# §6. Евклидова геометрия: матрицы Грама, ортогональные проекции, расстояния, углы и объёмы.

**6.1. Матрицы Грама.** С любым набором векторов $v_1, v_2, \dots, v_m$ евклидова векторного пространства $V$ можно связать «таблицу умножения» — квадратную матрицу попарных скалярных произведений

$$G_{(v_1,v_2,\dots,v_m)} = ((v_i, v_j)) \ .$$

Она называется *матрицей Грама* векторов $v_1, v_2, \dots, v_m$. Если один набор векторов линейно выражается через другой

$$(v_1, v_2, \dots, v_m) = (w_1, w_2, \dots, w_k) \cdot C_{wv}$$

где $C_{wv} \in \mathrm{Mat}_{k\times m}(\mathbb{R})$ — прямоугольная матрица, в $i$-том столбце которой стоят коэффициенты линейного выражения вектора $v_i$ через векторы $w_1, w_2, \dots, w_k$, то матрица Грама $G_v$ набора $\{v_i\}$ пересчитывается через матрицу Грама $G_w$ набора $\{w_i\}$ по формуле

$$G_v = C_{wv}^t G_w C_{wv} \ , \tag{6-1}$$

где $C_{wv}^t$ обозначает матрицу, транспонированную к $C_{wv}$. В самом деле,

$$(v_i, v_j) = \Big(\sum_\alpha c_{\alpha i} w_\alpha \, , \, \sum_\beta c_{\beta j} w_\beta\Big) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha i} \cdot (w_\alpha, w_\beta) \cdot c_{\beta j} = \ = \sum_\alpha c_{i\alpha}^t \cdot \sum_\beta (w_\alpha, w_\beta) \cdot c_{\beta j} \ .$$

Определитель матрицы Грама набора векторов обычно называют *определителем Грама* этих векторов. Отметим, что ортонормальный набор векторов имеет единичную матрицу Грама и единичный определитель Грама.

**6.1.1.** ЛЕММА. *Определитель Грама любого набора векторов неотрицателен, и его обращение в нуль равносильно линейной зависимости этих векторов.*

Доказательство. Если один из векторов набора $v_1, v_2, \dots, v_n$ линейно выражается через остальные, скажем,

$$v_1 = \sum_{\nu \geqslant 2} \lambda_\nu v_\nu \ ,$$

то $(v_1, v_k) = \sum\limits_{\nu\geqslant 2} \lambda_\nu (e_\nu, e_k)$ при всех $k$, т. е. первая строка матрицы Грама является линейной комбинацией остальных строк. Стало быть, $\det G_v = 0$.

Если векторы $v_i$ линейно независимы, то они образуют базис в своей линейной оболочке $W \subset V$. Выбирая в пространстве $W$ ортонормальный базис $e_1, e_2, \dots, e_m$ с единичной матрицей Грама $G_e = E$, будем иметь $(v_1, v_2, \dots, v_m) = (e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot C_{ev}$, где $C_{ev}$ — матрица перехода, и по (6-1) получаем $\det G_v = \det G_e \cdot \det C_{ev}^2 = \det C_{ev}^2 > 0$. □

**6.1.2.** Пример: неравенство Коши – Буняковского – Шварца. Для набора из двух векторов $v, w \in V$ неравенство

$$\det \begin{pmatrix} (v,v) & (v,w) \\ (w,v) & (w,w) \end{pmatrix} \geqslant 0$$

из леммы (n° 6.1.1) означает, что $(v,v) \cdot (w,w) \geqslant (v,w)^2$, причём равенство равносильно тому, что $v$ и $w$ пропорциональны. Если переписать это неравенство в терминах координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ векторов $v$ и $w$ относительно какого-нибудь ортонормального базиса объемлющего пространства, мы получим *неравенство Коши* $(x_1^2 + x_2^2 + \ \cdots \ + x_n^2)(y_1^2 + y_1^2 + \ \cdots \ + y_n^2) \geqslant (x_1y_1 + x_1y_1 + \ \cdots + x_ny_n)^2$, которое справедливо для любых двух наборов вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ и обращается в равенство тогда и только тогда, когда эти наборы пропорциональны. Если же в качестве $V$ взять пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) \, dx \ , \tag{6-2}$$

