§7. Ортогональная геометрия над произвольным полем.

Всюду в этой этой лекции мы предполагаем, что $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$.

7.1. Билинейные формы. Билинейной формой на векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}$ называется отображение

$$V \times V \xrightarrow{\beta} \mathbb{F}$$

линейное по каждому из двух аргументов, т. е. удовлетворяющее стандартному правилу раскрытия скобок:

$$\beta(\,\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\,,\, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2\,) = \\ = \lambda_1\mu_1 \cdot \beta(v_1, w_1) + \lambda_1\mu_2 \cdot \beta(v_1, w_2) + \lambda_2\mu_1 \cdot \beta(v_2, w_1) + \lambda_2\mu_2 \cdot \beta(v_2, w_2) \quad (7\text{-}1)$$

Пространства с билинейными формами рассматривают вместе с линейными отображениями, переводящими одну форму в другую. Точнее, если на векторных пространствах V_1, V_2 заданы билинейные формы β_1, β_2, то линейное отображение $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ называется *изометрическим*, если $\forall\, v, w \in V_1$ выполнено равенство $\beta_1(v, w) = \beta_2(f(v), f(w))$.

7.2. Матрицы Грама. Матрица значений билинейной формы на всевозможных парах векторов из некоторого набора $\{v_\nu\}$ называется *матрицей Грама* набора $\{v_\nu\}$ относительно формы β и обозначается

$$B_v = B_{v_1, v_2, \dots, v_m} = (\beta(v_\mu, v_\nu))\ .$$

(мы используем букву B, поскольку она похожа на β). Если один набор векторов получается из другого линейным преобразованием: $(w_1, w_2, \dots, w_k) = (v_1, v_2, \dots, v_m) \cdot C_{vw}$, то их матрицы Грама связаны уже известным нам преобразованием $B_w = C_{vw}^t \cdot B_v \cdot C_{vw}$ (ср. с формулой (6-1)).

Упражнение 7.1. Убедитесь в этом.

7.3. Корреляции. Каждая билинейная форма определяет два линейных отображения

$$\begin{aligned} L_\beta &: V \xrightarrow{v \mapsto \beta(v, *)} V^* \\ R_\beta &: V \xrightarrow{v \mapsto \beta(*, v)} V^* \end{aligned} \qquad (7\text{-}2)$$

называемые *левой* и *правой корреляциями* билинейной формы β.

Упражнение 7.2. Убедитесь, что матрицы операторов R_β и L_β, записанные в двойственных базисах $\{e_i\} \subset V$ и $\{e_i^*\} \subset V^*$, совпадают, соответственно, с B_e и B_e^t.

В действительности, задание любого из этих двух отображений равносильно заданию билинейной формы. Например, любое линейное отображение $V \xrightarrow{L} V^*$ можно воспринимать как левую корреляцию билинейной формы[1] $\beta(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\, L(v)\,,\, w\,\rangle$.

7.4. Невырожденность. Билинейная форма называется *невырожденной*, если отвечающие ей корреляции являются изоморфизмами. Это равносильно невырожденности матрицы Грама какого-нибудь (а, стало быть, и любого) базиса. Поскольку левая и правая корреляции задаются транспонированными матрицами, невырожденность ной из них влечёт невырожденность обеих. Иначе можно сказать, что форма β невырождена тогда и только тогда, когда для любого ненулевого вектора v существует вектор w', такой что $\beta(v, w') \neq 0$, или вектор w'', такой что $\beta(w'', v) \neq 0$, причём если существует один из них, то автоматически существует и второй.

Если форма β вырождена, то обе её корреляции имеют ненулевые ядра

$$\begin{aligned} \ker L_\beta &= \{u \in V \mid \beta(u, v) = 0 \ \ \forall\, v \in V\ \} \\ \ker R_\beta &= \{u \in V \mid \beta(v, u) = 0 \ \ \forall\, v \in V\ \}\ , \end{aligned}$$

[1] здесь и далее для $v \in V$ и $\xi \in V^*$ мы обозначаем через $\langle\, \xi\,,\, v\,\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \xi(v)$ результат вычисления линейной формы ξ на векторе v (иногда эту операцию называют *свёрткой* вектора v с ковектором ξ)

называемые, соответственно, *левым* и *правым* ядром билинейной формы β. Вообще говоря, это *разные* подпространства в V. Но размерность у них одинакова, поскольку матрицы L_β и R_β транспонированы друг другу.

7.4.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть ограничение формы β на подпространство $U \subset V$ невырождено. Тогда $V = {}^\perp U \oplus U = U \oplus U^\perp$, где*

$$\begin{aligned} {}^\perp U &= \{ v \in V \mid \beta(v,u) = 0 \;\; \forall\, u \in U \; \} \\ U^\perp &= \{ v \in V \mid \beta(u,v) = 0 \;\; \forall\, u \in U \; \} \;, \end{aligned}$$

Для произвольного вектора $v \in V$ его левая ортогональная проекция $u_л \in U$ (проекция на U вдоль ${}^\perp U$) и правая ортогональная проекция $u_п \in U$ (проекция на U вдоль $U^\perp$) однозначно определяются тем, что $\forall\, w \in U$ выполнены соотношения

$$\beta(v,w) = \beta(u_л, w) \qquad \text{и} \qquad \beta(w,v) = \beta(w, u_п) \tag{7-3}$$

