Дифференциальные уравнения. Материалы к коллоквиуму.

I. Вопросы.

1. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка. Поле направлений. Метод изоклин построения качественной картины решений. Задача Коши.
2. Уравнения с разделяющимися переменными. Общее решение. Особые решения.
3. Простейшие физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям: распад радиоактивного вещества, остывание тела, перемешивание растворов, движение материальной точки в силовом поле.
4. Однородные и квазиоднородные дифференциальные уравнения первого порядка.
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли.
6. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
7. Приближенные решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с помощью ломаных Эйлера и с помощью последовательных приближений Пикара.
8. Условия Липшица. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
9. Методы решений дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной.
10. Особые решения дифференциальных уравнений первого порядка. Огибающая семейства кривых. Эволюта кривой.
11. Задание семейства кривых дифференциальным уравнением. Ортогональные траектории. Эвольвента кривой.
12. Изолированные особые точки дифференциальных уравнений первого порядка. Типы невырожденных изолированных особых точек.
13. Решение задачи Коши для системы однородных линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами при помощи матричной экспоненты.
14. Структура общего решения системы однородных линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.
15. Структура общего решения однородного линейного уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами.
16. Решение неоднородного линейного уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами в случае, когда свободный член есть квазимногочлен.
17. Движение математического маятника под действием вынуждающей периодической силы. Вынужденные колебания. Амплитуда вынужденных колебаний. Явление резонанса.
18. Движение математического маятника с учетом силы трения.
19. Расчет электрических цепей с помощью систем дифференциальных уравнений.
20. Решение задачи Коши для системы линейных уравнений с переменными коэффициентами с помощью итерированных интегралов.

21. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений первого порядка. Определитель Вронского. Теорема Лиувилля.

22. Сведение уравнения n-го порядка к системе уравнений первого порядка. Фазовое пространство уравнения n-го порядка. Задача Коши. Сведение линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами к системе уравнений первого порядка.

23. Фундаментальная система решений однородного линейного уравнения n-го порядка. Определитель Вронского. Теорема Лиувилля.

24. Построение линейного дифференциального уравнения по системе решений.

25. Метод вариации постоянных для неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений.

26. Метод вариации постоянных для неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

27. Теорема существования и единственности для системы дифференциальных уравнений первого порядка .

28. Устойчивость решения системы дифференциальных уравнений по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Примеры.

29. Критерий устойчивости решения по первому приближению.

30. Функция Ляпунова. Приложение к устойчивости решения.

31. Фазовое пространство автономной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Типы точек покоя двумерных линейных систем.

32. Автономные системы дифференциальных уравнений первого порядка и векторные поля. Поток векторного поля и решение задачи Коши.

33. Неавтономные векторные поля и системы дифференциальных уравнений. Расширенное фазовое пространство. Выпрямление векторного поля в расширенном фазовом пространстве.

34. Выпрямление автономного векторного поля вблизи неособой точки.

35. Дифференциальные уравнения с комплексным временем. Теорема аналитичности решения линейной системы с аналитическими коэффициентами.

36. Регулярные и иррегулярные особые точки линейных систем. Строение фундаментальной системы решений вблизи регулярной особой точки.

37. Решения дифференциального уравнения 2 порядка в окрестности регулярной особой точки. Показатели решений.

38. Гипергеометрическое уравнение. Гипергеометрическая функция.

39. Теорема о свойствах зависимости решения системы дифференциальных уравнений от параметров. Лемма Адамара. Уравнение в вариациях.

40. Зависимость решения системы дифференциальных уравнений от начальных условий. Свойства дифференцируемости фазового потока.

II. Задачи.

1. Найдите интегрирующий множитель для линейного уравнения $\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$.

2. Кривая на плоскости задана своим уравнением $r = r(\varphi)$ в полярных координатах. Каков геометрический смысл логарифмической производной $\frac{dr}{rd\varphi}$. Каким свойством характеризуются интегральные кривые дифференциального уравнения $\frac{dr}{d\varphi} = f(r, \varphi)$ в области $f(r, \varphi) > 0$?