то мы получим для любых двух непрерывных функций $f$ и $g$ *неравенство Шварца*:

$$\left(\int f^2(x)\,dx\right)\cdot\left(\int g^2(x)\,dx\right)\geqslant\left(\int f(x)g(x)\,dx\right)^2 .$$

Упражнение 6.1. Проверьте, что формула (6-2) действительно задаёт евклидову структуру на пространстве непрерывных функций на отрезке $[a,b]$.

**6.2. Двойственность.** Напомним, что у каждого векторного пространства $V$ (над произвольным полем $\mathbb{F}$) имеется двойственное векторное пространство, образованное линейными отображениями из $V$ в основное поле[1]:

$$V^*\stackrel{\text{def}}{=}\operatorname{Hom}(V,\mathbb{F})=\{V\xrightarrow{\varphi}\mathbb{F}\mid\varphi(\alpha v+\beta w)=\alpha\varphi(v)+\beta\varphi(w)\ \forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{F},\ \forall\ v,w\in V\}\ .$$

Если выбрать в пространстве $V$ какой-нибудь базис $E=\{e_i\}$, то каждая линейная форма $\varphi\in V^*$ будет однозначно определяться множеством своих значений $\{\varphi(e_i)\}$ на базисных векторах. В самом деле, если $v=\sum x_ie_i$, то по линейности $\varphi(v)=\sum x_i\varphi_i$ . Иными словами, пространство $V^*$ изоморфно пространству (произвольных теоретикомножественных) функций $E\longrightarrow\mathbb{F}$ на множестве базисных векторов со значениями в поле $\mathbb{F}$.

Если $V$ конечномерно, и $E=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$, то пространство функций $E\longrightarrow\mathbb{F}$ также конечномерно, и в качестве базиса в нём можно взять базис $e_1^*,e_2^*,\dots,e_n^*$ из $\delta$-функций $E\xrightarrow{e_i^*}\mathbb{F}$, определяемых правилом

$$e_i^*(e_j)=\begin{cases}0, & \text{при } i\neq j\ ,\\ 1, & \text{при } i=j\ .\end{cases}\tag{6-3}$$

Возникающий таким образом базис пространства $V^*$ называется *двойственным* к исходному базису пространства $V$. Линейная форма $V\xrightarrow{e_i^*}\mathbb{F}$ из двойственного базиса переводят вектор

$$v=\sum_{\alpha=1}^{n}x_\alpha\cdot e_\alpha\in V$$

в число $e_i^*(v)=\sum\limits_{\alpha=1}^{n}x_\alpha\cdot e_i^*(e_\alpha)=x_i$, равное значению $i$-той координаты вектора $v$ в исходном базисе пространства $V$. Разложение произвольной формы $\varphi\in V^*$ по базису $e_1^*,e_2^*,\dots,e_n^*$ имеет в качестве коэффициентов значения $\varphi(e_i)$ формы $\varphi$ на базисных векторах $e_i$:

$$\varphi=\sum_{\alpha=1}^{n}\varphi(e_i)\cdot e_i^*\ .\tag{6-4}$$

Для проверки этой формулы достаточно убедиться в том, что линейные функционалы, стоящие в левой и правой части, принимают одинаковые значения на любом векторе $v\in V$. Для этого, в свою очередь, достаточно проверить совпадение значений левой и правой части на любом базисном векторе $v=e_j$, что очевидно из соотношений (6-3).

Если $V$ бесконечномерно, то $V^*$ имеет строго большую, чем $V$, «размерность» в том смысле, что мощность любого базиса[2] пространства функций $E\longrightarrow\mathbb{F}$ строго больше, чем мощность самого множества $E$.

Упражнение 6.2$^*$. Докажите это.

