§1. Эрмитова геометрия.

1.1. Эрмитова структура. Векторное пространство W над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется *эрмитовым* (или *унитарным*), если на нём задано билинейное относительно умножения на вещественные числа $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ скалярное произведение

$$W \times W \xrightarrow{w_1, w_2 \mapsto (w_1, w_2)} \mathbb{C} \,, \tag{1-1}$$

которое обладает следующими свойствами, справедливыми $\forall\, w_1, w_2 \in W$ и $\forall\, z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (w_1, w_2) &= \overline{(w_2, w_1)} && \text{(эрмитова симметричность)} \\ (z\, w_1, w_2) &= z\,(w_1, w_2) = (w_1, \overline{z}\, w_2) && \text{(полуторалинейность)} \\ (w, w) &> 0 \quad \forall\, w \neq 0 && \text{(положительность)} \end{aligned} \tag{1-2}$$

(в силу эрмитовой симметричности $\forall\, w \in W\ (w, w) = \overline{(w, w)} \in \mathbb{R}$, так что неравенство в третьем свойстве имеет смысл).

Произведение (1-1) называется *эрмитовой* (или *унитарной*) *структурой* на W.

1.1.1. Длины векторов. Вещественность и положительность скалярных квадратов ненулевых векторов позволяет, как и в евклидовой геометрии, определить *эрмитову норму* (или *длину* векторов $w \in W$ формулой[1]

$$||w|| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(w, w)} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \,. \tag{1-3}$$

Отметим, что норма любого ненулевого вектора строго положительна, и $||w|| = 0 \Rightarrow w = 0$.

Эрмитова структура однозначно восстанавливается по эрмитовой норме в силу равенств

$$\begin{aligned} (w_1 + w_2, w_1 + w_2) &= ||w_1||^2 + ||w_2||^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(w_1, w_2) \\ (w_1 + i w_2, w_1 + i w_2) &= ||w_1||^2 + ||w_2||^2 - 2i\,\mathrm{Im}\,(w_1, w_2) \,, \end{aligned}$$

из которых вытекает, что

$$2(w_1, w_2) = ||w_1 + w_2||^2 - ||w_1 + i w_2||^2 \,. \tag{1-4}$$

1.1.2. Матрицы Грама. На матричном языке эрмитова симметричность скалярного произведения означает, что матрица Грама $G = G_{w_1, w_2, \dots, w_m} = ((w_i, w_j))$ любого набора векторов $w_1, w_2, \dots, w_m \in W$ является *эрмитово симметричной*, т. е. сопрягается при транспонировании:

$$G^t = \overline{G} \,.$$

При линейной замене векторов $(w_1, w_2, \dots, w_m) = (v_1, v_2, \dots, v_k) \cdot C_{vw}$ матрица Грама, ввиду антилинейности произведения (1-1) по второму аргументу, меняется по правилу

$$G_w = C_{vw}^t \cdot G_v \cdot \overline{C}_{vw} \,.$$

1.1.3. Ортогонализация Грама – Шмидта. Как и в евклидовом случае, из произвольного базиса $\{w_i\}$ эрмитова пространства W можно изготовить в *ортонормальный* базис $\{e_i\}$ с единичной матрицей Грама, так чтобы для каждого $k = 1, 2\ \dots, n$ линейная оболочка первых k базисных векторов в обоих базисах была одинакова. Векторы e_i такого ортонормального базиса находятся по рекурсивным формулам

$$e_1 = w_1 / \sqrt{(w_1, w_1)} \tag{1-5}$$

$$e_m = u_m / \sqrt{(u_m, u_m)} \,, \quad \text{где} \quad u_m = w_m - \sum_{\nu=1}^{m-1} (w_m, e_\nu) \qquad (\text{при } m \geqslant 2) \tag{1-6}$$

[1] мы используем обозначение $||w||$, чтобы отличать нормы *векторов* $w \in W$ от модулей комплексных *чисел* $z \in \mathbb{C}$ которые будем обозначать, как и раньше, через $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

Упражнение 1.1. Проверьте, что $e_1, e_2, \ldots, e_n$ действительно обладает требуемыми свойствами.