3. Выпишите в квадратурах общее решение уравнения Лагранжа $y = A(y')x + B(y')$, где $A(p)$ и $B(p)$ - заданные функции, причем $A(p) \not\equiv 1$.

4. Покажите, что всякое семейство прямых на плоскости,зависящее от одного параметра (кроме семейства параллельных прямых), описывается в общей точке некоторым уравнением Клеро $y = y'x + \varphi(y')$

5. Докажите, что дифференциальное уравнение, описывающее семейство эвольвент плоской кривой, представляет собой некоторое уравнение Лагранжа $y = A(y')x + B(y')$.

6. Докажите формулу Адамара:

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \cdots \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ad}_{\mathrm{e}^{\mathrm{A}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}_{\mathrm{A}}}$$

7.* Докажите, что уравнение движения маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$ имеет частное решение, стремящееся к π при $t \to \infty$

8. Докажите, что линейное дифференциальное уравнение $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ остается линейным при произвольной замене независимой переменной $t \mapsto \varphi(s)$ и линейной заменой $x \mapsto \alpha(t)x + \beta(t)$ переменной x, причем первый тип замен переводит однородные уравнения в однородные. Приведите каждой из этих замен уравнение к виду, не содержащему x'.

9. Пусть $y(x)$ - решение однородного дифференциального уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Докажите, что логарифмическая производная y удовлетворяет приведенному уравнению Риккати $v' + v^2 + a(x)v + b(x) = 0$.

10. Пусть $M(x, y)$ и $N(x, y)$ - однородные функции степени m. Найдите интегрирующий множитель для уравнения

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0$$

11.* Докажите, что любое дробно-линейное преобразование

$$v \mapsto \frac{\alpha(x)v + \beta(x)}{\gamma(x) + \delta(x)v}$$

решения уравнения Риккати $v' + a_2(x)v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0$ переводит его в решение (другого) уравнения Риккати.

12. Докажите, что отношение координат x_1/x_2 любого решения системы однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(t)x_1 + b(t)x_2 \\ \dot{x}_2 = c(t)x_1 + d(t)x_2 \end{cases}$$

удовлетворяет некоторому уравнению Риккати $v' + a_2(x)v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0$.

13.* Докажите, что общее решение уравнения Риккати $v' + a_2(x)v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0$ есть функция, дробно-линейно зависящая от параметра.

14. Докажите, что интеграл
$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-\tau)^{n-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$
есть решение задачи Коши $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ для дифференциального уравнения $y^{(n)}(x) = f(x)$.

15. Выведите общую формулу решения задачи Коши для системы неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
Здесь А -$n \times n$- матрица, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{b}$ - вектор-столбцы.

16. Докажите, что множество всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих какому-либо линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, является линейным пространством. Укажите какой-нибудь базис в этом пространстве.

17. Последовательность $\{y_n\}$ называется линейно-рекуррентной, если существуют такие числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, что для всех $n > k$ выполнено соотношение $y_n = a_1 y_1 + \ldots + a_k y_{n-k}$. Покажите, что множество всех линейно-рекуррентных числовых последовательностей является линейным пространством. Укажите какой-либо базис в этом пространстве.

18. Составьте линейное однородное уравнения минимально возможной степени, решениями которого будут функции $x^{a_1}, x^{a_2}, \cdots x^{a_n}$

    а) для $n = 2, 3$

    б) для произвольного n.

19. Решите следующие задачи Коши
$$\begin{aligned}
(a)\quad & \dot{X} = AX, \qquad X(0) = M,\\
(b)\quad & \dot{X} = XA, \qquad X(0) = M,\\
(c)\quad & \dot{X} = AX - XA, \qquad X(0) = M,
\end{aligned}$$
где $X(t), A, M$ - матрицы $n \times n$

20. Для заданного $b > 0$ укажите такое a, при котором решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1, y'(0) = 0$ быстрее всего стремится к нулю при $x \to \infty$.

21. Докажите, что в случае $q(x) \leq 0$ все решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$ с положительными начальными условиями $y(x_0) > 0,\ y'(x_0) > 0$ остаются положительными при всех $x > x_0$.