Доказательство. Рассуждаем как в n° 6.3. Равенства ${}^\perp U \cap U = U \cap U^\perp = 0$ вытекают из невырожденности ограничения формы β на U. Далее, если мы сумеем для каждого $v \in V$ подобрать векторы $u_л$ и $u_п$ из U, удовлетворяющие условиям (7-3), то в записи $v = u_л + (v - u_л) = (v - u_п) + u_п$ слагаемые $(v - u_л)$ и $(v - u_п)$ будут автоматически лежать ${}^\perp U$ и $U^\perp$ соответственно, что и даст равенства $V = {}^\perp U \oplus U = U \oplus U^\perp$. Существование (и единственность) векторов $u_л, u_п \in U$, удовлетворяющих условиям (7-3), вытекает из невырожденности ограничения формы β на U. В самом деле, поскольку левая корреляция

$$U \xrightarrow[\sim]{u \mapsto \beta(u,*)} U^*$$

является изоморфизмом, линейный функционал $\beta(v,\,*\,) : U \xrightarrow{w \mapsto \beta(v,w)} \mathbb{F}$ единственным образом представляется в виде $\beta(u_л,\,*\,)$. Рассуждение про $u_п$ симметрично. □

7.5. Условия симметрии. Билинейные формы β, удовлетворяющие $\forall\, v, w \in V$ условию

$$\beta(v,w) = \beta(w,v) \qquad \text{или} \qquad \beta(v,w) = -\beta(w,v)$$

называются, соответственно, *симметричными* или *кососимметричными*.

Упражнение 7.3. Покажите, что для кососимметричности формы (над полем любой характеристики) достаточно, чтобы $\forall\, v \in V$ выполнялось равенство $\beta(v,v) = 0$, а при $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ это условие является также и необходимым (решение можно подглядеть в сноске ([1])).

Отметим, что (косо) симметричность формы равносильна (косо) симметричности её матрицы Грама в каком-нибудь (а значит, и в любом) базисе. Произвольная билинейная форма β однозначно представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной форм:

$$\begin{gathered} \beta(v,w) = \beta_+(v,w) + \beta_-(v,w) \;, \quad \text{где} \\ \beta_+(v,w) = (\beta(v,w) + \beta(w,v))/2 \;, \quad \beta_-(v,w) = (\beta(v,w) - \beta(w,v))/2 \;. \end{gathered}$$

Таким образом, векторное пространство всех билинейных форм на $V \times V$ является прямой суммой подпространств симметричных и кососимметричных форм.

Упражнение 7.4. Вычислите размерности всех трёх этих пространств, если $\dim V = n$.

Левое и правое ядра (косо) симметричной формы β совпадают друг с другом. Соответствующее подпространство

$$\ker \beta \overset{\text{def}}{=} \{ w \in V \mid \beta(w,v) = \pm\beta(w,v) = 0 \;\; \forall\, v \in V \; \} \tag{7-4}$$

называется просто *ядром* (косо) симметричной формы β.

[1] РЕШЕНИЕ: первое следует из равенства $\beta(v+w, v+w) = \beta(v,v) + \beta(w,w) + \beta(v,w) + \beta(w,v)$, второе — из равенства $\beta(v,v) = -\beta(v,v)$

7.5.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Ограничение (косо) симметричной формы β на любое дополнительное к её ядру подпространство $U \subset V$ невырождено.*

Доказательство. Пусть $U \subset V$ таково, что $V = \ker \beta \oplus U$. Если $w \in U$ лежит в ядре ограничения $\beta|_U$, т. е. удовлетворяет $\forall u \in U$ соотношению $\beta(w, u) = 0$, то записывая произвольный вектор $v \in V$ в виде $v = e + u$ с $e \in \ker \beta$, $u \in U$ мы получим $\beta(w, v) = \beta(w, e) + \beta(w, u) = 0$, т. е. $w \in U \cap \ker \beta = 0$. □

Упражнение 7.5*. Покажите, что без предположения (косо) симметричности предложение перестаёт быть верным, точнее, проверьте, что если $V = \ker L_\beta \oplus U = \ker R_\beta \oplus W$, то ограничение левой корреляции $V \xrightarrow{L_\beta} V^*$ на подпространство U устанавливает изоморфизм U с W^*, но не с U^*.

Остаток этого параграфа будет посвящён *симметричным* билинейным формам.

7.6. Симметричные билинейные формы и однородные многочлены второй степени.

Функция $V \xrightarrow{q} \mathbb{F}$ называется *однородным многочленом второй степени* (или *квадратичной формой*) на пространстве V, если при выборе в V некоторого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ значение функции q на произвольном векторе $v = \sum x_i e_i$ является однородным многочленом степени 2 от координат $x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е.

$$q(v) = \sum_{i,j} b_{ij}\, x_i x_j \ . \tag{7-5}$$

Упражнение 7.6. Покажите, что это свойство не зависит от выбора базиса, т. е. что в координатах относительно любого другого базиса в V функция q тоже будет (возможно, другим) однородным многочленом степени 2 от координат.

