АЛГЕБРА – модуль 3: Квадратичные и билинейные формы

1 Квадратичные формы

Мы рассматриваем конечномерные векторные пространства над полем $\boldsymbol{k}$, где $2 \neq 0$.

Определение 1.1 *Функция $f : V \longrightarrow \boldsymbol{k}$ на векторном пространстве V называется квадратичной формой, если для некоторой системы координат (некоторого базиса) в V значение f на векторе x вычисляется как однородный многочлен второй степени от его координат $x_1, \ldots, x_n$.*

$$f(x) = \sum_{i,j=1\ldots n} a_{ij} x_i\, x_j =: q(X) \ \ \text{где } X := [x_*] \text{ - столбец координат } x\,. \tag{1}$$

Здесь и далее $n = \dim V$.

Часто считают, что многочлен и задает квадратичную форму, и не вводят для нее отдельного "функционального обозначения".

Замечание 1.2 *Вскоре мы покажем, что свойство "выражаться в виде многочлена второй степени" не зависит от системы координат.*

Коэффициенты $\{a_{ij}\}$ естественно сгуппировать в матрицу $Q = (a_{ij})$, и записать (1) в виде матричного произведения

$$q(X) = X^{\mathsf{T}}\, Q\, X \tag{2}$$

Матрица Q называется *матрицей квадратичной формы* q (относительно выбранного базиса). Отметим, что матрицу мы считаем симметрической $Q = Q^{\mathsf{T}}$.
Пример. Если $q(X) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$, то

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Предложение 1.3 *Если мы переходим к новому базису ($e_* \rightsquigarrow e'_*$), то*

$$Q' = C^{\mathsf{T}} Q\, C\,, \tag{3}$$

где C – матрица перехода к новому базису.

Действительно, мы знаем что $X' = K\,X = C^{-1}X$ или $X = C\,X'$. Тогда

$$q(X') = (C\,X')^{\intercal} Q\,(C\,X) = (X')^{\intercal}\,C^{\intercal} Q\,C\,X'\,, \tag{4}$$

откуда $Q' = C^{\intercal} Q\,C$. $\square$

Следующая теорема является фундаментальной теоремой о квадратичных формах.

Теорема 1.4 *Для каждой кадратичной формы q*
(a) существует такая система координат, что q будет линейной комбинацией квадратов координат;
(b) существует такой базис, относительно которого матрица формы q будет диагональна.

Ясно, что утверждения (a) и (b) по существу означают одно и то же. Тем не менее мы приведем два доказательства, в одном мы будет строить систему координат, в другом – базис, и там, и там – по индукции.

Лемма 1.5 *Если $q(X) = \sum_{i,j=1\ldots n} a_{ij}x_i\,x_j$ и $a_{11} \neq 0$, то вводя новые координаты*

$$\left\{\begin{array}{ccl} y_1 & = & x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\,x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}\,x_n \\ y_2 & = & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & = & x_n \end{array}\right. \tag{5}$$

получим выражение q для в новых координатах в виде $q(Y) = a_{11}y_1^2 + \sum_{i,j=2\ldots n} a'_{ij}y_i\,y_j$.

Док. Запишем

$$\begin{aligned} q(X) = &\quad a_{11}\; x_1^2 \; + 2\,a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n \qquad + \ldots \\ = &\quad a_{11}\left(x_1^2 + 2\,x_1\left(\tfrac{a_{12}}{a_{11}}\,x_2 + \cdots + \tfrac{a_{1n}}{a_{11}}\,x_n\right)\right) \quad + \ldots \end{aligned}$$

откуда следует требуемое.

