

Отчет проектной группы ”Решёточные модели”

Богданов Илья, Дмитриев Михаил, Закорко Полина, Куянов Федор,
Ожегов Фёдор, Скопенков Михаил (руководитель), Слизков Алексей,
Федоров Михаил, Широковских Светлана.

21 июня 2022 г.

1 Богданов Илья

Аннотация

Мы изучаем простейшую модель движения электрона, введенную Р.Фейнманом в 1965 году. Это игра, в которой шашка движется по шахматной доске по простым правилам, а мы считаем ее повороты. Модель также известна как одномерное квантовое блуждание. В своей публикации Р.Фейнман вводит дискретную версию интеграла по траекториям и ставит задачу вычисления предела модели, когда шаг решетки и средняя скорость стремятся к нулю, а время стремится к бесконечности. Получено нетривиальное продвижение в задаче на математическом уровне строгости в простом частном случае; даже в этом случае требуются неизвестные ранее методы. Также доказана гипотеза И.Гайдая-Турлова, Т.Ковалева и А.Львова о предельной вероятности смены киральности в модели, обобщающей недавний результат А.Устинова.

Все результаты выложены на сайте [arxiv.org \(https://arxiv.org/abs/2010.04583\)](https://arxiv.org/abs/2010.04583) и в данный момент находятся на рецензии в журнале.

Ключевые слова: Шашки Фейнмана, квантовые блуждания.

Сначала дадим нужные определения, а потом — точную формулировку результата.

Определение. Зафиксируем шаг решетки $\varepsilon > 0$ и массу частицы $m \geq 0$. Рассмотрим решетку $\varepsilon\mathbb{Z}^2 = \{(x, t) : x/\varepsilon, t/\varepsilon \in \mathbb{Z}\}$. Путем шашки будем называть конечную последовательность точек решетки таких, что вектор соединяющий две последовательные точки равен $(\varepsilon, \varepsilon)$ или $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Обозначим за $\text{turns}(s)$ число точек пути s таких, что векторы, соединяющие точку со следующей и с предыдущей, ортогональны. Для любых $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ обозначим за

$$a(x, t, m, \varepsilon) := (1 + (m\varepsilon)^2)^{(1-t)/2} i \sum_s (-im\varepsilon)^{\text{turns}(s)}$$

сумму по всем путям шаки s на $\varepsilon\mathbb{Z}^2$ из $(0, 0)$ в (x, t) таких, что первый шаг был сделан в $(\varepsilon, \varepsilon)$. Введем следующие обозначения:

$$a_1(x, t, m, \varepsilon) := \operatorname{Re}a(x, t, m, \varepsilon), \quad a_2(x, t, m, \varepsilon) := \operatorname{Im}a(x, t, m, \varepsilon), \quad P(x, t, m, \varepsilon) := |(a(x, t, m, \varepsilon))|^2.$$

Число $P(x, t, m, \varepsilon)$ называется *вероятностью обнаружения в точке (x, t) электрона, испущенного из точки $(0, 0)$* . Величину $\sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}} a_1^2(x, t, m, \varepsilon)$ будем называть вероятностью смены киральности электрона.

Нами была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для $0 \leq m\varepsilon \leq 1$ выполнено*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \in \varepsilon\mathbb{Z}}} \sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}} a_1(x, t, m, \varepsilon)^2 = \frac{m\varepsilon}{2\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}}.$$

Тем самым вероятность смены киральности за большое время (левая часть) явно выражена через массу частицы m и шаг решетки ε . Это выражение было высказано в качестве гипотезы И.Гайдай-Турловым, Т.Ковалевым и А.Львовым и доказано А.Устиновым в частном случае $m = \varepsilon = 1$. Ключевым новым шагом доказательства при произвольных m и ε является следующее утверждение, в котором $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ обозначает многочлен Лежандра.

Предложение 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ выполнено*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \in \varepsilon\mathbb{Z}}} \sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}} a_1(x, t, m, \varepsilon)^2 = \frac{m^2\varepsilon^2}{1 + m^2\varepsilon^2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \left(\frac{1 - m^2\varepsilon^2}{1 + m^2\varepsilon^2} \right).$$

Также получена асимптотика для вещественной части суммы по путям из задачи Фейнмана в случае $x = 0$.

Теорема 2. *Для любого $\delta, m, \varepsilon > 0$ такого что $\delta \leq m\varepsilon \leq 1 - \delta$ и натурального n выполнено*

$$a_1(0, (2n + 2)\varepsilon, m, \varepsilon) = \sqrt{\frac{m\varepsilon}{2\pi n}} \cos \left((2n + 1) \arctan(m\varepsilon) - \frac{\pi}{4} \right) + O_\delta(n^{-3/2}).$$

Работа выложена на сервере arXiv (<https://arxiv.org/abs/2010.04583>) и в данный момент находится на рецензии в журнале.

Список литературы

- [1] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, J. Watrous, *One-dimensional quantum walks*, *Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (2001)*, 37–49.

- [2] Richard P Feynman, Albert R Hibbs, Daniel F Styer *Quantum Mechanics and Path Integrals*, (Dover Publications, 2010)
- [3] T. Jacobson, L.S. Schulman, *Quantum stochasticity: the passage from a relativistic to a non-relativistic path integral*, J. Phys. A 17:2 (1984), 375–383.
- [4] Jacob Korevaar, *Tauberian theory: a century of developments* (Springer, 2004)
- [5] N. N. Lebedev, Richard A. Silverman, *Special functions and their applications* (PRENTICE-HALL, INC., 1965)
- [6] A.P. Prudnikov, U. A. Brychkov, O. I. Marichev *Integrals and series* (Nauka, Moscow, 1981)
- [7] M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, Russian Math. Surveys 77:3(465) (2022), 73-160.
- [8] P. K. Suetin *Classical Orthogonal Polynomials*, 3rd ed. (PhysMathLit, 2005).
- [9] Gabor Szego, *Orthogonal polynomials* (American Mathematical Society, 1939)

2 Дмитриев Михаил

Аннотация

Получено элементарное доказательство теоремы Кеньёна о том, что периодическое замощение плоскости квадратами с периодами $(1, 0)$ и $(0, \lambda)$ возможно только тогда, когда $\lambda = p \pm \sqrt{q^2 - r^2}$ для некоторых рациональных $p \geq q \geq r \geq 0$.

Получено элементарное доказательство теоремы Амбаиниса и соавторов о том, что в модели шашки Фейнмана с поглощением амплитуды вероятности поглощения в начальной точке в заданный четный момент времени пропорциональны числам Каталана. Найдены вероятности поглощения в нескольких точках, близких к начальной.

Все результаты выложены на сайте arXiv.org (<https://arxiv.org/abs/2003.05430> и <https://arxiv.org/abs/2204.07861>), а первый из них данный момент находится на рецензии в журнале.