Например, в пространстве многочленов с рациональными коэффициентами $V=\mathbb{Q}[x]$ имеется счётный базис $E$, состоящий из одночленов $e_i=x^i$ , $i=0,\,1,\,2,\,\dots$. Пространство функций

[1]такие отображения обычно называют *линейными формами* или *линейными функционалами* на $V$, а также *ковекторами*

[2]напомним, что базисом векторного пространства $V$ называется множество векторов, обладающее следующим свойством: любой вектор пространства *единственным* образом выражается в виде *конечной* линейной комбинации базисных

$E \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q}$ изоморфно пространству последовательностей рациональных чисел $\varphi_i = \varphi(e_i)$, которое можно отождествить с пространством степенных рядов $\mathbb{Q}[[t]]$, сопоставляя последовательности $\varphi_i$ её производящую функцию $\varphi(t) = \sum \varphi_i t^i$. В этих обозначениях результатом применения бесконечного ряда $\varphi(t) = \sum \varphi_i t^i \in \mathbb{Q}[[t]] = V^*$ к многочлену $f(x) = \sum a_i x^i \in \mathbb{Q}[x] = V$ будет сумма $\sum a_i \varphi_i$ , которая конечна, поскольку у любого многочлена отлично от нуля лишь конечное число коэффициентов $a_i$.

Упражнение 6.3. Покажите, что пространство $V = \mathbb{Q}[x]$ счётно, а пространство $V^* = \mathbb{Q}[[t]]$ несчётно и не обладает счётным базисом.

**6.2.1. Каноническое вложение $V \longrightarrow V^{**}$.** Пространство $V^{**}$, двойственное пространству $V^*$, содержит исходное пространство $V$ в качестве подпространства. А именно, каждому вектору $v \in V$ отвечает линейный *функционал вычисления*

$$\mathrm{ev}_v : V^* \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi(v)} \mathbb{F} ,$$

переводящий линейное отображение $V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{F}$ из $V^*$ в число, равное значению этого отображения на векторе $v$.

Упражнение 6.4. Проверьте, что отображение $\mathrm{ev}_v : V^* \longrightarrow \mathbb{F}$ линейно и линейно зависит от $v \in V$, а также что построенное таким образом линейное отображение $V \xrightarrow{v \mapsto \mathrm{ev}_v} V^{**}$ инъективно.

Если пространство $V$ конечномерно, то из совпадения размерностей $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$ мы заключаем, что пространство $V$ *канонически изоморфно* пространству $V^{**}$. Иными словами, отношение двойственности разбивает все конечномерные пространства на пары двойственных друг другу.

Упражнение 6.5. Покажите, что если в пространстве $V$ зафиксировать базис $\{e_i\}$, то при каноническом изоморфизме $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ он перейдёт в базис, двойственный к двойственному базису $\{e_i^*\}$ пространства $V^*$.

В бесконечномерном случае каноническое вложение $V \hookrightarrow V^{**}$ является строгим.

**6.2.2. Изоморфизм $V \longrightarrow V^*$, доставляемый евклидовой структурой.** Для евклидова пространства $V$ имеется каноническое линейное отображение

$$G : V \xrightarrow{v \mapsto (\,*\,,v)} V^* , \tag{6-5}$$

переводящее вектор $v$ в линейную форму $G_v \in V^*$, заданную правилом $G_v(w) = (w, v)$. Отображение $G$ инъективно: при $v \neq 0$ функционал $G_v \in V^*$ ненулевой, поскольку $G_v(v) = (v, v) \neq 0$. Поэтому для конечномерного пространства $V$ отображение $V \xrightarrow{G} V^*$ является изоморфизмом векторных пространств.