Правая часть формулы (7-5) является общим выражением для однородного многочлена второй степени с неопределёнными коэффициентами. Удобно считать, что сумма в правой части распространяется на всевозможные пары индексов i, j, т. е. что вместе с каждым мономом $x_i x_j$, у которого $i \neq j$, в сумме присутствует и моном $x_j x_i$, причём с тем же самым коэффициентом $b_{ji} = b_{ij}$, равным, таким образом, половине фактического коэффициента при $x_i x_j$, получающегося при приведении этих подобных слагаемых. Всюду далее мы будем следовать этому соглашению. Удобство его заключается в том, что мы можем переписать правую часть (7-5) в виде произведения матриц

$$q(v) = \sum_{i,j} x_i b_{ij} x_j = x \cdot B \cdot x^t \ , \tag{7-6}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — строка координат, x^t — столбец координат, получающийся её транспонированием, а $B = (b_{ij})$ — симметричная квадратная матрица, составленная из коэффициентов b_{ij}. Матрицу B можно воспринимать как матрицу Грама некоторой симметричной билинейной формы $V \times V \xrightarrow{\beta} \mathbb{F}$. Значение этой формы на векторах $v = \sum x_i e_i$ и $w = \sum y_i e_i$ задаётся формулой $\beta(v, w) = x \cdot B \cdot y^t$. Билинейная форма β называется *поляризацией* однородного квадратичного многочлена q. Возникающее таким образом взаимно однозначное соответствие между однородными многочленами второй степени и симметричными билинейными формами является изоморфизмом векторных пространств и *не зависит от выбора базиса* в V.

В самом деле, сопоставление симметричной билинейной форме β однородного многочлена второй степени q можно задать безо всяких координат правилом

$$\beta(u, w) \longmapsto q(v) = \beta(v, v) \ ,$$

которое, очевидно, линейно по β. Обратное отображение, восстанавливающее форму β по многочлену q можно задать одним из следующих двух равносильных способов:

$$\beta(v, w) = \frac{1}{2}\Big(q(v + w) - q(v) - q(w)\Big) = \frac{1}{4}\Big(q(v + w) - q(v - w)\Big) \ . \tag{7-7}$$

Для проверки первого равенства зафиксируем в V какой-нибудь базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, разложим v и w по этому базису как $v = \sum x_i e_i$ и $w = \sum y_i e_i$ и запишем q в виде (7-6). Тогда

$$q(v + w) - q(v) - q(w) = (x + y)B(x^t - y^t) - xBx^t - yBy^t = xBy^t + yBx^t = 2\, xBy^t \ .$$

(в последнем переходе мы воспользовались тем, что число yBx^t, будучи матрицей размера 1×1, совпадает со своей транспонированной версией, и в силу симметричности матрицы B равно $yBx^t = (yBx^t)^t = xB^ty^t = xBy^t$).

Упражнение 7.7. Проверьте аналогичным образом второе равенство в (7-7) и покажите, что

$$\beta(x,y) = \frac{1}{2}\sum_i y_i \frac{\partial q(x)}{\partial x_i}\,.$$

7.7. Ортогонализация. Процедура построения ортогонального базиса в евклидовом пространстве дословно переносится на произвольные симметричные билинейные формы, за исключением того, что для произвольной формы β над произвольным полем $\mathbb{F}$ ортогональные базисные векторы нельзя нормировать по длине (скажем, добиться равенств $\beta(e_i, e_i) = 1$).

7.7.1. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА. *Матрица Грама любой симметричной билинейной формы β над любым полем $\mathbb{F}$ с $\operatorname{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ может быть сделана диагональной в некотором базисе.*

Доказательство. Если $\dim V = 1$ или β тождественно равна 0, то матрица Грама диагональна. Если β не тождественный нуль, то отвечающий форме β квадратичный многочлен $q(v) = \beta(v, v)$ в силу формул (7-7) тоже не является тождественным нулём, т. е. $\beta(e, e) \neq 0$ для некоторого $e \in V$. Возьмем его в качестве первого вектора искомого базиса. Поскольку ограничение формы β на одномерное пространство $\mathbb{F}\cdot e$, натянутое на e, невырождено, V распадается согласно (n° 7.4.1) в прямую ортогональную сумму $(\mathbb{F}\cdot e) \oplus e^\perp$, где $e^\perp \overset{\text{def}}{=} \{\, v \in V \mid \beta(e, v) = 0 \,\}$.

Упражнение 7.8. Проверьте непосредственным вычислением, что любой вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде $\lambda\, e + u$ с $\lambda = \beta(v, e)/\beta(e, e) \in \mathbb{F}$ и $u = v - \lambda e \in e^\perp$.

Заменяя V на $e^\perp$ и повторяя предыдущее рассуждение, найдем второй базисный вектор и т. д. □

7.7.2. СЛЕДСТВИЕ. *Всякая квадратичная форма с коэффициентами из произвольного поля $\mathbb{F}$ с $\operatorname{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ линейной обратимой заменой переменных приводится к виду $\sum a_i x_i^2$.* □

7.7.3. СЛЕДСТВИЕ. *Над алгебраически замкнутом полем $\mathbb{F}$ с $\operatorname{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ две квадратичные формы тогда и только тогда переводятся одна в другую линейной обратимой заменой координат, когда их матрицы Грама имеют одинаковый ранг.*

Доказательство. Диагональные элементы матрицы Грама произвольного ортогонального базиса превращаются в единицы после преобразования базиса $e_i \longmapsto e_i/\sqrt{q(e_i)}$. Таким образом, любая симметричная форма имеет в надлежащем базисе диагональную матрицу Грама с диагональными элементами, равными 0 или 1. Поскольку число нулей на диагонали равно размерности ядра формы, и число нулей, и число единиц (равное рангу матрицы Грама) не зависят от выбора такого базиса. □

Упражнение 7.9. Покажите, что ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса (подсказка: убедитесь, что ранг матрицы не меняется от умножения на обратимую матрицу).