22.* Найти форму равновесия однородной тяжелой нерастяжимой нити с закрепленными концами.

23. Цепь длиною l метров переброшена через блок. С одной стороны свисает $a = 10$ метров цепи, с другой - $b = 8$ метров. Через какое время цепь сойдет с блока?

24. Некоторое вещество А разлагается на два вещества Р и Q. Скорость образования каждого из них пропорциональна количеству неразложенного вещества. Пусть x и y - количества веществ Р и Q, образовавшихся к моменту времени t. Определить закон изменения x и y, зная, что в начальный момент времени $x = y = 0$, а через 1 минуту $x = \frac{3}{8}c$, $y = \frac{1}{8}c$, где c - первоначальное количество вещества.

25. К источнику тока с напряжением $E = V \sin \omega t$ последовательно присоединено сопротивление R. Далее цепь разветвляется на две ветви, в одной из которых включена самоиндукция L, а в другой - ёмкость C. Найти силу тока в цепи (установившийся режим), проходящего через конденсатор . При какой частоте ω сила тока наибольшая?

26. К источнику тока с напряжением $E = V \sin \omega t$ последовательно присоединена индуктивность L. Далее цепь разветвляется на две ветви, в одной из которых находится сопротивление R, а в другой - ёмкость C. Найти силу тока в цепи (установившийся режим), проходящего через конденсатор . При какой частоте ω сила тока наибольшая?

27. Уравнение Эйлера
$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$$
где $a_0, \ldots, a_{n-1}$- действительные числа, привести заменой переменной к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами. Найти характеристический многочлен полученного уравнения и его общее решение.

28. Найдите характеристический многочлен матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$
Докажите, что у оператора в n - мерном комплексном пространстве с матрицей A число различных собственных значений совпадает с числом линейно независимых собственных векторов и с числом жордановых клеток в жордановой форме матрицы.

29.* Предъявите дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее одну изолированную точку типа седла с заданным наперед количеством сепаратрис.

30. Найдите фудаментальную систему решений и определитель Вронского для системы
$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) x_j, \qquad i = 1, \ldots, n$$

31. Докажите, что если каждое решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами стремится к нулю при $t \to +\infty$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

32. Докажите, что если у линейной неоднородной системы существует неограниченное при $t \to +\infty$ решение, то нулевое решение неустойчиво.

33. Нарисуйте качественную картину векторного поля, соответствующего системе
$$\begin{cases} \dot{x} &= y - x^2 - x, \\ \dot{y} &= 3x - x^2 - y \end{cases}$$
Найдите точки покоя, исследуйте их на устойчивость.

34. Докажите, что
$$\left(P \exp \int_0^t A(\tau) d\tau \right)^{-1} = E + \sum_{n>0} (-1)^n \int \cdots \int_{0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \cdots \le \tau_n \le n} A(\tau_1) A(\tau_2) \cdots A(\tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n$$

35. Выпрямить в области $x > 0$ автономное векторное поле $v = \frac{\partial}{\partial x} + \sin x \frac{\partial}{\partial y}$. Можно ли это сделать на всей плоскости (x, y)?:

36. Выпрямить автономное векторное поле $v = x\frac{\partial}{\partial x} + (1 - x^2)\frac{\partial}{\partial y}$.

37. Определим $\sin t$ и $\cos t$ как решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ дифференциального уравнения $\ddot{x} + x = 0$, с начальными условиями $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $\dot{x}_2(0) = 0$. Выведите, исходя из этого определения, тригонометрические тождества $(\sin t)' = \cos t$, $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$.

38. Определим $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{ch} t$ как решения x_1 и x_2 дифференциального уравнения $\ddot{x} = x$, с начальными условиями $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $\dot{x}_2(0) = 0$. Выведите, исходя из этого определения, тождество $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

39. Считая c не целым числом, выпишите в виде обобщенного степенного ряда решение гипергеометрического уравнения, имеющее в точке $z = 0$ показатель $1 - c$. Покажите, что это решение вместе с гипергеометрической функцией $F(a, b; c; z)$ образуют фундаментальную систему решений гипергеометрического уравнения.