Матрица $G_{e_1,e_2,\dots,e_n}$ отображения $G$ в произвольно заданном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства $V$ и двойственном ему базисе $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ пространства $V^*$ есть не что иное, как матрица Грама векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$. В самом деле, значение линейной формы $G_{e_j}$ на базисном векторе $e_\alpha$ равно $(e_\alpha, e_j)$, и значит, коэффициенты разложения формы $G_{e_j}$ по двойственному базису $e_\alpha^*$, согласно (6-4), суть скалярные произведения $(e_\alpha, e_j)$, стоящие в $j$-том столбце матрицы Грама векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Прообразы векторов двойственного базиса $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^* \in V^*$ при изоморфизме (6-5) — это такие векторы $e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee \in V$, что

$$(e_i^\vee, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j\,, \\ 1, & \text{при } i = j\,. \end{cases} \tag{6-6}$$

Базис $e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee$ называется *евклидово двойственным* к базису $e_1, e_2, \dots, e_n$. Координаты векторов двойственного базиса $e_i^\vee$ в исходном базисе $e_i$ суть столбцы матрицы $G_{e_1,e_2,\dots,e_n}^{-1}$, обратной к матрице Грама $G_{e_1,e_2,\dots,e_n}$ исходного базиса, т. е.

$$(e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot G_{e_1,e_2,\dots,e_n}^{-1} . \tag{6-7}$$

Упражнение 6.6. Проверьте это, и покажите, что $e_i^{\vee\vee} = e_i$.

Отметим, евклидово двойственным к ортонормальному базису будет он сам, а евклидово двойственным к ортогональному базису $\{e_i\}$ будет базис из векторов $\{e_i/(e_i, e_i)\}$.

**6.3. Ортогональное проектирование.** Рассмотрим произвольные (возможно бесконечномерные) евклидово векторное пространство $V$ и его подпространство $U \subset V$. Мы собираемся для произвольно заданного вектора $v \in V$ определить его *ортогональную проекцию* $u = u(v) \in U$ на подпространство $U$. Эту проекцию можно описать тремя равносильными свойствами.

**6.3.1.** ЛЕММА. *Для произвольного вектора $v \in V$ и подпространства $U \subset V$ следующие три свойства вектора $u = u(v) \in U$ попарно равносильны друг другу:*

1) $v - u \in U^\perp$, т. е. $\forall\, w \in U\ (v - u, w) = 0$ ,
2) $\forall\, w \in U\ (v, w) = (u, w)$ ,
3) $\forall\, w \in U\ |v - u| \leqslant |v - w|$ *и равенство равносильно тому, что* $w = u$ .

*Этими свойствами вектор $u$ однозначно определяется по $v$ (если существует). Для конечномерного подпространства $U$ с базисом $e_1, e_2, \dots, e_k \in U$ вектор $u$, обладающий свойствами* (1)-(3) *всегда существует и равен*

$$\begin{gathered} u(v) = \sum_{i=1}^{k} (v, e_i^\vee) \cdot e_i\ , \quad \text{где} \\ (e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot G_{e_1, e_2, \dots, e_n}^{-1}\ . \end{gathered} \tag{6-8}$$

Доказательство. Равносильность условий (1) и (2), т. е. выполнения $\forall\, w \in U$ равенств $(v - u, w) = 0$ и $(v, w) = (u, w)$ очевидна. Покажем, что (1) $\iff$ (3). Если $v - u$ ортогонален любому вектору $u - w \in U$, то

$$\begin{aligned} |v - w|^2 = (v - w, v - w) = \big(\,(v - u) + (u - w)\,,\, (v - u) + (u - w)\,\big) = \\ = (v - u, v - u) + (u - w, u - w) = |v - u|^2 + |u - w|^2 \geqslant |v - u|^2 \end{aligned}$$

и равенство равносильно тому, что $u = w$. Наоборот, если в $U$ существует вектор $w_0$ с $(v - u, w_0) = b \neq 0$, то беря в предыдущем вычислении в качестве $w$ векторы $w_t = u + tw_0$, где $t \in \mathbb{R}$, мы получим

$$\begin{aligned} |v - w_t|^2 = (v - w_t, v - w_t) = \big(\,(v - u) + tw_0\,,\, (v - u) + tw_0\,\big) = \\ = (v - u, v - u) + (w_0, w_0) \cdot t^2 + 2(v - u, w_0) \cdot t = |v - u|^2 + |w_0|^2 t^2 + 2bt\ . \end{aligned}$$

Функция $f(t) = |w_0|^2 t^2 + 2bt$ при $t = 0$ обращается в нуль и имеет ненулевую производную $f'(0) = 2b$. Поэтому вблизи нуля найдутся $t$, для которых $f(t) < 0$, и для таких $t$ мы будем иметь $|v - w_t|^2 < |v - u|^2$.

