

ПРОГРАММА ГОДОВОГО КУРСА АЛГЕБРЫ
ЧИТАВШЕГОСЯ НА ФАКУЛЬТЕТЕ МАТЕМАТИКИ
В 2008 – 2009 УЧЕБНОМ ГОДУ

Множества и отображения Подсчёт числа произвольных, биективных, инъективных, сюръективных, возрастающих, неубывающих и т. п. отображений между (конечными упорядоченными) множествами. Мультиномиальные коэффициенты. Разбиения и диаграммами Юнга.

Знакомство с группами Группа перестановок: чётность, цикловой тип, транспозиции, отражения. Группы многогранников. Смежные классы, индекс подгруппы, длина орбиты. Гомоморфизмы и нормальные подгруппы. Простота знакопеременных групп.

Знакомство с коммутативными кольцами и полями Поле $\mathbb{C}$. Алгоритм Евклида в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{K}[x]$. Кольца и поля вычетов $\mathbb{Z}/(p)$ и алгебраических чисел $\mathbb{Q}[x]/(f)$. Примеры конечных полей. Корни многочленов, отыскание кратных корней и общих корней нескольких многочленов. Китайская теорема об остатках. Неприводимость и взаимная простота элементов коммутативного кольца, НОД и НОК. Факториальность кольца целых чисел и кольца многочленов. K евклидово $\implies K$ кольцо главных идеалов $\implies K$ факториально $\implies K[x]$ факториально. Гомоморфизмы, идеалы и факторизация. Редукция многочленов с целыми коэффициентами по простому модулю. Гауссовы целые числа.

Векторные пространства и базисы. Линейная зависимость, линейные оболочки, существование и равномощность базисов. Оценки размерностей сумм и пересечений. Практическое отыскание базисов методом Гаусса, матричный формализм, связь с теорией линейных уравнений. Стандартные базисы в пространствах многочленов, полиномиальная интерполяция с кратными узлами и её крайние случаи — формулы Лагранжа и Тэйлора.

Линейные отображения и матрицы. Алгебра матриц, элементарные преобразования и элементарные матрицы. Диагонализация и отыскание обратной матрицы методом Гаусса. Линейные отображения и их запись матрицами. Двойственность между подпространствами двойственных пространств. Ранг матрицы, строчный ранг равен столбцовому.

Определители. Объём как однородная функция, инвариантная относительно «заваливания» параллелепипеда на бок с сохранением высоты. Полилинейность, существование и единственность объёма. Свойства и техника вычисления определителей.

Грассмановы многочлены. Размерность, базис, центр грассмановой алгебры. Стандартный вид грассмановой квадратичной формы. Линейная замена переменных в грассмановом многочлене: миноры, разложение определителя по набору строк, формулы Сильвестра и Крамера.

Линейные операторы. Инвариантные подпространства, собственные векторы с различными значениями линейно независимы. Характеристический и минимальный многочлены линейного оператора, теорема Гамильтона-Кэли, критерии диагонализуемости. Комплексификация вещественного векторного пространства, существование у вещественного оператора 1-или 2-мерного инвариантного подпространства. Коммутирующие операторы имеют общий собственный вектор.

Евклидовы пространства. Свойства скалярного произведения, неравенства Коши – Буняковского – Шварца и треугольника. Ортогональные и ортонормальные базисы евклидова пространства. Ортогональное проектирование, ортогональное отражение и расстояние от вектора до подпространства.

Квадратичные и билинейные формы. Поляризация и ортогонализация. Ядро билинейной формы, невырожденность, ортогональные дополнения и проекции. Разложение пространства в сумму гиперболического и анизотропного, теорема Витта. Ортогональная группа порождается отражениями. Над $\mathbb{R}$ положительная и отрицательная определенность, закон инерции, критерий Сильвестра.

Ортогональные и унитарные операторы . Сохранение расстояния равносильно сохранению скалярного произведения. Приведение ортогонального оператора к клеточно диагональному виду. Комплексификация евклидова пространства, эрмитово скалярное произведение. Унитарные операторы, свойства собственных значений, инвариантность ортогонального дополнения. Диагонализуемость унитарных операторов.

Комплексные и вещественные структуры Комплексификация, овеществление, условия Коши – Римана. Келеровы тройки, соотношения Римана, зигелево полупространство. Кватернионы и спиноры.

Нормальные операторы. Сопряжение операторов на эрмитовом и евклидовом пространстве. Критерии нормальности, ортогональная диагонализация и её специализация для (анти)самосопряжённых и изометрических операторов.

Проективная геометрия. Проективизация векторного пространства, однородные координаты, аффинные карты и локальные барицентрические координаты. Дополнительные подпространства и проектирование. Линейная проективная группа. Проективная двойственность. Пространства гиперповерхностей. Отображения Веронезе, Плюккера и Сегре (примеры).

Проективные квадрики. Игры с плоскими кониками, пучками прямых и дробно линейными преобразованиями $\mathbb{P}_1$. Пересечение квадрики и прямой, касательное пространство к квадрике, полярное преобразование. Линейные подпространства, лежащие на квадрике. Индекс вещественной квадрики. Геометрическая классификация проективных и аффинных квадрик (над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$) и евклидовых квадрик (с точностью до движения). Инварианты пучка квадрик.

Конечно порожденные абелевы группы. Прямые суммы. Гомоморфизмы и автоморфизмы. Свободные группы и образующие. Теорема о подходящем базисе подрешетки. Разложение конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму циклических. Классификация конечнопорожденных абелевых групп.

Конечно порожденные модули над евклидовыми кольцами. Диагонализация матрицы над евклидовым кольцом методом Гаусса. Конечномерные модули над кольцом многочленов. Жорданова нормальная форма матрицы. Функции от линейных операторов.