7.7.4. Пример: квадратичная форма в размерности 2 имеет вид $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ и подходящей линейной заменой координат приводится либо к виду $\alpha t_1^2 + \beta\, t_2^2$ (если она невырождена), либо к виду $\alpha t^2 = 0$ (если вырождена). Таким образом, вырожденная квадратичная форма в размерности 2 является полным квадратом линейной, что происходит в точности тогда, когда обращается в нуль её определитель Грама[1]

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2\,.$$

Невырожденные квадратичные формы бывают двух типов, смотря по тому, является ли $-\det B$ полным квадратом. Поскольку при замене базиса $\det B$ умножается на квадрат определителя матрицы перехода, свойство $-\det B$ быть или не быть полным квадратом не зависит от выбора базиса.

Если $-\det B$ не квадрат, то $q(v) \neq 0$ ни для какого $v \neq 0$. В самом деле, с точностью до умножения на квадраты, $-\det B = -\alpha\beta$, где α и β суть коэффициенты диагонального представления $q(t) = \alpha t_1^2 + \beta\, t_2^2$, и $q(t_1, t_2) = 0$ означало бы, что $-\alpha\beta = (\beta t_2/t_1)^2 = (\alpha t_1/t_2)^2$.

Наоборот, если $-\det B$ является полным квадратом (что всегда так над алгебраически замкнутым полем), то полным квадратом будет и $-\alpha\beta$, а с ним и $-\beta/\alpha$. Но $q\left(\sqrt{-\beta/\alpha}, 1\right) = 0$.

[1] равный $-D/4$, где D — это школьный «дискриминант квадратного трёхчена» $ax^2 + 2bx + c$

7.8. Изотропные и анизотропные подпространства. Подпространство $U \subset V$ называется *анизотропным* для симметричной формы β, если $\beta(v,v) \neq 0$ для любого ненулевого $v \in V$. Например, вещественное евклидово пространство является анизотропным по отношению к евклидовому скалярному произведению. В примере (n° 7.7.4) мы видели, что для анизотропности двумерного пространства необходимо и достаточно, чтобы взятый противоположным знаком определитель Грама ограничения формы на это подпространство не был квадратом поля $\mathbb{F}$.

Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным* для симметричной билинейной формы β, если $\beta(u_1, u_2) = 0 \;\forall\, u_1, u_2 \in U$, т. е. когда ограничение формы на U тождественно нулевое. Ненулевые векторы v, для которых $\beta(v,v) = 0$ называются *изотропными векторами*. Источником изотропных подпространств являются *гиперболические формы*.

7.8.1. Пример: гиперболическое пространство $\boldsymbol{H_{2n}}$ определяется как прямая сумма $V^* \oplus V$, где $\dim V = n$, с симметричной билинейной формой

$$h\big((\xi_1, v_1)\,,\, (\xi_2, v_2) \big) = \xi_1(v_2) + \xi_2(v_1)\;. \tag{7-8}$$

Иначе говоря, форма h ограничивается в тождественно нулевые формы на подпространствах V и V^*, а на любой паре паре вектор-ковектор она действует как свёртка $h(\xi, v) = h(v, \xi) = \langle\, \xi \,,\, v \,\rangle$. Если выбрать в H_{2n} базис

$$e_1, e_2, \dots, e_n, e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\,, \tag{7-9}$$

образованный векторами какого-либо базиса V и двойственного ему базиса V^*, то матрица Грама формы h в таком базисе будет иметь блочный вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

в котором 0 — нулевая, а E — единичная $n \times n$ −матрицы. Таким образом, форма h невырождена, но обладает изотропным подпространством половинной размерности. Ортогональный базис для гиперболической формы (если $\operatorname{char}(\mathbb{F}) \neq 2$) состоит из векторов $p_i = e_i + e_i^*$ и $q_i = e_i - e_i^*$, для которых $h(p_i, q_i) = 0$, $h(p_i, p_i) = 2$, $h(q_i, q_i) = -2$.

Упражнение 7.10. Убедитесь, что прямая ортогональная сумма $H_{2m} \oplus H_{2k}$ изометрически изоморфна $H_{2(m+k)}$.

Упражнение 7.11. Докажите, что следующие условия на подпространство V с невырожденной симметричной билинейной формой попарно эквивалентны:
а) V изометрически изоморфно гиперболическому пространству;
б) V является прямой суммой двух изотропных подпространств;
в) $\dim V$ — чётна, и в V имеется изотропное подпространство половинной размерности.