Ключевые слова: Шашки Фейнмана, вероятность поглощения, квантовые блуждания

Периодическим замощением плоскости квадратами с периодами $(\lambda, 0)$ и $(0, 1)$ назовем такое конечное множество непересекающихся по внутренним точкам квадратов Γ_1 на плоскости, что

1. любую точку плоскости можно параллельным переносом на вектор $(a, b\lambda)$ (где $a, b \in \mathbb{Z}$) сопоставить некоторой точке объединения квадратов из множества Γ_1 ;

2. никакие две точки внутренности объединения квадратов из множества Γ_1 нельзя перевести друг в друга параллельным переносом на вектор $(a, b\lambda)$ (где $a, b \in \mathbb{Z}$).

Получено элементарное доказательство теоремы Кеньёна о том, что периодическое замощение плоскости квадратами с периодами $(1, 0)$ и $(0, \lambda)$ возможно только тогда, когда $\lambda = p \pm \sqrt{q^2 - r^2}$ для некоторых рациональных $p \geq q \geq r \geq 0$.

Также доказан аналогичный новый результат об оклеивании прямоугольника квадратами с двух сторон в один слой.

Результат выложен на сайте arxiv.org (<https://arxiv.org/abs/2003.05430>) и в данный момент находится на рецензии в журнале.

Сравнение с результатами Федора Ожегова показывает, что в оклеиваниях равными и неравными квадратами получаются *разные* формулы для числа λ

Здесь и далее мы используем обозначения и понятия, введенные в определении модели «шашки Фейнмана» выше.

Определение. *Волновая функция* для модели с поглощением — это комплексное число

$$a(x, t \text{ bypass } x_0) := 2^{(1-t)/2} i \sum_s (-i)^{\text{turns}(s)},$$

где сумма берётся по всем путям s шашки из клетки $(0, 0)$ в клетку (x, t) , начинающимся с хода *вправо-вверх* и не проходящим через точки прямой $x = x_0$, кроме, быть может, начальной и конечной точки. Обозначим через $P(x, t \text{ bypass } x_0) := |a(x, t \text{ bypass } x_0)|^2$ *вероятность обнаружения электрона в клетке (x, t) , если он испущен из клетки $(0, 0)$ и поглощается на прямой $x = x_0$.*

Было получено новое и элементарное доказательство следующей известной теоремы.

Теорема 3 (Амбаинис и др.). *Для любого целого $t > 0$ выполнено*

$$a(0, t \text{ bypass } 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & t = 2; \\ \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{(k+1)2^{2(k+1)-1/2}}, & t = 4k + 4, k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Более того,

$$\sum_{t=1}^{\infty} P(0, t \text{ bypass } 0) = \frac{2}{\pi}.$$

Доказательство использует рекуррентное соотношения для чисел Каталана и новое аналогичное соотношение для чисел $a(0, t \text{ bypass } 0)$.

С помощью этой теоремы найдены вероятности поглощения в точках 2, 3 и -1 , что доказывает гипотезу Минаева–Русских.

Теорема 4.

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}} P(2, t \text{ bypass } 2) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} P(0, t \text{ bypass } 0) = \frac{2}{\pi}$$
$$2 \sum_t P(-1, t \text{ bypass } -1) = \sum_t P(3, t \text{ bypass } 3) = \frac{8}{\pi} - 2.$$

Также получено новое соотношение для значений волновой функции в модели ”шашки Фейнмана с поглощением” на одной диагонали.

Работа выложена на arxiv: <https://arxiv.org/abs/2204.07861>.

Список литературы

- [1] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, J. Watrous, One-dimensional quantum walks, Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (2001), 37-49.
- [2] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, New York, McGrawHill, 1965.
- [3] J. Kempe, Quantum random walks: an introductory overview, Contemp. Phys. 50:1 (2009), 339-359.
- [4] M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, Russian Math. Surveys 77:3(465) (2022), 73-160.
- [5] S.E. Venegas-Andraca, Quantum walks: a comprehensive review, Quantum Inf. Process. 11 (2012), 1015-1106.

3 Закорко Полина

Аннотация

Доказана новая равномерная асимптотика волновой функции в модели „Шашки Фейнмана” на всем отрезке между ее пиками в терминах функции Эйри. Этот результат подводит итог более чем 20-летней истории исследований Амбаиниса и соавторов, Сунады-Татэ и др.

Ключевые слова: Шашки Фейнмана, функции Эйри, квантовые блуждания

В модели „Шашки Фейнмана” была найдена равномерная асимптотика волновой функции на всем отрезке между ее пиками в терминах функции Эйри. Этот результат

подводит итог более чем 20-летней истории исследований Амбаиниса и соавторов, Сунады-Татэ и др. Функция Эйри определяется как

$$\text{Ai}(\lambda) := \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\lambda p + \frac{p^3}{3}\right) dp.$$

Теорема 5. Для любых целых x и $t > 0$, таких что $x + t$ нечетное и $x^2 \leq 2t^2$, выполняется равенство

$$a_1(x, t + 1, 1, 1) = (-1)^{(|x|-t+1)/2} \left(\frac{4\theta(x/t)}{1 - 2(x/t)^2}\right)^{1/4} \left(\frac{1}{t}\right)^{1/3} \text{Ai}(-\theta(|x|/t)t^{2/3}) + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

где

$$\theta(v) := \begin{cases} \left(\frac{3\pi}{8}\right)^{2/3}, & |v| = 0; \\ \left(\frac{3}{2} \left(-v \arctan\left(\frac{\sqrt{1-2v^2}}{v}\right) + \arctan(\sqrt{1-2v^2})\right)\right)^{2/3}, & 0 < |v| \leq 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

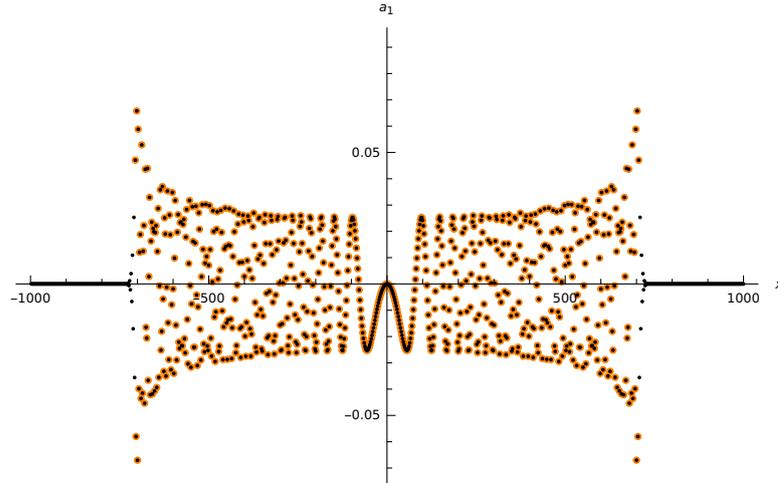


Рис. 1: График волновой функции $a_1(x, 1000)$ и ее аппроксимации из Теоремы 5 (черный и оранжевый графики соответственно).