Очевидно, что условие (3) определяет вектор $u$ однозначно. Для доказательства того, что для конечномерного $U$ с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ формула (6-8) задаёт вектор $u$ с требуемыми свойствами, достаточно проверить для этого $u$ свойство (2). Условие $(v, w) = (u, w)$ линейно по $w$, и его достаточно проверить для всех базисных векторов какого-нибудь базиса пространства $U$. Возьмём в качестве такового евклидово двойственный к базису $e_i$ базис $e_j^\vee$, задаваемый условиями (6-6) и выражающийся через исходный базис $e_i$ по формуле (6-7). Равенство $(v, e_j^\vee) = (u, e_j^\vee) = \sum\limits_i (v, e_i^\vee)(e_i, e_j^\vee)$ немедленно вытекает из (6-6). □

**6.3.2.** СЛЕДСТВИЕ. *Для любого конечномерного подпространства $U$ произвольного евклидова пространства $V$ имеется разложение в прямую сумму $V = U \oplus U^\perp$. Проекция $V$ на $U$ вдоль $U^\perp$ сопоставляет каждому вектору $v \in V$ вектор $u(v) \in U$, определённый формулой* (6-8).

Доказательство. В самом деле, $U \cap U^\perp = 0$, поскольку для $v \in U \cap U^\perp$ выполнено равенство $(v, v) = 0$. С другой стороны, $V = U + U^\perp$, поскольку каждый вектор $v \in V$ представим в виде суммы

$$v = u(v) + (v - u(v))\ ,$$

в которой $u(v) \in U$ вычисляется по формуле (6-8), а $(v - u(v)) \in U^\perp$ согласно предыдущей лемме. □

**6.3.3.** Пример: ещё раз об ортогонализации. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта, перерабатывающий произвольный базис $v_1, v_2, \dots, v_n$ конечномерного пространства $V$ в ортогональный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, имеющий $e_1 = v_1$, заменяет для каждого $k = 1, 2, \dots$ вектор $v_{k+1}$ на вектор

$$e_{k+1} = v_{k+1} - u_{k+1}\ ,$$

перпендикулярный пространству $U_k$, натянутому на $v_1, v_2, \dots, v_k$. Тем самым, $u_{k+1}$ является ортогональной проекцией $v_{k+1}$ на $U_k$ и выражается через уже построенный ортогональный базис $e_1, e_2, \dots, e_k$ этого пространства по формуле (6-8), в которой $e_i^\vee = e_i/(e_i, e_i)$ :

$$u_{k+1} = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{(v_{k+1}, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)} \cdot e_\alpha \,.$$

**6.4. Евклидова геометрия.** Длина вектора и угол между двумя векторами определяются в произвольном евклидовом векторном пространстве формулами[1]:

$$|v| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v,v)} \tag{6-9}$$

$$\cos(\widehat{vw}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(v,w)}{|v| \cdot |w|} \tag{6-10}$$

Помимо длин и углов в $n$-мерном евклидовом пространстве имеется понятие евклидова (неориентированного) объёма $n$-мерного параллелепипеда. Напомним, что форма ориентированного объёма параллелепипеда, натянутого на $n$ векторов пространства $\mathbb{R}^n$, единственна с точностью до пропорциональности и однозначно фиксируется указанием какого-нибудь эталонного базиса, объём которого берётся за 1. В евклидовом пространстве в качестве эталонного базиса выбирают *ортонормированный* базис. Любые два ортонормированных базиса $e_i$ и $e_i'$ связаны матрицей перехода

$$(e_1', e_2', \dots, e_n') = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C \ ,$$