40. Докажите, что гипергеометрическое уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\}\frac{du}{dz} - ab\,u = 0$$

имеет 3 регулярных особых точки на расширенной комплексной плоскости. Найдите показатели решений в этих точках.

41.* Докажите, что всякое дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее ровно 3 различных регулярных особых точки a, b, c, приводится к гипергеометрическому уравнению дробно-линейной заменой независимого переменного z и заменой $u \mapsto \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l$ зависимого переменного u.

42.* Пусть $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$. Докажите, что интеграл

$$I_{a,b,c}(z) = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$

сходится при $|z| < 1$ и, как функция z, удовлетворяет гипергеометрическому уравнению с параметрами a, b, c. Выбрана ветвь функции $(1 - tz)^{-a}$, стремящаяся к 1 при $z \to 0$

43. Найдите производную $\frac{\partial y}{\partial a}|_{a=0}$ решения задачи Коши

$$y' = -xy + y^2 + xy^3, \qquad y(1) = a.$$

Литература.

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.

3. Арнольд И.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 3-е издание.

4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.

5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.

7. Коддингтон Э., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.

8. Уиттекер Г.Т, Ватсон Г.Н., Курс современного анализа, т.1,2.

Указатель литературы к вопросам.

Вопросы 1-5: Петровский, гл.I,II, Степанов, гл. I, §§$1-4$
Вопрос 6: Степанов, гл. II, §3, Петровский, гл. II §§$8, 9$.
Вопрос 7: Петровский, гл. III §§$10, 15$.
Вопрос 8: Петровский, гл. III §15, Степанов, гл. II, §1, Понтрягин, гл.4 §20.
Вопрос 9: Степанов, гл. III, §§$1-3$.
Вопрос 10: Степанов, гл. III, §4, Петровский, гл. III §§$24, 26, 27$.
Вопрос 11: Степанов, гл. III, §5.
Вопрос 12: Петровский, гл. III §23.
Вопрос 13: Арнольд, гл. 3 §§$15-17$.
Вопросы 14-15: Петровский, гл. VI §§$47-48$.
Вопрос 16: Петровский, гл. VI §49, Степанов, гл. VI, §1.
Вопросы 17-18: Петровский, гл.VI, §52, Понтрягин, гл. 2 §12.
Вопрос 19: Понтрягин, гл. 2 §13, Филиппов, §11.
Вопрос 20: Гантмахер, гл. XV §§$5, 6$.
Вопрос 21: Петровский, гл. V §§$33-35$, Арнольд, гл. 3 §27.
Вопрос 22: Петровский, гл. V §§$28, 37$, Арнольд, гл. 3 §27.
Вопросы 23-24: Петровский, гл. V §§$36-37$, Степанов, гл. V, §§$1-2$.
Вопрос 25: Петровский, гл. V §40, Степанов, гл. VII, §2.
Вопрос 26: Петровский, гл. V §41, Степанов, гл. V, §3.
Вопрос 27: Степанов, гл. IV, §1, Понтрягин, гл.4 §21.
Вопросы 28-30: Степанов, гл. VII, §6, Петровский, гл. VI §51, Понтрягин, гл.5 §26.
Вопрос 31: Понтрягин, гл. 2 §§$15-16$, Арнольд гл. 1, §§$1-4$
Вопросы 32-34: Арнольд гл. 1, §§$1-4$, гл. 2 §7.
Вопрос 35: Гантмахер, гл. XV §§$7, 8$.
Вопрос 36: Коддингтон, Левинсон, гл. IV §§$1-4$, Гантмахер, гл. XV §10.
Вопрос 37: Уиттекер, Ватсон, т.1 гл. 10.
Вопрос 38: Уиттекер, Ватсон, т.2, гл. 14; т.1 гл. 10,
Вопрос 39: Петровский, гл. III §§$21, 22$, Арнольд гл. 2 §7, Понтрягин, гл.4 §§$23-24$.
Вопрос 40: Петровский, гл. III §22, Арнольд гл. 2 §7.