7.8.2. ТЕОРЕМА. *Любое пространство V с невырожденной симметричной формой β раскладывается в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств.*

Доказательство. Если в V нет изотропных векторов, уже само V является анизотропным подпространством. Если в V есть ненулевой изотропный вектор e, то в силу невырожденности формы будет существовать вектор w с $\beta(e, w) = a \neq 0$. Тогда для вектора $u = w/a$ будем иметь $\beta(e_1, u) = 1$. Полагая $e^* = u - \frac{1}{2}\beta(u,u)\cdot e$, мы получим $\beta(e, e^*) = \beta(e, u) = 1$ и $\beta(e^*, e^*) = 0$. Таким образом, линейная оболочка векторов e и e^* представляет собою гиперболическую плоскость H_2. Поскольку ограничение формы β на эту плоскость невырождено, пространство V раскладывается в ортогональную прямую сумму $V = H_2 \oplus H_2^{\perp}$, и мы можем повторить рассуждение заменив V на $H_2^{\perp}$. □

Упражнение 7.12. Докажите, что всякое m-мерное изотропное подпространство в пространстве V с невырожденной симметричной формой содержится в некотором гиперболическом подпространстве $H_{2m} \subset V$.

7.9. Изометрии невырожденной симметричной формы. Изометрический линейный оператор f на пространстве с невырожденной симметричной билинейной формой записывается в произвольно выбранном базисе с матрицей Грама B некоторой матрицей F, удовлетворяющей соотношению $F^t \cdot B \cdot F = B$. Поэтому изометрический оператор обратим, и обратный к нему оператор будет иметь матрицу $F^{-1} = B^{-1}F^tB$.

Таким образом, изометрические операторы данной невырожденной симметричной формы β образуют группу, называемую *ортогональной группой* формы β и обозначаемую O_β.

Если форма β обладает ортонормальным базисом, в котором $B = E$, группу O_β можно отождествить с группой *ортогональных матриц*

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \mid F^{-1} = F^t\}\,, \text{ где } n = \dim V\,.$$

Подгруппа $\mathrm{SO}_n(\mathbb{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathrm{O}_n(\mathbb{F}) \mid \det F = 1\}$ этой группы называется *специальной ортогональной группой.*

Если форма β не обладает ортонормальным базисом, группа O_β может оказаться далека по своим свойствам от группы $\mathrm{O}_n(\mathbb{F})$.

7.9.1. Пример: изометрии вещественной гиперболической плоскости. В стандартном гиперболическом базисе e, e^* гиперболической плоскости H_2 с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ изометрический оператор задаётся матрицей $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, удовлетворяющей условию $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, которое равносильно уравнениям $ac = bd = 0$ и $ad + bc = 1$, имеющим два семейства решений:

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widetilde{F}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{F} \smallsetminus \{0\} \text{ любое.} \tag{7-10}$$

Над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ оператор F_λ является собственным, и при $\lambda > 0$ называется *гиперболическим поворотом*, поскольку орбита заданного ненулевого вектора $v = (x, y)$ при действии на него операторов F_λ с $\lambda \in (0, \infty)$ представляет собой гиперболу $xy = \text{const}$. Если положить $\lambda = e^t$ и перейти к ортогональному базису $p = (e + e^*)/\sqrt{2}$, $q = (e - e^*)/\sqrt{2}$, то оператор F_λ запишется в этом базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

аналогичной матрице евклидова поворота из примера (n° 6.5.2). Оператор F_λ с $\lambda < 0$ является композицией гиперболического поворота и центральной симметрии (если угодно, при проходе параметра λ через 0 или через ∞ орбита $F_\lambda v$ перескакивает на другую ветвь той же гиперболы). Несобственный оператор $\widetilde{F}_\lambda$ является композицией гиперболического поворота с отражением относительно пересекающей ветви оси симметрии гиперболы.

7.10. Отражения. Всякий анизотропный вектор $e \in V$ задаёт преобразование $V \xrightarrow{\sigma_e} V$, действующее на векторы $v \in V$ по формуле

$$\sigma_e(v) = v - 2\,\frac{\beta(e,v)}{\beta(e,e)} \cdot e \tag{7-11}$$

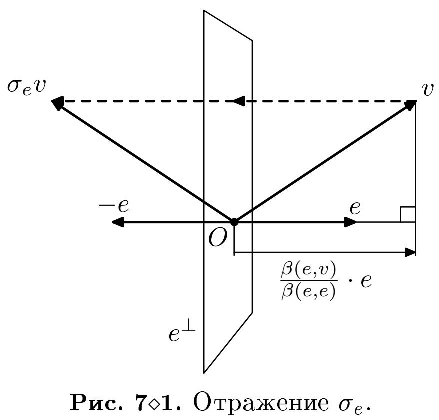

Рис. 7◇1. Отражение σ_e.

и геометрически представляющее собою отражение в гиперплоскости $e^\perp = \{v \in V \mid \beta(e,v) = 0\}$ (см. рис. 7◇1): поскольку ограничение формы β на прямую $\mathbb{F} \cdot e$ невырождено, пространство $V = \mathbb{F} \cdot e \oplus e^\perp$ является прямой ортогональной суммой этой прямой и ортогонала к ней, и σ_e тождественно действует на $v \in e^\perp$ и переводит e в $-e$. В частности, $\sigma_e \in \mathrm{O}_\beta$ и $\sigma_e^2 = 1$.

Упражнение 7.13. Покажите, что $\sigma_{f(v)} = f \circ \sigma_v \circ f^{-1}$ для любой изометрии $V \xrightarrow{f} V$ и любого анизотропного $e \in V$.