Пример.

$$\begin{aligned} q(X) = &\quad 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \\ = &\quad 3\left(x_1^2 + 2\,x_1\,\tfrac{2}{3}\,x_2\right) + 5\,x_2^2 \\ = &\quad 3\left(x_1 + \tfrac{2}{3}\,x_2\right)^2 - 3\cdot\tfrac{4}{9}\,x_2^2 + 5\,x_2^2 \\ = &\quad 3\left(x_1 + \tfrac{2}{3}\,x_2\right)^2 + \tfrac{11}{3}\,x_2^2\,. \end{aligned}$$

Тем самым, если есть коэффициент $a_{ii} \neq 0$, то можно осуществить шаг индукции.

Если же все квадраты входят с нулевыми коэффициентами и $a_{12} \neq 0$, то можно сделать следующую замену координат

$$\begin{cases} z_1 &= 1/2\,(x_1 + x_2) \\ z_2 &= 1/2\,(x_1 - x_2) \\ z_i &= \quad x_i \text{ при } i > 2\,. \end{cases}$$

Тогда
$$q(X) = 2a_{12}x_1\,x_2 + \ldots = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2 + \ldots$$
(ясно, что других членов с z_1^2 не возникает). Теперь можно применить Лемму. Тем самым всегда можно провести шаг индукции и уменьшить число переменных-координат. $\square$

Другое доказательство требует от нас некоторой предварительной подготовки.

2 Билинейные формы

Для того, чтобы использовать базисы, нам нужны связи между элементами матрицы Q и значениями формы f на базисных векторах (см. (1)). Для элементов a_{ii} такая связь очевидна

$$a_{ii} = f(e_i)\,,$$

но как быть с недиагональными элементами? Для этого введем *ассоциированную* f *с билинейную форму* полагая
$$b(X, Y) = X^{\mathsf{T}} Q\, Y\,. \tag{6}$$
Мы получаем функцию от двух (векторных) аргументов, линейную по каждому аргументу при фиксированном другом. Такая функция называется *билинейной* функцией или формой. Матрица Q называется матрицей билинейной формы относительно выбранного базиса.

В общем случае матрица билинейной формы не предполагается симметрической. Легко проверить, что при переходе к новому базису матрица билинейной формы меняется согласно той же формуле (3) что и матрица квадратичной формы.

Можно определить $b(x, y)$ и бескоординатно:

$$b(x, y) = \tfrac{1}{2}\left(q(x + y) - q(x) - q(y)\right). \tag{7}$$

Действительно

$$q(X + Y) - q(X) - q(Y) = (X + Y)^{\mathsf{T}} Q\,(X + Y) - X^{\mathsf{T}} Q\,X - Y^{\mathsf{T}} Q\,Y = X^{\mathsf{T}} Q\,Y + Y^{\mathsf{T}} Q\,X\,, \tag{8}$$

однако $(X^{\mathsf{T}} Q\,Y) = (X^{\mathsf{T}} Q\,Y)^{\mathsf{T}} = Y^{\mathsf{T}} Q^{\mathsf{T}}\,X = Y^{\mathsf{T}} Q\,X$ (мы используем то, что матрица порядка один совпадает со своей транспонированной), что и дает требуемое, а также равенство
$b(x, y) = b(y, x)$.

Теперь мы видим, что матричные элементы равны значениям билинейной формы на парах базисных векторов:

$$a_{ij} = b(e_i, e_j)\,. \tag{9}$$

Например

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b\,.$$

Определение 2.1 *Базис $u_1, \ldots, u_n$ называется ортогональным относительно билинейной формы $b(x, y)$ если*

$$b_{ij} := b(u_i, u_j) = 0 \text{ для всех } i, j\,.$$

Утверждедение (b) Теоремы 1.4 равносильно следующему.

Предложение 2.2 *Каждая симметрическая билинейная форма обладает ортогональным базисом.*

Док. Проведем индукцию по размерности пространства. Если $n = 1$, то утрерждение тавтологически верно. Если $b(x, x) = 0$ при все x, то форма нулевая и утверждение тоже тавтологически верно.

Иначе существует вектор (обозначим его e_1), для которого $a_{11} = b(e_1, e_1) \neq 0$. Дополним e_1 до базиса $e_1, \ldots, e_n$.