Список литературы

- [1] M. Abramowitz, and I. A. Stegun, (Eds.), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 10th printing, New York: Dover, (1972).

- [2] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, J. Watrous, One-dimensional quantum walks, Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, (2001).
- [3] A. Anikin, S. Dobrokhотов, V. Nazaikinskii, A. Tsvetkova, Uniform asymptotic solution in the form of an Airy function for semiclassical bound states in one-dimensional and radially symmetric problems, Theoret. and Math. Phys., (2019).
- [4] V. A. Borovikov, Uniform stationary phase method, London, UK: IEE, (1994).
- [5] M. V. Fedoryuk, The saddle-point method, Nauka, Moscow, (1977).
- [6] R. P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, New York, McGraw-Hill, (1965).
- [7] M. N. Huxley, Area, lattice points, and exponential sums, The Clarendon Press, (1996).
- [8] J. Kempe, Quantum random walks: an introductory overview, Contemp. Phys. 50:1, 339-359, (2009).
- [9] M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, Russian Math. Surveys 77:3(465) (2022), 73-160.
- [10] S.E. Venegas-Andraca, Quantum walks: a comprehensive review, Quantum Inf. Process. 11, 1015–1106, (2012).

4 Куянов Федор

Аннотация

Доказано, что при $h/w > 3 + 2\sqrt{2}$ число диаграмм Юнга размера $h \times w$ с чётным числом ступенек больше, чем с нечётным, тогда и только тогда, когда w чётно. Получены продвижения в задаче, поставленной С. Нечаевым: найдены положения провалов этой вероятности при помощи численных экспериментов, а также сформулировано определение провала и выдвинута гипотеза о них.

Ключевые слова: шашки Фейнмана, квантовые блуждания, провалы.

Неформальное определение диаграмм Юнга состоит в том, что рассматривается набор клеток, выровненных по левой границе, причём длины строк образуют невозрастающую последовательность. Высотой называется количество этих строк, шириной – наибольшая длина строки. Числом ступенек у диаграммы Юнга назовём количество различных длин строк. Естественно задаться вопросом: каких диаграмм размера $w \times h$ больше – с чётным или нечётным числом ступенек? Ответ на этот вопрос совершенно нетривиален – это показывает рис. 3 ниже (красным цветом помечены те (w, h) , где диаграмм с нечётным числом ступенек больше, чем с чётным, зелёным – наоборот, синим – где чётных и нечётных

диаграмм поровну). Доказана следующая теорема, описывающая поведение данной диаграммы по краям:

Теорема 6. При $h/w > 3 + 2\sqrt{2}$ число диаграмм Юнга размера $w \times h$ с чётным числом ступенек больше, чем с нечётным, тогда и только тогда, когда w чётно.

Полученный результат напрямую связан с моделью «шашки Фейнмана» из квантовой механики. Это частный случай следующей теоремы:

Теорема 7. Обозначим $\tilde{a}_1(x, t) := a_1(x, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$, $\tilde{a}_2(x, t) := a_2(x + \varepsilon, t + \varepsilon, m, \varepsilon)$. Тогда для любых $x, t \in \varepsilon\mathbb{Z}, k \in \{1, 2\}$, таких что $\frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} < \frac{x}{t} \leq 1$, выполнено

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\tilde{a}_k(x, t)) &= (-1)^{\frac{t-x+k\varepsilon}{2\varepsilon}-1}, \\ |\tilde{a}_k(x - \varepsilon, t)| &> |\tilde{a}_k(x + \varepsilon, t)|, \end{aligned}$$

при чётном и нечётном $\frac{x+t}{\varepsilon} + k$ соответственно.

Эта теорема была представлена в докладе на конференции “Ломоносов” (12.04.2022).

Далее, на графике вероятности $P(x, 10^6, 1, 1)$ (рис. 2) четко видны провалы — участки, где колебания меньше, чем в соседних точках. С.Нечаев поставил вопрос о положении этих провалов. Нами была придумана следующая формализация понятия провала.

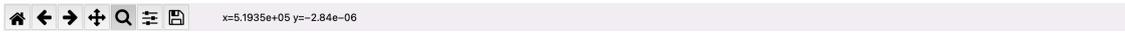
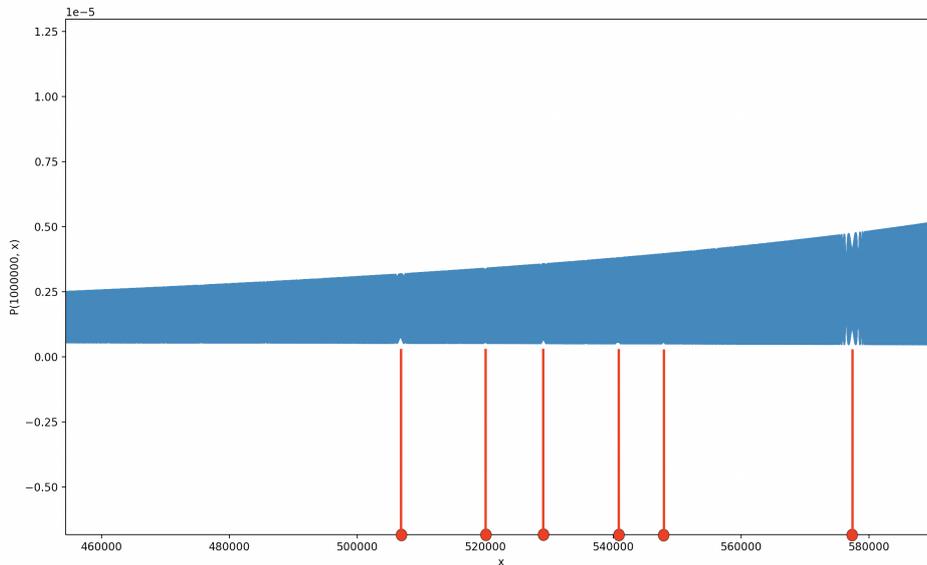


Рис. 2. Провалы вероятности.

Определение. *Провалом порядка T* называется такое $v \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, что для любого целого M и любой пары последовательностей x_t, x'_t , таких что $x_t, x'_t \in (vt - M, vt + M)$ и $x_t - x'_t \leq 2T$ для всех целых $t \geq 1$, выполнено

$$t(P(x_t, t) - P(x'_t, t)) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

При помощи численных экспериментов для $t = 10^7$ получены следующие положения провалов:

Провал	Порядок
0.3574060	4
0.4472132	3
0.5067306	5
0.5290772	7
0.5478448	11
0.5773498	2
0.5964752	15
0.5992388	13
0.6029292	11
0.6081182	9
0.6159291	16
0.6289594	5
0.6393394	8
0.6546538	3
0.6786000	4
0.6891480	5
0.6980680	7

На основании полученных данных сформулирована следующая гипотеза:

Гипотеза 8. *Провалы порядка T описываются формулой*

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \sin^2 \frac{\pi k}{2T}}},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $k < T$ и $\text{НОД}(k, T) = 1$.