7.10.1. Лемма. *В пространстве с невырожденной симметричной билинейной формой β для любых двух различных анизотропных векторов u, v с равными скалярными квадратами $\beta(u,u) = \beta(v,v) \neq 0$ существует отражение, переводящее u либо в v либо в $-v$.*

Доказательство. Если u и v коллинеарны, то искомым отражением является $\sigma_v = \sigma_u$. Если u и v неколлинеарны, то хотя бы одна из двух диагоналей натянутого на них ромба (см. рис. 7◇2) анизотропна, поскольку эти диагонали ортогональны между собою: $\beta(u+v, u-v) = \beta(u,u) - \beta(v,v) = 0$ и порождают то же двумерное пространство, что и u, v. Отражение σ_{u-v} относительно $(u-v)^\perp$ переводит u в v, а отражение σ_{u+v} относительно $(u+v)^\perp$ переводит u в $-v$. □

Упражнение 7.14. Убедитесь в этом алгебраически, проведя необходимую выкладку по формуле (7-11).

Упражнение 7.15. Покажите, что если пространство V анизотропно, то всегда существует отражение, переводящее u в точности в v.

7.10.2. ТЕОРЕМА. *Всякая изометрия n-мерного пространства с невырожденной симметричной формой является композицией $\leqslant 2n$ отражений.*

Доказательство. Индукция по n. Ортогональная группа одномерного пространства состоит из тождественного оператора E и отражения $-E$. Рассмотрим изометрию $V \xrightarrow{f} V$ n-мерного пространства. Выберем в V какой-нибудь анизотропный вектор v и обозначим через σ отражение, переводящее $f(v)$ либо в v, либо в $-v$. Композиция σf переводит v в $\pm v$, а значит, переводит в себя $(n-1)$-мерную гиперплоскость $v^{\perp}$. По индукции, действие σf на $v^{\perp}$ является композицией $\leqslant 2(n-1)$ отражений. Расширяя гиперплоскости в $v^{\perp}$, относительно которых происходили эти отражения, до гиперплоскостей в V добавлением к ним вектора v, мы заключаем, что σf как оператор на всём пространстве V есть композиция этих $(2n-2)$ отражений и, возможно, ещё одного отражения, переводящего v в $-v$ и оставляющего неподвижным $v^{\perp}$. Но тогда $f = \sigma\sigma f$ является композицией $\leqslant 2n$ отражений. □

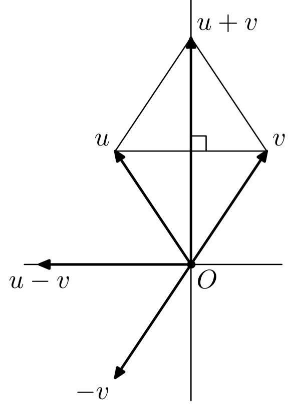

Рис. 7◇2. Отражения относительно диагоналей ромба.

Упражнение 7.16. Докажите, что любая изометрия n-мерного анизотропного пространства является композицией $\leqslant n$ отражений.

7.10.3. ТЕОРЕМА (ЛЕММА ВИТТА). *Пусть на пространствах U, V, W заданы какие-то невырожденные симметричные билинейные формы. Если существует изометрический изоморфизм прямой ортогональной суммы $U \oplus V$ с прямой ортогональной суммой $U \oplus W$, то существует изометрический изоморфизм V с W.*

Доказательство. Индукция по $\dim U$. Если $U = 0$, доказывать нечего. Если $U = \mathbb{F}u$ одномерно, то u автоматически анизотропен. Пусть $\mathbb{F}u \oplus V \xrightarrow{f} \mathbb{F}u \oplus W$ — изометрический изоморфизм ортогональных прямых сумм. Рассмотрим отражение σ второго пространства, переводящее $f(u)$ в $\pm u$. Изометрический изоморфизм σf переводит $\mathbb{F} \cdot u$ в $\mathbb{F} \cdot u$, а значит, изоморфно отображает ортогональное дополнение к u в первом пространстве на ортогональное дополнение к u во втором, т. е. даёт нужный изометрический изоморфизм $V \xrightarrow{\sigma f} W$. В общем случае $\dim U > 1$ выберем в U какой-нибудь анизотропный вектор u и рассмотрим ортогональное разложение $U = \mathbb{F} \cdot u \oplus u^{\perp}$. Применяя предположение индукции к $U = \mathbb{F} \cdot u$ получим изометрический изоморфизм $u^{\perp} \oplus V$ с $u^{\perp} \oplus W$. Второй раз применяя индуктивное предположение с $U = u^{\perp}$, получаем искомую изометрию V с W. □

7.10.4. СЛЕДСТВИЕ. *Построенное в теореме* (n° 7.8.2) *разложение пространства V с невырожденной симметричной билинейной формой в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств единственно в том смысле, что для любых двух таких разложений $V = H_{2k} \oplus U = H_{2m} \oplus W$ анизотропные подпространства U и W будут изометрически изоморфны, а гиперболические пространства будут иметь одинаковую размерность $2k = 2m$.*