Лемма 2.3 *Пусть $a_{11} = b(e_1, e_1) \neq 0$. Сменим базис, полагая*

$$\left\{ \begin{array}{ccl} e'_1 & = & e_1 \quad , \\ e'_2 & = & e_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}\, e_1\,, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e'_n & = & e_n - \frac{a_{1n}}{a_{11}}\, e_1\,. \end{array} \right. \tag{10}$$

Тогда вектор e'_1 ортогонален остальным $e'_2, \ldots, e'_n$, то есть

$$b(e'_1, e'_i) = 0 \qquad \text{при } i \geq 2\,.$$

Действительно, вычислим

$$b(e'_1, e'_i) = b(e_1, e_i) - \frac{a_{1i}}{a_{11}}\, b(e_1, e_1) = a_{1i} - a_{1i} = 0\,,$$

что и дает требуемое.

Теперь можно рассмотреть q на подпространстве $V' = \langle e'_2, \ldots, e'_n \rangle$ и применить предположение индукции. Ортогорнальный базис в V' вместе с e'_1 дает ортогональный базис в V. $\square$

Замечание. Стоит отметить, что переход к новому базису в Лемме 2.3 дает в точности то же, что переход к новым координатам в Лемме 1.5, так как возникающие матрицы перехода C и K взаимообратны.

Следующие предложения уточняют конструкцию ортогонального базиса.

Определение 2.4 *Для матрицы D размера $n \times n$ обозначим через $D_{[i]}$ подматрицу размера $i \times i$ расположенную в левом верхнем углу, и назовем i-м главным минором для D определитель матрицы $D_{[i]}$.*

Для матрицы Q квадратичной формы q главные миноры обычно обозначают через Δ_i, добавляя $\Delta_0 := 1$.

Предложение 2.5 *Если матрица C перехода к новому базису унитреугольная (то есть верхняя треугольная с единицами на диагонали), то главные миноры не меняются: $\Delta'_i = \Delta_i$.*

Достаточно проверить, что

$$Q'_{[i]} = (C_{[i]})^\intercal Q_{[i]} C_{[i]} ,$$

а потом взять определитель. При этом $C_{[i]}$ это унитреугольная матрица, определитель такой матрицы равен единице, $\det C_{[i]} = 1$, откуда следует равенство миноров. $\square$

Теорема 2.6 *Предположим, что главные миноры Δ_i матрицы квадратичной формы q отличны от нуля при $i = 1, \dots, n-1$. Тогда существует система координат, в которой*

$$q(Z) = \tfrac{\Delta_1}{\Delta_0}\, z_1^2 + \tfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\, z_2^2 + \dots + \tfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\, z_n^2 \,.$$

Замечание 2.7 *Обратите внимание, что в [Г] формулировка другая, отношения миноров оказываются обратными, и базис, конечно, другой.*

Док. Нам достаточно перейти от первоначального к ортогональному базису (для ассоциированной билинейной формы) так, чтобы матрица перехода была унитреугольной. Тогда матрица формы будет диагональной и требуемые значения диагональных элементов получатся из вычисления миноров.

Сделаем последовательно несколько "переходов к новому базису".
Так как $a_{11} = \Delta_1 \neq 0$, то можно применить Лемму 2.3, возникающая матрица перехода унитреугольна.

Для коэффициентов a'_{ij} в получившемся базисе $e'_1, \dots, e'_n$ имеем $a'_{12} = a'_{21} = 0$, поэтому $\Delta_2 = a'_{11} a'_{22} \neq 0$ и значит $a'_{22} \neq 0$. Это показывает, что мы может применить Лемму 2.3 на подпространстве $V' = \langle e'_2, \dots, e'_n \rangle$, снова появится унитреугольная матрица перехода, и так далее.

Очевидно базис будет становится "все более ортогональным", а главные миноры на каждом шаге не меняются. В результате мы придем к ортогональному базису сохранив значения главных миноров. $\square$