Список литературы

- [1] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, New York, McGraw-Hill, 1965. Russian transl.: Mir, Moscow, 1968.
- [2] M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, Russian Math. Surveys 77:3(465) (2022), 73-160.

5 Ожегов Фёдор

Аннотация

Было доказано, что для оклеивания прямоугольника $1 \times b$ одинаковыми квадратами с двух сторон в один слой необходимо и достаточно, чтобы $b = p \pm \sqrt{p^2 - r^2}$, где $p \geq r \geq 0$ рациональны. Этот результат (полученный в 2018) в 2020 выложен на сайте [arxiv.org](https://arxiv.org/abs/2009.07655) (<https://arxiv.org/abs/2009.07655>) и в данный момент находится на рецензии в журнале.

В модели «шашки Фейнмана» с электромагнитным полем изучены поля, не эквивалентные однородному (т.е. не получающиеся из него калибровочным преобразованием). Для периодических полей предъявлена формула для волновой функции, дающая алгоритм ее вычисления.

Ключевые слова: Шашки Фейнмана, производящие функции, квантовые блуждания

Зафиксируем декартову систему координат на плоскости. Решетку $\Lambda = \{(mb, n) : m, n \in \mathbf{Z}\}$ на плоскости назовем порожденной прямоугольником $1 \times b$. Введем отношение эквивалентности: назовем две точки плоскости эквивалентными, если одну можно перевести в другую композицией центральных симметрий относительно узлов решетки Λ .

Оклеиванием (одинаковыми квадратами с двух сторон в один слой) прямоугольника $1 \times b$ называется такое множество G непересекающихся по внутренним точкам квадратов, что:

- любая точка плоскости эквивалентна некоторой точке объединения квадратов множества G
- никакие две точки внутренности квадратов из множества G не эквивалентны

Было доказано, что для оклеивания прямоугольника $1 \times b$ одинаковыми квадратами с двух сторон в один слой необходимо и достаточно, чтобы $b = p \pm \sqrt{p^2 - r^2}$, где $p \geq r \geq 0$ рациональны.

Доказательство использует методы, доступные обычному школьнику.

Этот результат (полученный в 2018) в 2020 выложен на сайте [arxiv.org](https://arxiv.org/abs/2009.07655) (<https://arxiv.org/abs/2009.07655>) и в данный момент находится на рецензии в журнале.

Перейдем к результатам о шашках Фейнмана.

Ребром назовём отрезок, соединяющий две ближайших точки $(x_1, t_1), (x_2, t_2)$ целочисленной решетки, таких, что $x_1 + t_1$ и $x_2 + t_2$ четны. Пусть u — некоторое отображение из множества всех ребер в $\{+1, -1\}$. Обозначим через

$$a(x, t, m, u) := (1 + m^2)^{(1-t)/2} i \sum_s (-im)^{\text{turns}(s)} u(s_0 s_1) u(s_1 s_2) \dots u(s_{t-1} s_t)$$

сумму по всем путям $s = (s_0, s_1, \dots, s_t)$ пашки, у которых $s_0 = (0, 0)$, $s_1 = (1, 1)$, $s_t = (x, t)$, где $\text{turns}(s)$ — количество поворотов в пути s .

Обозначим

$$\begin{aligned} a_1(x, t, m, u) &:= \text{Re } a(x, t, m, u), \\ a_2(x, t, m, u) &:= \text{Im } a(x, t, m, u). \end{aligned}$$

Была доказана следующая лемма.

Предложение 2. Положим $u_1(x + 1/2, t + 1/2) = -1$, если x и t чётные, и $u_1(x + 1/2, t + 1/2) = +1$ иначе. Тогда, для любого $m \geq 0$ и целых $n > k \geq 0$ имеют место равенства формальных степенных рядов:

$$\begin{aligned} \sum_{n>k \geq 0} (1 + m^2)^{\frac{n}{2}} a_1(2k - n + 1, n + 1, m, 1, u) p^k q^n &= -\frac{mq((m^2 + 1)pq^2 + pq + q + 1)}{1 - q^2((m^2 + 1)^2 p^2 q^2 - p^2 + 1)}, \\ \sum_{n>k \geq 0} (1 + m^2)^{\frac{n}{2}} a_2(2k - n + 1, n + 1, m, 1, u) p^k q^n &= -\frac{(1 - q)((m^2 + 1)pq^2 + qp + q + 1)}{1 - q^2((m^2 + 1)^2 p^2 q^2 - p^2 + 1)}. \end{aligned}$$

С помощью этой леммы в модели "пашки Фейнмана" с электромагнитным полем был найден алгоритм для вычисления производящих функций для $a_1(x, t, m, u)$ и $a_2(x, t, m, u)$ в случае, когда $u(h, v)$ — некоторая двоякопериодическая функция.

Для $2h \in \mathbb{Z}$ и полуцелых v (т.е. таких, что $v + 1/2 \in \mathbb{Z}$) через $u(h, v)$ обозначим значение u на ребре с серединой в $(2h - v + 1, v + 1)$. отождествим $u: (\mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + 1/2)) \times (\mathbb{Z} + 1/2) \rightarrow \{\pm 1\}$ с отображением u из множества всех ребер в $\{\pm 1\}$.

Теорема 9. Пусть даны действительное $m > 0$ и двоякопериодическая функция $u: (\mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z} + 1/2)) \times (\mathbb{Z} + 1/2) \rightarrow \{\pm 1\}$ с целыми периодами $s_h, s_v \geq 2$ по первому и второму аргументу соответственно. Тогда

1. Вектор $\bar{B} := (B_1^{0,0}, B_2^{0,0}, B_1^{0,1}, B_2^{0,1}, \dots, B_1^{0,s_v-1}, B_2^{0,s_v-1}, B_1^{1,0}, \dots, B_2^{s_h-1,s_v-1})$, где

$$B_i^{f,g}(p, q) := \sum_{n \geq k \geq 0, k \equiv_{s_h} f, n \equiv_{s_v} g} a_i(2k - n + 1, n + 1, m, u) p^k q^n,$$