Доказательство. Пусть $m \geqslant k$, так что $H_{2m} = H_{2k} \oplus H_{2(m-k)}$. Тождественное отображение $V \xrightarrow{\mathrm{Id}} V$ задаёт изометрический изоморфизм $H_{2k} \oplus U \xrightarrow{\sim} H_{2k} \oplus H_{2(m-k)} \oplus W$. По лемме Витта существует изометрический изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} H_{2(m-k)} \oplus W$. Поскольку U анизотропно, гиперболическое подпространство $H_{2(m-k)}$ должно быть нулевым (иначе в нём найдётся изотропный вектор). Но тогда $k = m$ и U изометрически изоморфно W. □

7.10.5. СЛЕДСТВИЕ. *Всякое гиперболическое подпространство в пространстве с невырожденной симметричной формой может быть переведено в любое другое гиперболическое подпространство той же размерности подходящей изометрией объемлющего пространства.*

Доказательство. Пусть $H', H'' \subset V$ — два изоморфных гиперболических подпространства, и $U' = H'^{\perp}$ и $U'' = H''^{\perp}$ — их ортогональные дополнения. Обозначим через $\varphi : H' \xrightarrow{\sim} H''$ изометрический изоморфизм, переводящий стандартный гиперболический базис одного пространства в такой же базис другого, а через $\psi : U' \xrightarrow{\sim} U''$ — какой-нибудь изометрический изоморфизм, существующий по предыдущему следствию. Тогда отображение $H' \oplus U' \xrightarrow{(\varphi,\psi)} H'' \oplus U''$, переводящее вектор $h' + u' \in V$ в $\varphi(h') + \psi(u')$ будет искомым изометрическим автоморфизмом пространства V. □

7.10.6. СЛЕДСТВИЕ. *Любое изотропное подпространство в пространстве с невырожденной симметричной формой переводится в любое другое изотропное подпространство той же размерности при помощи подходящей изометрии объемлющего пространства.* □

7.11. Вещественные квадратичные формы. По теореме Лагранжа, всякая вещественная квадратичная форма на n-мерном вещественном пространстве линейной заменой координат преобразуется к виду $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+m}^2$. Для этого достаточно построить какой-нибудь базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ с диагональной матрицей Грама, а затем поделить все векторы e_i с $\beta(e_i, e_i) \neq 0$ на $\sqrt{|\beta(e_i, e_i)|}$.

Числа p и m называются положительным и отрицательным *индексами инерции*, а их разность $p - m$ — *индексом* билинейной формы β. Пару (p, m) называют также *сигнатурой* формы β.

Линейная оболочка векторов с нулевым скалярным квадратом в диагональном представлении формы β есть в точности ядро формы. Поэтому число нулей и сумма $p + m$ не зависят от выбора ортогонального базиса. Число $\mathrm{rk}\,(\beta) = (p+m)$ называется *рангом* формы β. Ранг формы совпадает с рангом любой её матрицы Грама.

Из единственности разложения невырожденной формы в ортогональную сумму гиперболической и анизотропной вытекает, что индекс и сигнатура тоже не зависят от выбора ортогонального базиса. В самом деле, двумерное подпространство, порождённое векторами e_1, e_2 с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ является гиперболической плоскостью со стандартным гиперболическим базисом $e = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$ и $e^* = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$. Таким образом, над полем $\mathbb{R}$ в каждой размерности n имеются ровно две неизоморфные анизотропные формы: *положительно определённая*, или *евклидова*, для которой $\beta(v, v) > 0 \;\forall\, v \neq 0$, и матрица Грама которой приводится к единичной матрице E, а также *отрицательно определённая*, для которой $\beta(v, v) < 0 \;\forall\, v \neq 0$, и матрица Грама которой приводится к $-E$. Поэтому абсолютная величина индекса $|p - q|$ произвольной формы β равна размерности анизотропной составляющей формы q, и знак индекса соответствует положительной или отрицательной определённости анизотропной составляющей формы b, а число непересекающихся пар $(+1, -1)$ в её диагональном представлении, т. е. $\min(p, m)$, равно половине размерности гиперболической составляющей или, что то же самое, размерности максимального изотропного подпространства формы β. Суммируем сказанное как

7.11.1. СЛЕДСТВИЕ. *Две квадратичных формы с вещественными коэффициентами тогда и только тогда переводятся друг в друга обратимой линейной заменой переменных, когда они имеют одинаковый ранг и индекс.* □

Упражнение 7.17. Докажите, что положительный индекс инерции равен наибольшей среди размерностей тех подпространств, на которые форма ограничивается в положительно определённую форму, а отрицательный индекс инерции равен наибольшей среди размерностей тех подпространств, на которые форма ограничивается в отрицательно определённую форму.

7.11.2. Отыскание сигнатуры невырожденной формы по её матрице Грама в произвольном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ часто бывает возможно без явной его ортогонализации. Положим $\Delta_0 = 1$ и обозначим через Δ_i с $1 \leqslant i \leqslant n$ определитель $i \times i$-подматрицы матрицы Грама, стоящей в первых i строках и первых i столбцах. Получим последовательность *главных угловых миноров*:

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n\,, \quad \text{где} \quad n = \dim V\,. \tag{7-12}$$

Произведение диагональных элементов в диагональном виде ограничения формы β на линейную оболочку V_i первых i базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_i$ имеет тот же знак, что Δ_i, либо обращается (вместе с Δ_i) в нуль, если ограничение формы на V_i вырождено. Поэтому, читая последовательность (7-12) слева направо, можно проследить за последовательным изменением сигнатуры формы $\beta|_{V_i}$ при переходе от V_i к V_{i+1} или за появлением у формы изотропных векторов.

