$, т.е. можно положить $\Gamma = 0$. Для свободных зарядов дифференциальное сечение имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2 \theta,$$

а полное сечение определяется формулой Томсона:

$$\sigma \equiv \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int r_e^2 \sin^2 \theta d\Omega = 2\pi r_e^2 \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \quad (192)$$

6. Определим теперь границы применимости классической электродинамики. Нетрудно сформулировать условие малости радиационной силы по сравнению с внешней силой \vec{F}_0 , которая то же имеет ЭМ природу. Записывая

$$\vec{F}_0 = e \vec{E}_0 + \frac{e}{c} \left[\vec{v} \times \vec{B}_0 \right],$$

находим в нулевом приближении по \vec{F}_{rad} :

$$\ddot{\vec{v}} = \frac{\dot{\vec{F}}}{m} = \frac{e}{m} \dot{\vec{E}}_0 + \frac{e}{m c} \left[\dot{\vec{v}} \times \vec{B}_0 \right] + \frac{e}{m c} \left[\vec{v} \times \dot{\vec{B}}_0 \right].$$

В мгновенно сопутствующей ИСО $\vec{v} = 0$, а $\dot{\vec{v}} = e \vec{E}_0/m$. Следовательно,

$$\vec{F}_{rad} \equiv \frac{2 e^2}{3 c^3} \ddot{\vec{v}} = \frac{2 e^3}{3 m c^3} \dot{\vec{E}}_0 + \frac{2 e^4}{3 m^2 c^4} [\vec{E}_0 \times \vec{B}_0] \ll e \vec{E}_0.$$

В периодическом внешнем поле с частотой ω имеем, что $|\vec{E}_0| \sim \text{Re } e^{-i\omega t}$, $\dot{\vec{E}}_0 = \text{Re } (-i\omega \vec{E}_0)$. Следовательно, мы получаем два условия:

1. $e^3 \omega/m c^3 \ll e \Rightarrow e^2/m c^2 \ll c/\omega \sim \lambda_0 \Rightarrow r_e \ll \lambda_0$ — длина волны излучения гораздо больше классического радиуса частицы.
2. $e^3 B_0/m^2 c^4 \ll 1 \Rightarrow B_0 \ll m^2 c^4/e^3$ — ограничение на величину поля.

Однако квантовые эффекты ограничивают область применимости классической электродинамики значительно меньшими полями и значительно большими расстояниями.

Вопросы и задачи

- Излучает ли равномерно и прямолинейно ускоряющийся заряд? Мотивируйте свой ответ. Чему равна сила радиационного трения в этом случае? Почему?
- В системе уравнений (185) избавьтесь от ЭМ поля точно. Используйте для этого функцию Грина для поля. Выведите силу радиационного трения из полученного выражения. Найдите физический смысл получающихся расходящихся интегралов.