является решением системы $\bar{B} - Q\bar{B} = \bar{a}$, где

$$Q = \begin{pmatrix} Q^0 & 0 & \dots & \dots & 0 & R^{s_h-1} \\ R^0 & Q^1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & R^1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & R^{i-1} & Q^i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & R^{s_h-2} & Q^{s_h-1} \end{pmatrix}$$

$$Q^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & W^{i,s_v-1} \\ W^{i,0} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & W^{i,1} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & W^{i,s_v-2} & 0 \end{pmatrix}, \quad R^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & G^{i,s_v-1} \\ G^{i,0} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & G^{i,1} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & G^{i,s_v-2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^{i,j} = q(1+m^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} u(i, j+1/2) & mu(i, j+1/2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G^{i,j} = qp(1+m^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -mu(i+1/2, j+1/2) & u(i+1/2, j+1/2) \end{pmatrix}$$

$$\bar{a} := (a_1^{0,0}, a_2^{0,0}, a_1^{0,1}, a_2^{0,1}, \dots, a_1^{0,s_v-1}, a_2^{0,s_v-1}, a_1^{1,0}, \dots, a_2^{s_h-1, s_v-1})$$

$$a_i^{f,g} := \begin{cases} q^g a_2(-g+1, g+1, m, u) & \text{если } f=0 \text{ и } i=2, \\ p^g q^g a_1(g+1, g+1, m, u) & \text{если } f=g \text{ и } i=1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. при всех целых $n \geq k \geq 0$ справедлива формула

$$a_i(2k-n+1, n+1, m, u) = [p^k q^n] \bar{v}_i (I-Q)^{-1} \bar{a},$$

где $[p^k q^n]$ — коэффициент при $p^k q^n$ в разложении рациональной функции в формальный степенной ряд по p и q , а $\bar{v}_1 = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)$ и $\bar{v}_2 = (0, 1, 0, 1, 0, \dots, 0, 1)$.

Замечание. Здесь Q — матрица $2s_h s_v \times 2s_h s_v$, а Q^i, R^i — матрицы $2s_v \times 2s_v$.

Пример 1. Пусть $n \geq k \geq 0$ — целые, $m = 1$ и $u(h, v)$ — дwoякопериодическая функция с периодами 1 и 3 соответственно, $u(0, -1/2) = -1$, $u(1/2, 1/2) = 1$, $u(1, 3/2) = 1$, $u(0, 1/2) = 1$, $u(0, 3/2) = 1$, $u(1/2, -1/2) = 1$. Тогда

$$a_1(2k-n+1, n+1, 1, u) = 2^{-n/2} [p^k q^n] \frac{-q - q^2 - pq^2 + q^3 + p^2 q^3 + 2pq^4 + 2p^2 q^4 + 4p^2 q^5}{-1 - q^3 + pq^3 - p^2 q^3 + p^3 q^3 + 8p^3 q^6}$$

$$a_2(2k-n+1, n+1, 1, u) = -2^{-n/2} [p^k q^n] \frac{1 + pq - pq^2 + p^2 q^2 + q^3 - 2pq^3 - p^2 q^3 + 2pq^4 - 2p^2 q^4 + 4p^2 q^5}{-1 - q^3 + pq^3 - p^2 q^3 + p^3 q^3 + 8p^3 q^6}.$$

Список литературы

- [1] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика // Москва, "Мир", 1998
- [2] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, J. Watrous, One-dimensional quantum walks, Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (2001), 37–49.

- [3] Feynman R., Hibbs A., Quantum mechanics and path integrals, New York, McGraw-Hill, 1965
- [4] R.P. Feynman, QED: The strange theory of light and matter. Princeton University Press, 2006.
- [5] B. Gaveau, L.S. Schulman, Dirac equation path integral: interpreting the Grassmann variables, Il Nuovo Cimento D 11, 31 (1989) 31–51.
- [6] J. Narlikar, Path amplitudes for Dirac particles, J. Indian Math. Society, 36 (1972), 9–32.
- [7] G.N. Ord, Classical particles and the Dirac equation with an electromagnetic field, Chaos, Solitons Fractals 8:5 (1997), 727-741.
- [8] M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, Russian Math. Surveys 77:3(465) (2022), 73-160.

6 Слизков Алексей

Аннотация

Доказана теорема о чередовании знака вещественной части волновой функции в модели “Шашки Фейнмана” при фиксированной координате x и большом времени t .

Ключевые слова: Шашки Фейнмана, волновая функция, чередование знаков.

Исследовался знак вещественной части волновой функции в модели “Шашки Фейнмана”. Рисунок 3 показывает, что он устроен совершенно нетривиально.

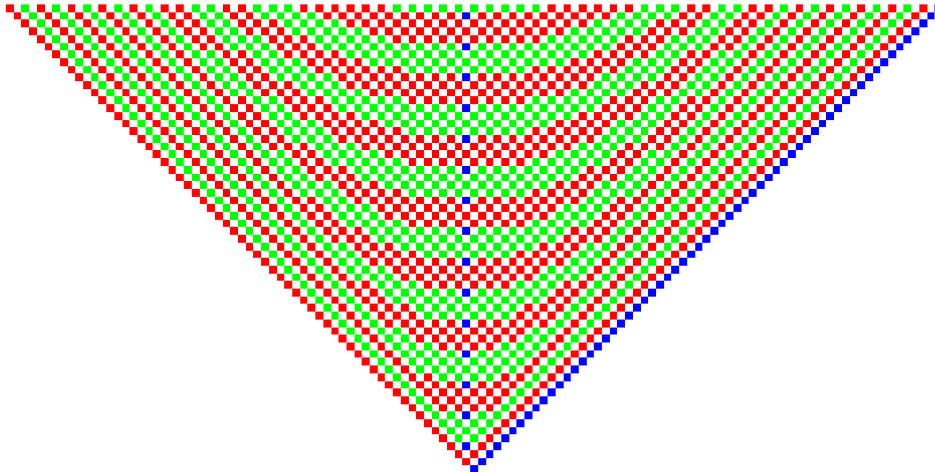


Рис. 3. Знак вещественной части волновой функции при $t \leq 61$
Красный соответствует $+1$, зелёный -1 , синий 0

Удалось доказать следующую теорему про его поведение при больших временах t , подтверждающую закономерность, наблюдаемую на рисунке.

Теорема 10. Пусть $x \neq 0$. Тогда для всех достаточно больших t знак вещественной части волновой функции равен

$$\operatorname{sgn} a_1(x, t, 1, 1) = (-1)^{\lfloor (t-1)/4 \rfloor}.$$

Доказательство использует асимптотическую формулу для волновой функции и недавно полученное рекуррентное соотношение для нее из работы [1].

Список литературы

- [1] M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, Russian Math. Surveys 77:3(465) (2022), 73-160.

7 Федоров Михаил

Аннотация

Мы изучали равномерную случайную раскраску клеток шестиугольной решетки в 2^{n-1} цветов (стандартную модель Поттса при бесконечной температуре), которую можно рассматривать как обобщение перколяции на n жидкостей — попарно-независимых, но зависимых в совокупности. Мы изучили новую наблюдаемую: долю протекающих жидкостей.