Пусть, к примеру, для некоей симметричной билинейной формы β на $\mathbb{R}^4$ последовательность (7-12) оказалась такой, что

$$\Delta_1 < 0\,, \quad \Delta_2 = 0\,, \quad \Delta_3 < 0\,, \quad \Delta_4 > 0\,.$$

Т. к. ограничение β на линейную оболочку первых двух базисных векторов вырождено, в ней найдётся изотропный вектор. Тогда линейная оболочка первых трёх базисных базисных векторов содержит гиперболическую плоскость, а значит, диагональный вид ограничения β на это трёхмерное пространство либо $(-1,-1,1)$, либо $(-1,1,1)$. Поскольку $\Delta_3 < 0$, имеет место второй случай. Наконец, поскольку $\Delta_4 > 0$, сигнатура β на всём пространстве есть $(2,2)$.

Если ни один из главных угловых миноров не обращается в нуль, отрицательный индекс инерции формы β равен числу перемен знака в последовательности (7-12) (это правило известно как *критерий Сильвестра*). В самом деле, в этом случае ограничение формы на каждое из пространств V_i невырождено, и знак у Δ_{i+1} будет отличаться от знака Δ_i тогда и только тогда, когда при переходе от V_i к V_{i+1} к диагональному виду матрицы Грама добавится -1.

7.12. Квадратичные формы над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ с $p > 2$. Напомним, что ровно половина ненулевых элементов поля $\mathbb{F}_p$ является квадратами — это вытекает из того, что возведение ненулевых элементов поля в квадрат является гомоморфизмом мультипликативных групп $\mathbb{F}_p^* \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{F}_p^*$ с двухэлементным ядром $\{\pm 1\}$. Ненулевые квадраты образуют в $\mathbb{F}_p^*$ подгруппу $\mathbb{F}_p^{*2} \subset \mathbb{F}_p^*$, совпадающую с ядром гомоморфизма возведения в $(p-1)/2$-ую степень $\mathbb{F}_p^* \xrightarrow{x \mapsto x^{(p-1)/2}} \{\pm 1\}$. Поэтому произведение двух неквадратов будет квадратом, и умножением на подходящий квадрат любой ненулевой элемент поля можно превратить либо в единицу, либо в какой-нибудь заданный неквадрат, который мы раз и навсегда зафиксируем и обозначим через $\varepsilon \in \mathbb{F}_p^* \smallsetminus \mathbb{F}_p^{*2}$. Таким образом, невырожденные квадратичные формы от одной переменной с точностью до изоморфизма исчерпываются анизотропными формами x^2 и εx^2.

Невырожденная квадратичная форма от двух переменных $ax_1^2 + bx_2^2$ принимает все значения $c \in \mathbb{F}_p$. Действительно, когда x_1 и x_2 независимо друг от друга пробегают $\mathbb{F}_p$ (включая нуль), множества $\{a\,x_1^2\}$ и $\{c - b\,x_2^2\}$ получаются содержащими по $(p+1)/2$ элементов, т. е. пересекаются, и любой элемент из их пересечения будет решать уравнение $ax_1^2 + bx_2^2 = c$. Из этого вытекает, что для любой невырожденной формы β размерности $\geqslant 2$ найдётся вектор e с $\beta(e,e) = 1$, а у любой невырожденной формы $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + \cdots$ размерности $\geqslant 3$ есть (ненулевой) изотропный вектор — например, $(\alpha_1, \alpha_2, 1, 0, \dots)$ с $a\alpha_1^2 + b\alpha_2^2 = -c$. Тем самым, анизотропные формы над полем $\mathbb{F}_p$ могут быть только в размерностях 1 и 2, и в размерности 2 всякая невырожденная форма невырожденным линейным преобразованием приводится либо к виду $x_1^2 + x_2^2$, либо к виду $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$, которые не изоморфны друг другу, т. к. отношение их определителей Грама не квадрат. Согласно примеру (n° 7.7.4) форма $x_1^2 + x_2^2$ гиперболична тогда и только тогда, когда -1 является квадратом в $\mathbb{F}_p$, что равносильно условию $(-1)^{(p-1)/2} = 1$ и происходит при $p \equiv 1 \pmod 4$. При $p \equiv -1 \pmod 4$ форма $x_1^2 + x_2^2$ анизотропна. По тем же причинам форма $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$, наоборот, анизотропна при $p \equiv 1 \pmod 4$ и гиперболична при $p \equiv -1 \pmod 4$.

Итак, невырожденная квадратичная форма над полем $\mathbb{F}_p$ (от любого числа переменных) является либо гиперболической, либо ортогональной прямой суммой гиперболической формы и одной из следующих анизотропных форм от одной или двух переменных:

$$x^2\,, \quad \varepsilon x^2\,, \quad x_1^2 + x_2^2 \quad (\text{при } p = 4k+3)\,, \quad \varepsilon x_1^2 + x_2^2 \quad (\text{при } p = 4k+1)\,.$$

Упражнение 7.18. Докажите, что любая невырожденная симметричная форма над $\mathbb{F}_p$ приводится либо к виду $\sum x_i^2$ либо к виду $\varepsilon\, x_1^2 + \sum\limits_{i \geqslant 2} x_i^2$, и эти две формы не изоморфны друг другу.