которая в силу правила преобразования матриц Грама (6-1) удовлетворяет соотношению

$$C^t \cdot C = E \,. \tag{6-11}$$

Матрицы $C$, удовлетворяющие этому условию, называются *ортогональными*. Ясно, что у любой ортогональной матрицы $\det C = \pm 1$, а значит, ориентированные объёмы всех ортонормальных базисов одинаковы с точностью до знака. Ортонормальные базисы, имеющие одинаковый ориентированный объём, называются *одинаково ориентированными*, а базисы, ориентированный объём которых противоположен по знаку, называются *противоположно ориентированными*. В любом случае, абсолютная величина объёма не зависит от выбора эталонного ортонормированного базиса, и под *евклидовым объёмом* мы будем понимать именно эту абсолютную величину

$$\mathrm{vol}(v_1, v_2, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} |\det C_{ev}|$$

где $C_{ev}$ — матрица, в $i$-том столбце которой стоят координаты вектора $v_i$ в произвольно зафиксированном ортонормальном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

**6.4.1.** ЛЕММА. $\mathrm{vol}^2(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det G_{v_1, v_2, \dots, v_n}$.

Доказательство. Если векторы линейно зависимы, то и объём и определитель Грама нулевые. Если

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot C_{ev} \ ,$$

где $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ образуют ортонормальный базис, а $C_{ev}$ — матрица перехода, то

$$\mathrm{vol}^2(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det C_{ev}^2 = \det G_{(v_1, v_2, \dots, v_n)}$$

поскольку $G_{v_1, v_2, \dots, v_n} = C^t \cdot E \cdot C$. □

Упражнение 6.7. Докажите, что евклидов объём $n$-мерного параллелепипеда равен произведению $(n-1)$-мерного евклидова объёма произвольной его $(n-1)$-мерной грани на длину опущенной на эту грань высоты.

[1] корректность второго определения (принадлежность правой части формулы (6-10) отрезку $[-1, 1]$) вытекает из неравенства Коши – Буняковского – Шварца (n° 6.1.2)

Упражнение 6.8. Докажите, что кратчайшее расстояние от конца вектора $v$ до подпространства с базисом $u_1, u_2, \dots, u_k$ равно отношению определителей Грама $\det G_{v,u_1,u_2,\dots,u_k} / \det G_{u_1,u_2,\dots,u_k}$.

**6.4.2.** Пример: угол между вектором и подпространством. Определим угол между вектором $v$ и конечномерным подпространствами $U$ евклидова пространства $V$ как наименьший из углов $\widehat{vw}$ со всевозможными ненулевыми $w \in U$. Если $v$ перпендикулярен $U$, то $\widehat{vw} = \pi/2$ для всех $w \in U$. Покажем, что для $v \notin U^\perp$ в пространстве $U$ существует единственный с точностью до пропорциональности вектор $u = u(v)$ — а именно ортогональная проекция $v$ на $U$ — на котором $\widehat{vu}$ принимает наименьшее из своих значений. Наименьшему значению угла $\widehat{vw}$ отвечает наибольшее значение $\cos(\widehat{vw}) = (v,w)/(|v| \cdot |w|)$, а значит, наибольшее значение отношения $(v,w)^2/(w,w)$. Согласно лемме (n° 6.3.1) $(v,w) = (u,w)$, где $u \in U$ — ортогональная проекция вектора $v$ на подпространство $U$. Тем самым, в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца (n° 6.1.2) $(v,w)^2/(w,w) = (u,w)^2/(w,w) \leqslant (u,u)$, и равенство достигается в точности при $w$ пропорциональном $u$. Тем самым, косинус угла между вектором $v$ и подпространством $U$ — это косинус угла между вектором $v$ и его ортогональной проекцией $u$ на подпространство $U$, и равен он $|u|/|v|$.