Для изучаемой наблюдаемой доказан аналог центральной предельной теоремы. Результат выложен в <https://arxiv.org/abs/1908.11783> и был награжден на конкурсе НИРС НИУ ВШЭ.

Ключевые слова: перколяция, центральная предельная теорема, шестиугольная решетка, гауссово распределение, модель Поттса.

Для каждого целого $s \geq 2$ рассмотрим множество M_s всех клеток шестиугольной решетки со стороной клетки 1, расположенных внутри правильного шестиугольника со сторонами длины $s\sqrt{3}$, перпендикулярными сторонам клеток, и с центром в центре клетки O , кроме клетки O .

Для каждого целого $n \geq 2$ рассмотрим вероятностное пространство

$$\Omega_{n,s} := \{(f_1, \dots, f_n) : M_s \rightarrow \{0, 1\}^n \mid f_1 + \dots + f_n \equiv 1 \pmod{2}\},$$

с мерой $P(A) = |A|2^{-(n-1)3s(s-1)}$ для всех $A \subset \Omega_{n,s}$ (оно изоморфно стандартной модели Поттса с 2^{n-1} состояниями при бесконечной температуре). Элементы множества $\Omega_{n,s}$ будем называть раскрасками в 2^{n-1} цветов.

Пусть $i \in \{1, \dots, n\}$. Будем говорить, что i -я жидкость протекает от центра до границы для данной раскраски $f = (f_1, \dots, f_n) \in \Omega_{n,s}$, если существует последовательность клеток (v_1, \dots, v_t) , такая что для

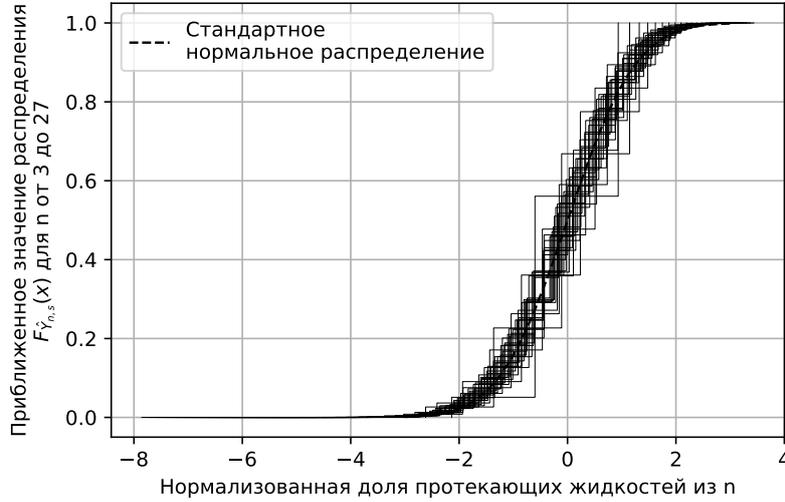


Рис. 2: Распределения величин $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_{n,s}-p_s)}{\sqrt{p_s(1-p_s)}}$ сходятся к нормальному.

всех $l = 1, \dots, t$ выполнено $f_i(v_l) = 1$, v_j и v_{j+1} соседние, v_1 — соседняя с O и v_t является граничной. Обозначим через p_s вероятность, что i -ая жидкость протекает от центра до границы (она не зависит от номера жидкости).

Определим случайную величину $X_{n,s,i}: \Omega_{n,s} \rightarrow \{0, 1\}$ формулой

$$X_{n,s,i}(f) := \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ая жидкость протекает от центра} \\ & \text{до границы для раскраски } f; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Назовем $\bar{X}_{n,s} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{n,s,i}$ долей протекающих до границы жидкостей.

Основная теорема. (Аналог ЦПТ для доли протекших жидкостей) Для любого s функция распределения случайной величины $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_{n,s}-p_s)}{\sqrt{p_s(1-p_s)}}$ сходится равномерно к стандартному нормальному распределению при $n \rightarrow \infty$.

Численные эксперименты подтверждают этот результат (Рис. 2). Результат выложен в <https://arxiv.org/abs/1908.11783> и был награжден на конкурсе НИРС НИУ ВШЭ.

Список литературы

- [1] C. Bradley, Richard. (2009). A strictly stationary, “causal”, 5-tuplewise independent counterexample to the central limit theorem. *Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*. 7. arXiv:0911.2905v1
- [2] Duminil-Copin, Hugo. (2017). Sixty years of percolation. arXiv:1712.04651v1
- [3] W. Feller, An introduction to probability theory and its application, Wiley (1966, 1968)
- [4] Kesten, H., Percolation theory for mathematicians, Birkhäuser, Boston, 1982.

- [5] H. Kesten, The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$. *Comm. Math. Phys.*, 74(1):41–59, 1980.
- [6] D. Stauffer, A. Aharony, Introduction to Percolation Theory, 2nd ed., Taylor and Francis, London, (1994)
- [7] Svante, Janson. (1988). Some pairwise independent sequences for which the central limit theorem fails. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*. 23. 439-448. DOI: 10.1080/17442508808833503.
- [8] И. В. Новиков, Протекание трёх жидкостей на шестиугольной решетке, препринт 2019
- [9] Поляков А. М. Калибровочные поля и струны. — Ижевск, 1999. 312 с.
- [10] Эфрос А. Л. Физика и геометрия беспорядка. М.: Наука, 1982 – 176 с.
- [11] <https://github.com/m-fedorov-s/AroundPercolationProblem>

8 Широковских Светлана

Аннотация

Исследовано новое Вох-Н преобразование двухпортовых электрических цепей. В качестве его применения доказано, что если восьмиугольник в форме буквы П разрезается на квадраты, то он разрезается на 5 прямоугольников с рациональным отношением сторон. Приведен пример П-образного восьмиугольника, который можно разрезать на 5 прямоугольников с рациональным отношением сторон, но нельзя на 4. Работа выложена на сервере препринтов arXiv (<http://arxiv.org/abs/2110.02558>) и отправлена в *Electronic Journal of Combinatorics*.

Начато исследование обобщения двухпортовых цепей (суперпортовые цепи). Посчитаны матрицы реакции (ответа) для нескольких таких цепей и выдвинута гипотеза, как найти элементы матрицы с помощью деревьев, получающихся из графа цепи.

Ключевые слова: Электрическая цепь, двухпортовая цепь, разрезание, прямоугольник, эквивалентные преобразования

Для начала сформулируем элементарное следствие нашей основной теоремы.

Пусть есть 2 прямоугольника $ABCD$ и $A'B'C'D'$, причем A и D лежат на отрезке $A'D'$, а B и C лежат строго внутри $A'B'C'D'$. Тогда замыкание $A'B'C'D' \setminus ABCD$ называется *П-образным восьмиугольником*.