1.2. Определители Грама. Из существования ортонормальных базисов вытекает, что определитель Грама любого линейно независимого набора векторов w_i является *вещественным положительным числом*. В самом деле, обозначая через C_{ew} квадратную матрицу, в столбцах которой стоят координаты векторов w_i относительно какого-нибудь ортонормального базиса e_i в их линейной оболочке, мы получим

$$\det G_w = \det C_{ew}^t \det G_e \det \overline{C}_{ew} = \det C \cdot \det E \cdot \overline{\det C} = |\det C|^2 \in \mathbb{R}_{>0}\,.$$

Упражнение 1.2. Проверьте, что определитель Грама линейно зависимого набора векторов равен нулю.

1.2.1. Неравенство КБШ и неравкенство треугольника. Для двух векторов v, w положительность определителя Грама

$$\det\begin{pmatrix} (v,v) & (v,w) \\ (w,v) & (w,w) \end{pmatrix} = ||v||^2||w||^2 - (v,w)\cdot\overline{(v,w)} \geqslant 0$$

даёт эрмитову версию неравенства Коши – Буняковского – Шварца[1]

$$|(v,w)| \leqslant ||v||\cdot||w||\,, \tag{1-7}$$

где равенство равносильно (комплексной) пропорциональности векторов v и w. Как и в евклидовом случае, из неравенства Коши – Буняковского – Шварца вытекает неравенство треугольника:

$$\forall\, w_1, w_2 \in W \quad ||w_1|| + ||w_2|| \geqslant ||w_1 + w_2||\,.$$

В самом деле: $||w_1+w_2||^2 = ||w_1||^2 + ||w_2||^2 + 2|(w_1,w_2)| \leqslant ||w_1||^2 + ||w_2||^2 + 2||w_1||\cdot||w_2||$.

1.2.2. Эрмитов объём. Выбирая произвольный ортонормальный базис $\{e_i\}$ в качестве базиса единичного объёма, мы можем корректно определить абсолютный (неориентированный) объём n-мерного параллелепипеда в n-мерном эрмитовом пространстве W по формуле

$$\mathrm{vol}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = |\det C|\,, \quad \text{где} \quad (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)\cdot C\,.$$

Поскольку модуль определителя матрицы перехода между ортонормальными базисами равен единице, такой объём не зависит от выбора эталонного ортонормального базиса, и квадрат объёма будет, как и в евклидовом случае, равен определителю Грама:

$$\mathrm{vol}^2(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \det((v_i, v_j))\,.$$

1.3. Унитарная группа (эрмитовы изометрии). Линейный оператор $W \xrightarrow{F} W$ на эрмитовом пространстве W называется *унитарным*, если он сохраняет эрмитову норму: $||Fw|| = ||w||$ $\forall\, w \in W$. Такие операторы образуют *унитарную группу* $\mathrm{U}(W)$. Согласно (1-4), каждый унитарный оператор автоматически сохраняет и скалярное произведение: $(Fv, Fw) = (v,w)\ \forall\, v,w \in W$, и потому его матрица в произвольном базисе связана с матрицей Грама этого базиса соотношением

$$F^t \cdot G \cdot \overline{F} = G\,. \tag{1-8}$$

Переходя к определителям, получаем $|\det F| = 1$. Таким образом, унитарный оператор F всегда обратим, и из (1-8) вытекает, что $F^{-1} = \overline{G}^{-1}\overline{F}^t\overline{G} = G^{t^{-1}}\overline{F}^t G^t$. В ортонормальном базисе эта формула редуцируется до $F^{-1} = \overline{F}^t$.