**6.5. Ортогональные операторы.** Линейный оператор $V \xrightarrow{f} V$ на евклидовом пространстве $V$ называется *ортогональным* или *изометрическим*, если он сохраняет длины всех векторов, т. е. если $\forall v \in V \ |f(v)| = |v|$. Из этого условия вытекает, что ортогональный оператор сохраняет и любые скалярные произведения, т. е.

$$\forall\, v, w, \in V \quad (f(v), f(w)) = (v, w)\,.$$

Это немедленно вытекает из следующей задачи:

Упражнение 6.9. Докажите $\forall\, v, w, \in V$ формулы $2 \cdot (v,w) = |v+w|^2 - |v|^2 - |w|^2 = (|v+w|^2 - |v-w|^2)/2$ (решение чуть более общей задачи будет дано в (n° 7.6)).

Из сохранения скалярных произведений, в свою очередь, следует, что ортогональный оператор сохраняет не только длины векторов, но и углы между ними, и переводит ортонормальные базисы в ортонормальные базисы. Наоборот, если оператор $f$ переводит какой-нибудь ортонормальный базис в ортонормальный же базис, то он сохраняет скалярные произведения векторов, а значит, является ортогональным. Таким образом, если оператор $f$ имеет в некотором ортонормальном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ матрицу $F$, т. е.

$$(f(e_1),\, f(e_2),\, \dots\, ,\, f(e_n)) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot F\,,$$

то для ортогональности оператора $f$ необходимо и достаточно, чтобы матрица $F$ была ортогональна, т. е. удовлетворяла соотношению $F^t \cdot F = E$ (это следует из правила пересчёта матриц Грама точно так же, как в (6-11)). В частности, ортогональный оператор всегда обратим, причём матрица обратного оператора (в том же ортонормальном базисе) получается транспонированием матрицы самого оператора.

**6.5.1.** ТЕОРЕМА. *Конечномерное евклидово пространство $V$, на котором действует ортогональный оператор $V \xrightarrow{f} V$, раскладывается в прямую ортогональную сумму одномерных и двумерных инвариантных подпространств оператора $f$. При этом на одномерных инвариантных подпространствах оператор $f$ действует либо тождественно, либо умножением на $-1$, а на двумерных инвариантных подпространствах, не распадающихся в прямую ортогональную сумму двух одномерных инвариантных подпространств, оператор $f$ действует поворотом, т. е. задаётся в подходящем ортонормальном базисе матрицей $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ с некоторым $\varphi \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Первое утверждение доказывается индукцией по $\dim V$. Всякий линейный оператор, действующий на вещественном векторном пространстве $V$ обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством. Пусть $U$ — такое подпространство для оператора $f$. Тогда $V = U \oplus U^\perp$ согласно следствию (n° 6.3.2). Покажем, что $f(U^\perp) \subset U^\perp$, т. е. что $U^\perp$ тоже инвариантно. В самом деле, условие $w \in U^\perp$ означает, что $(w,u) = 0$ для всех $u \in U$. Поскольку $f$ обратим, $\ker(f) = 0$, а стало быть, ограничение $f$ на пространство $U$ является изоморфизмом $U$ с собой. В частности, $f^{-1}(u) \in U \ \forall u \in U$. Поэтому $\forall u \in U$ и $\forall w \in U^\perp$ мы имеем равенства $(f(w), u) = \big(f(w), f(f^{-1}(u))\big) = (w, f^{-1}(u)) = 0$, показывающие, что $f(w) \in U^{\perp}$. Итак, $V$ распалось в прямую ортогональную сумму инвариантных подпространств $U$ и $U^{\perp}$ с $\dim U$ равной 1 или 2, и $\dim U^{\perp} < \dim V$, так что к $U^{\perp}$ применимо индуктивное предположение.

Действие $f$ на одномерном инвариантном подпространстве с базисным вектором $e$ состоит в умножении $e$ на некоторое число $\lambda$. Поскольку $(e,e) = (f(e), f(e)) = (\lambda e, \lambda e) = \lambda^2(e,e)$, мы заключаем, что $\lambda^2 = 1$, откуда $\lambda = \pm 1$.