Теорема 11. *Если П-образный восьмиугольник можно разрезать на квадраты, то можно разрезать на 5 или меньше прямоугольников с рациональным отношением сторон.*

Двухпортовой цепью называется связный граф, каждому ребру которого сопоставлено некоторое положительное действительное число (*проводимость*) и 4 вершины которого отмечены (*граничные вершины*) и разбиты на 2 пары. Цепь будем называть *плоской*, если она расположена в единичном круге так, что граничные вершины цепи принадлежат

границе круга и никакие два ребра не имеют общих точек, кроме, возможно, их общей вершины.

Зафиксируем нумерацию вершин цепи числами $1, 2, \dots, n$ так, чтобы вершины $1, 2, 3, 4$ были бы граничными и разбитыми на пары $1, 4$ и $2, 3$. Обозначим проводимость ребра между вершинами k и l через c_{kl} . Положим $c_{kl} := 0$, если между вершинами k и l нет ребра.

Замкнутой двухпортовой цепью называется двухпортовая цепь вместе с 2 действительными числами ΔU_{14} и ΔU_{23} (разности входных потенциалов), сопоставленными парам граничных вершин цепи.

Каждой вершине k ($1 \leq k \leq n$) двухпортовой цепи сопоставим число U_k — потенциал вершины, а каждой паре вершин $1 \leq k, l \leq n$ — число I_{kl} , называемое *током* через ребро kl ($I_{kl} = 0$, если между вершинами k и l нет ребра). Потенциалы и токи определяются следующими аксиомами:

- (С) *Закон Ома.* Для каждой пары вершин k, l выполнено равенство $I_{kl} = c_{kl}(U_k - U_l)$.
- (I) *Правило Кирхгофа.* Для каждой вершины $k > 4$ выполнено равенство $\sum_{l=1}^n I_{kl} = 0$.
- (P) *Изолированность портов.* Выполнено равенство: $\sum_{l=1}^n I_{1l} + \sum_{l=1}^n I_{2l} = 0$.
- (B) *Граничные условия.* Выполнено равенство: $\Delta U_{14} = U_1 - U_4$ и $\Delta U_{23} = U_2 - U_3$.

Ответом двухпортовой цепи называется отображение $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$: $(\Delta U_{14}, \Delta U_{23}) \mapsto (\sum_{k=1}^n I_{1k}, \sum_{k=1}^n I_{2k})$. *Перепадом* двухпортовой цепи назовём отображение $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$: $(\Delta U_{14}, \Delta U_{23}) \mapsto U_1 - U_2$.

Будем называть двухпортовые цепи *Π-эквивалентными*, если их ответы и перепады равны.

Н-цепью назовем двухпортовую цепь на 6 вершинах с 5 ребрами: $15, 25, 46, 36, 56$.

Теорема 12. *Для любой плоской двухпортовой цепи G найдется Π-эквивалентная ей плоская двухпортовая цепь G' , удовлетворяющая следующим двум условиям:*

1. *У цепи G' либо не более 4 ребер, либо это Н-цепь.*
2. *Цепь G' может быть получена из цепи G с помощью элементарных преобразований, объединений вершин с одинаковым потенциалом и Воз-Н преобразований.*

Естественный вопрос: нельзя ли усилить теорему и заменить формулировку пункта (1) на такую: «У цепи G' не более 4 ребер»? Построен пример, показывающий, что нельзя.

Пример 2. *Рассмотрим Н-цепь с сопротивлениями $R_{15} = 4, R_{25} = 1, R_{46} = 4, R_{36} = 2, R_{56} = 2$. Любая цепь, которую можно получить из этой цепи при помощи преобразований, указанных в теореме 12, имеет не менее пяти ребер.*

Пример 3. *П-образный восьмиугольник со сторонами $A'B' = 4$, $B'C' = 10 - 2\sqrt{2}$, $AA' = 1 + \sqrt{2}$, $AB = \sqrt{2}$, $DD' = 1 + 2\sqrt{2}$ можно разрезать на 5 прямоугольников с рациональным отношением сторон, но нельзя разрезать менее чем на 5 прямоугольников с рациональным отношением сторон (рис. 3).*

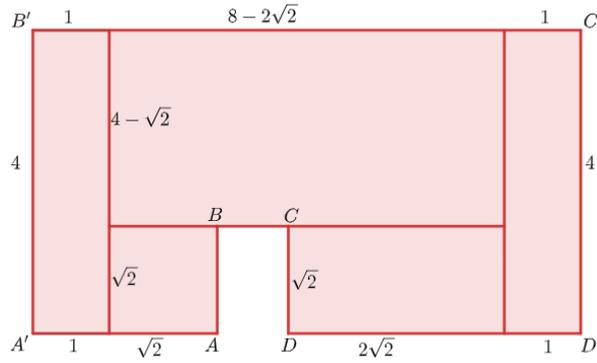


Рис. 3: П-образный восьмиугольник, который нельзя разрезать менее чем на 5 прямоугольников с рациональными отношениями сторон.

Суперпортовой цепью с t входами и p суперпортами назовём электрическую цепь с t входами, граничные вершины которой разбиты на несколько непустых непересекающихся множеств A_1, \dots, A_p . Множества A_1, \dots, A_p называются *суперпортами*.

Выберем по одной вершине в каждом суперпорте. Назовём эти вершины *корнями*. *Замкнутой суперпортовой цепью* назовем суперпортовую цепь с p корнями и $t - p$ действительными числами ΔU_{xy} (*разности входных потенциалов*), сопоставленными парам граничных вершин x и y из одного порта, где вершина y является корнем. Через $root(x)$ обозначим корень суперпорта, содержащего x .

Зафиксируем нумерацию вершин цепи числами $1, 2, \dots, n$ так, чтобы вершины $1, \dots, t$ были бы граничными.

Обозначим через kl ребро между вершинами k и l . Обозначим через c_{kl} проводимость ребра kl ($c_{kl} = 0$, если нет ребра между k и l).

Каждой вершине k ($1 \leq k \leq n$) суперпортовой цепи сопоставим число U_k — *потенциал* вершины, а каждой (упорядоченной) паре вершин $1 \leq k, l \leq n$ — число I_{kl} , называемое *током* через ребро kl в направлении от k к l ($I_{kl} = 0$, если между вершинами k и l нет ребра). Потенциалы и токи определяются следующими аксиомами:

- (С) *Закон Ома.* Для каждой пары вершин k, l выполнено равенство $I_{kl} = c_{kl}(U_k - U_l)$.
- (I) *Правило Кирхгофа.* Для каждой вершины $k > t$ выполнено равенство $\sum_{l=1}^n I_{kl} = 0$.
- (S) *Условие изолированности суперпортов.* Для любого суперпорта A_i выполняется равенство $\sum_{k \in A_i} \sum_{l=1}^n I_{kl} = 0$.