[1] обратите внимание, что в его левой части стоит *модуль* скалярного произведения, которое в эрмитовом случае является *комплексным* числом

Матрицы F размера $n \times n$, удовлетворяющие условию $F^{-1} = \overline{F}^t$, называются *унитарными* и образуют *группу унитарных матриц*

$$\mathrm{U}_n \overset{\text{def}}{=} \{F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid F^{-1} = \overline{F}^t\} .$$

Её подгруппа $\mathrm{SU}_n = \{F \in \mathrm{U}_n \mid \det F = 1\}$ называется *специальной* унитарной группой. Подчеркнём, что определитель произвольной унитарной матрицы вовсе не обязан равняться ± 1, как это было с евклидовыми изометриями, и может принимать любое значение на единичной окружности

$$\mathrm{U}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} = 1\} .$$

В силу этого обстоятельства в эрмитовом пространстве нет понятия *ориентации*, и эрмитовы изометрии не разбиваются на два несвязных класса.

Упражнение 1.3*. Покажите, что U_n является компактным связным подмножеством в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.
Поскольку ортогональное дополнение к инвариантному подпространству изометрического оператора также является инвариантным, собственные подпространства любого унитарного оператора составляют ортогональную прямую сумму, совпадающую со всем пространством. Мы получаем

1.3.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Всякий унитарный оператор диагонализуется в некотором ортонормальном базисе, причём диагональные элементы будут иметь единичный модуль.* □

1.4. Ортогональные проекторы. Для любого подпространства $U \subset W$ множество векторов

$$U^\perp = \{w \in W \mid (u,w) = 0 \;\; \forall u \in U\}$$

составляет подпространство, называемое *ортогоналом* к U. Покажем, что $V = U \oplus U^\perp$.

Для этого выберем в U ортонормальный базис $u_1, u_2, \dots, u_k$ и сопоставим каждому вектору $w \in W$ его *ортогональную проекцию* на U

$$u = u(w) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1} (w, u_\nu) \cdot u_\nu . \tag{1-9}$$

Поскольку для каждого базисного вектора $u_i \in U$ выполняется соотношение

$$(u_i, u) = \sum_{\nu=1}^{k} \overline{(w, u_\nu)} \cdot (u_i, u_\nu) = (u_i, w) ,$$

это же соотношение $(v,w) = (v,u)$ будет выполнено для всех векторов $v \in U$, и стало быть, $u - w \in U^\perp$. Таким образом, любой вектор $w \in W$ представляется в виде суммы $w = u + (u - w)$ с $u \in U$ и $u - w \in U^\perp$. Поскольку $U \cap U^\perp = \{v \in U \mid (v,v) = 0\} = 0$, сумма $U + U^\perp = V$ является прямой.

Отметим, что ортогональная проекция (1-9) не зависит от выбора базиса, поскольку может быть охарактеризована как проекция на U вдоль дополнительного к U подпространства $U^\perp$ (определение которого не использует выбор базиса). Иначе можно сказать, что вектор $u \in U$, такой что $(v,w) = (v,u)$ для всех v из U, определяется этим свойством *однозначно*, поскольку

$$\forall v \in U \;\; (v,w) = (v,u) \quad \Longleftrightarrow \quad w - u \in U^\perp ,$$

и тем самым u и $(w-u)$ суть компоненты разложения вектора w по U и $U^\perp$, которое единственно.

Ещё одна важная характеризация вектора (1-9) заключается в том, что он является *единственным ближайшим* к вектору w вектором пространства U. В самом деле, поскольку $w - u \in U^\perp$, для любого ненулевого $v \in U$ мы получим $||w - (u+v)||^2 = (\,(w-u) - v\,,\,(w-u) - v\,) = ||w-u||^2 + ||v||^2 \geqslant ||w-u||^2$, где равенство имеет место только при $v = 0$.