Действие $f$ на двумерном инвариантном подпространстве в произвольном ортонормальном базисе $e_1, e_2$ этого пространства задаётся ортогональной матрицей

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Условие ортогональности $F^t F = E$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

Решения первых двух уравнений описываются формулами $a = \cos\varphi$, $c = \sin\varphi$, $b = \sin\psi$, $d = \cos\psi$. Третье уравнение накладывает на углы $\varphi$ и $\psi$ соотношение $\sin(\psi + \varphi) = 0$, откуда, с точностью до целого числа оборотов, $\psi = \varphi$ или $\psi = \pi - \varphi$. В первом случае оператор задаётся матрицей $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ и является поворотом на угол $\varphi$. Во втором случае оператор задаётся матрицей $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ и является отражением относительно биссектрисы угла между $e_1$ и $f(e_1)$ (см. рис. 6◇1), т. е. рассматриваемая плоскость является в этом случае прямой ортогональной суммой двух одномерных собственных подпространств с собственными значениями $\pm 1$. □

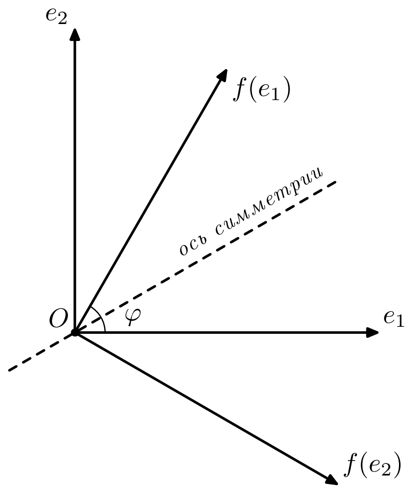


**Рис. 6◇1.** Композиция поворота с отражением является отражением.

**6.5.2. Пример: евклидовы изометрии трёхмерного пространства.** Согласно предыдущей лемме ($\text{n}^\circ$ 6.5.1) всякий ортогональный оператор на трёхмерном евклидовом пространстве в подходящем базисе задаётся матрицей вида $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ (разложению пространства в сумму трёх одномерных собственных подпространств с собственными значениями $\pm 1$ отвечают углы поворота $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$). Значению $+1$ в правом нижнем углу отвечает поворот на угол $\varphi$ вокруг оси $e_3$ (это собственное движение), а значению $-1$ — композиция такого поворота с отражением в плоскости, натянутой на $e_1$, $e_2$.

Таким образом, всякое движение трёхмерного евклидова пространства, оставляющее на месте данную точку $O$, является поворотом вокруг некоторой проходящей через $O$ прямой, если это движение собственное, или композицией такого поворота с отражением в проходящей через $O$ плоскости, перпендикулярной оси поворота, если это движение несобственное. Этот результат известен как *теорема Эйлера*.

Группа собственных движений трёхмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, оставляющих на месте начало координат, называется *специальной ортогональной группой* ранга 3 и обозначается $\mathrm{SO}(3)$. Если изображать поворот вокруг оси, проходящей вдоль вектора $n$ единичной длины, вектором $\varphi \cdot n$, где $\varphi \in [0, \pi]$ — угол этого поворота, исчисляемый против часовой стрелки, если смотреть из начала координат вдоль вектора $n$, то мы получим соответствие между элементами группы $\mathrm{SO}(3)$ и точками шара радиуса $\pi$ с центром в начале координат. Это соответствие взаимно однозначно во всех внутренних точках шара и двулистно на его границе: каждым двум диаметрально противоположным точкам границы будет соответствовать один и тот же поворот на угол $\pi$ вокруг оси, проходящей через эти две точки. Таким образом, $\mathrm{SO}(3)$ как топологическое пространство[1] гомеоморфно трёхмерному шару с отождествлёнными противоположными точками ограничивающей шар сферы, т. е. вещественному проективному пространству $\mathbb{RP}_3$. В частности, в $\mathrm{SO}(3)$ имеются нестягиваемые петли[2], квадрат которых стягиваем.

[1] с естественной топологией, в которой близкими считаются повороты на близкие углы вокруг близких осей

[2] непрерывно зависящие от времени $t \in [0, 1]$ семейства поворотов, начинающиеся и заканчивающиеся тождественным отображением