

**Программа курса «Логика и алгоритмы»
сентябрь-ноябрь 2016 г.**

1. Понятие множества. Равенство множеств. Аксиомы объемности, пары. Булевы операции. Бесконечные объединения и пересечения множеств. Аксиома объединения.
2. Множество всех подмножеств данного множества и аксиома степени. Упорядоченные пары (по Куратовскому). Декартово произведение множеств. Отображения множеств, инъективность, сюръективность.
3. Бинарные отношения. Отношения эквивалентности. Соответствие между разбиениями множества и отношениями эквивалентности на нём. Фактормножество. Равномощность множеств. Множество Y^X всех функций $f : X \rightarrow Y$. Биекция между $\mathcal{P}(X)$ и 2^X .
4. Натуральный ряд. Аксиома бесконечности и формальное определение множества натуральных чисел (по фон Нейману). Принцип математической индукции. Его вывод из определения натурального ряда. Принцип наименьшего числа и его вывод из принципа индукции.
- 5* Конечные множества. Принцип Дирихле: не существует инъекции из n -элементного множества в m -элементное множество при $m < n$. Его вывод из принципа индукции.
- 6* Существование и единственность функции натурального аргумента, определяемой по рекурсии. Определение сложения и умножения натуральных чисел.
7. Счётные множества. Подмножество счётного множества конечно или счётно. Всякое бесконечное множество имеет счётное подмножество. Объединение счётного множества счётных множеств счётно. Счётность $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, \mathbb{N}^k и \mathbb{N}^* (множества всех конечных последовательностей натуральных чисел). Равномощность \mathbb{R} и $2^{\mathbb{N}}$.
8. Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора–Бернштейна. Теорема Кантора: множество $\mathcal{P}(X)$ не равномощно X . Несчётность \mathbb{R} .
9. Частично упорядоченные множества. Терминология: строгий и нестрогий порядок, линейный порядок, максимальный элемент, наибольший элемент, верхняя грань множества, цепь в частично упорядоченном множестве. Диаграммы конечных множеств. Операции суммы и произведения линейно упорядоченных множеств. Примеры: $\omega + \omega$, $\omega \times \omega$.
10. Вполне упорядоченные множества. Начальные отрезки. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему собственному начальному отрезку. Из любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого.
11. Аксиома выбора. Теорема Цермело (всякое множество может быть вполне упорядочено). Лемма Цорна. Доказательство их эквивалентности. Следствие о том, что любые два множества сравнимы по мощности.
- 12* Объединение и декартово произведение двух бесконечных множеств равномощно большему из них.
13. Логика высказываний, понятие формулы. Таблицы истинности, булевы функции. Теорема о представимости всякой булевой функции формулой логики высказываний. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме.

- 14* Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Выводимость из гипотез и семантическое следование. Теорема о дедукции. Теорема о корректности и полноте исчисления высказываний: формула выводима из множества гипотез Γ тогда и только тогда, когда она семантически следует из Γ .
15. Язык логики предикатов. Понятие термина и формулы. Связанные и свободные вхождения переменных в формулу. Понятие модели, примеры моделей. Определение истинности формулы в модели.
16. Множества, предикаты и функции, выразимые в данной модели. Гомоморфизмы, изоморфизмы, автоморфизмы моделей. Сохранение выразимых предикатов при изоморфизме. Метод доказательства невыразимости с помощью автоморфизма.
17. Теорема о предварённой нормальной форме для формул логики предикатов.