(В) *Граничные условия.* Для любой некорневой вершины $x < t$ выполняется $U_x - U_{root(x)} = \Delta U_{x, root(x)}$.

Теорема 13. Для любой замкнутой суперпортовой цепи существуют единственные I_{kl} , $1 \leq k, l \leq n$, и единственные с точностью до добавления общей постоянной числа U_k , $1 \leq k \leq n$, удовлетворяющие свойствам (C), (I), (S), (B).

Рассмотрим множество некорневых граничных вершин $X = \{x_1, \dots, x_{m-p}\}$. Числа $(I_{x_1}, \dots, I_{x_{m-p}}) := (\sum_{t=1}^n I_{x_1 t}, \dots, \sum_{t=1}^n I_{x_{m-p} t})$ называются *входными токами*. Ответом суперпортовой цепи называется отображение

$$\mathbb{R}^{m-p} \rightarrow \mathbb{R}^{m-p} : (\Delta U_{x_1 root(x_1)}, \dots, \Delta U_{x_{m-p} root(x_{m-p})}) \mapsto (I_{x_1}, \dots, I_{x_{m-p}}).$$

Обозначим матрицу ответа через L_{uv} . Пронумеруем строки и столбцы в этой матрице от 1 до m , пропустив номера корней.

Пример 4. *W-цепью* (рис. 4) назовём электрическую цепь с 5 входами и 4 ребрами 15, 25, 24 и 34 с проводимостями a, b, c и d соответственно.

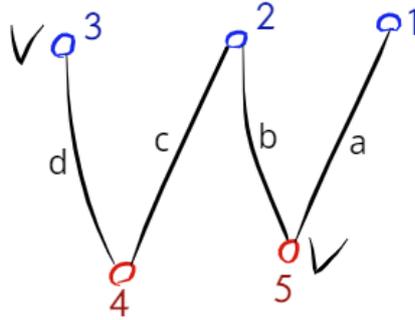


Рис. 4: W-цепь

Суперпортовой W-цепью (рис. 4) назовём суперпортовую цепь с 5 входами, 2 суперпортами $\{1, 2, 3\}$ и $\{4, 5\}$, где 3 и 5 - это корни, с 4 ребрами 15, 25, 24 и 34 с проводимостями a, b, c и d соответственно.

Матрица ответа для такой суперпортовой цепи изображена на рисунке 5.

Пусть граф G - взвешенный граф с проводимостями для суперпортовой цепи. Назовём *лесом* H подграф графа G , не содержащий циклов. *Весом* леса H назовём произведение проводимостей ребер, которые он содержит. Обозначим вес леса H через $w(H)$.

Рассмотрим разбиение множества вершин некоторого графа на непересекающиеся множества Y_1, \dots, Y_t . Обозначим через R_{Y_1, \dots, Y_t} отношение эквивалентности, определяющееся правилом: $a \sim b \Leftrightarrow \exists i : a, b \in Y_i$.

$$\begin{pmatrix} \frac{ab+ac+ad}{a+b+c+d} & \frac{-ab-ac}{a+b+c+d} & \frac{ac+ad}{a+b+c+d} \\ \frac{-ab-ac}{a+b+c+d} & \frac{ab+ac+bd+cd}{a+b+c+d} & \frac{-ac+bd}{a+b+c+d} \\ \frac{ac+ad}{a+b+c+d} & \frac{-ac+bd}{a+b+c+d} & \frac{ac+bc+ad+bd}{a+b+c+d} \end{pmatrix}$$

Рис. 5: Матрица ответа L_{uv} для суперпортовой W-цепи

Обозначим через H'_X и G'_X граф $H/R_{Y_1, \dots, Y_p}$ и $G/R_{Y_1, \dots, Y_p}$ соответственно, где $Y_i = A_i - (A_i \cap X)$.

Будем называть лес H (подграф G) *валидным*, если H'_\emptyset является остовным деревом в G'_\emptyset .

Будем называть лес H (подграф G) *валидным относительно пары множеств I и J* если выполняются оба следующих условия:

- (i) H'_I — остовное дерево в G'_I .
- (j) H'_J — остовное дерево в G'_J .

Будем называть лес H (подграф G) *валидным относительно пары вершин i и j* если этот лес валидный относительно пары множеств $\{i\}$ и $\{j\}$.

Знаком леса H относительно пары вершин i и j назовём $+1$, если i и j лежат в разных компонентах связности графа $H_{\{i,j\}}$ или $i = j$, и -1 иначе. Обозначим такой знак через $sign_{ij}(H)$.

Гипотеза 14. Для любых i и j выполняется равенство $L_{ij} = \frac{\sum w(T) \cdot sign_{ij}(T)}{\sum w(H)}$, где сумма в знаменателе берется по всем валидным лесам H , а сумма в числителе по всем валидным относительно пары вершин i и j лесам T .

Список литературы

- [1] V. P. Bakalov, A. N. Ignatov, B. I. Kruk, Fundamentals of the theory of electrical circuits and electronics, Moscow, Radio and communication, 1989 (in Russian).
- [2] A. C. Barlett, An extension of a property of artificial lines, Phil. Mag. **4:24** (1927), 902–907.
- [3] L. A. Bessonov, Theoretical foundations of electrical engineering. Electric circuits - 11th ed., Revised and extended, Moscow, Gardariki, 2007 (in Russian).
- [4] R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone, and W. T. Tutte, The dissection of rectangles into squares, Duke Math. J. **7** (1940), 312–340.

- [5] E. B. Curtis and J. A. Morrow, Inverse problems for electrical networks, Series on Appl. Math. **13**, World Scientific, Singapore, 2000.
- [6] M. Dehn, Über die Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke, Math. Ann. **57** (1903), 314–332 (in German).
- [7] R. Kenyon, Tilings and discrete Dirichlet problems, Israel J. Math. **105:1** (1998), 61–84.
- [8] M. Prasolov, M. Skopenkov, Tiling by rectangles and alternating current, J. Combin. Theory A **118:3** (2011), 920-937.
- [9] M. Skopenkov, V. Smykalov, A. Ustinov, Random walks and electric networks, Mat. Prosv. 3rd ser. 16 (2012), 25-47 (in Russian). Minor correction in: A. Yuryev, Random walks return, Mat. Prosv. 3rd ser. 20 (2016), 243-246.
- [10] A. Zaslavsky, M. Skopenkov, A. Ustinov, Random walks and electric networks. In: Elements of mathematics in problems. Through circles and olympiads to profession. Ed. by A. Skopenkov, M. Skopenkov, and A. Zaslavskiy. Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2018, 592pp (in Russian). English transl.: Mathematics via Problems. Part 3: Combinatorics. Ed. by M. Skopenkov and A. Zaslavskiy. Transl. by P. Zeitz and S. Shubin, MSRI Mathematical Circles Library, MSRI and AMS, to appear.