1.4.1. Пример: угол между комплексными прямыми. Разница между эрмитовой и евклидовой геометриями становится существенной при попытке определить *угол* между *комплексными* прямыми. Напомним (см. лекцию 6 модуля III), что в евклидовом случае угол $\varphi = \widehat{vw} \in [0, \pi]$ между вещественными прямыми, натянутыми на векторы v и w, определяется из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{(v,w)}{||v|| \cdot ||w||} = (\, v/||v||\, , \, w/||w||\,) \ , \tag{1-10}$$

правая часть которого в евклидовом случае вещественна и в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца лежит на $[-1, 1]$. На геометрическом языке, векторы $v/||v||$ и $w/||w||$ являются единичными направляющими векторами рассматриваемых прямых, и каждый из них определяется этим свойством однозначно с точностью до умножения на ± 1. Выбор этих знаков есть выбор одного из четырёх углов, на которые разбивается нашими прямыми натянутая на них вещественная плоскость.

В комплексном случае правая часть (1-10) является *комплексным числом*. Каждая из «прямых» $\mathbb{C} \cdot v$, $\mathbb{C} \cdot w$ представляет собою двумерную вещественную плоскость. Эти две плоскости пересекаются только по нулю, и на них натянуто четырёхмерное вещественное пространство $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C} \cdot v \oplus \mathbb{C} \cdot w$, которое *не разбивается* этими плоскостями ни на какие связные компоненты. Наконец, на каждой из «прямых» $\mathbb{C} \cdot v$, $\mathbb{C} \cdot w$ имеется целая окружность базисных векторов единичной длины. Эти две окружности не пересекаются и лежат на компактной трёхмерной сфере векторов единичной длины

$$S^3 = \{\, u \in \mathbb{R}^4 = \mathbb{C} \cdot v \oplus \mathbb{C} \cdot w \, : \, ||u|| = 1 \,\} \, .$$

Таким образом, длины дуг, высекаемых на этой сфере всевозможными вещественными двумерными подпространствами и соединяющих точку на одной из окружностей с точкой на другой, ограничены снизу и достигают своего минимального значения. Иначе говоря, угол между вещественными прямыми $\mathbb{R} \cdot e_1$ и $\mathbb{R} \cdot e_2$ с $e_1 \in \mathbb{C} \cdot v$, $e_2 \in \mathbb{C} \cdot w$ и $||e_1|| = ||e_2|| = 1$ достигает своего минимума на некоторой паре векторов e_1, e_2. Этот угол φ и называется углом между комплексными прямыми $\mathbb{C} \cdot v$ и $\mathbb{C} \cdot w$.

Замечательно, что он может быть найден из формально аналогичного (1-10) соотношения

$$\cos\psi = \frac{|(v,w)|}{||v|| \cdot ||w||} = |(\, v/||v||\, , \, w/||w||\,)| \ , \tag{1-11}$$

которое в евклидовом случае также даёт *наименьший* из двух смежных углов между двумя вещественными прямыми на вещественной плоскости.

Упражнение 1.4*. Докажите это.

Отметим, что в силу эрмитовой версии неравенства Коши – Буняковского – Шварца правая часть (1-11) принадлежит $[0, 1]$, так что угол φ между двумя комплексными прямыми всегда острый: $\varphi \in [\, 0\, , \, \pi/2\,]$.

1.5. Эрмитово сопряжение операторов. Линейные операторы F и F^*, действующие на эрмитовом пространстве W, называются *сопряжёнными*, если

$$\forall\, w_1, w_2 \in W \quad (F^* v, w) = (v, Fw) \, .$$

В терминах матриц это соотношение означает, что $F^{*t} \cdot G = G \cdot \overline{F}$, откуда

$$F^* = G^{-1^t} \cdot \overline{F}^t \cdot G^t = \overline{G^{-1}} \cdot \overline{F}^t \cdot \overline{G} \, . \tag{1-12}$$

В ортонормальном базисе это соотношение редуцируется до $F^* = \overline{F}^t$. В частности, мы видим, что у каждого оператора F имеется ровно один сопряжённый оператор F^* и $F^{**} = F$. Таким образом, на пространстве $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ возникает инволютивная операция *сопряжения*

$$F \longmapsto F^* \ , \quad F^{**} = F \ ,$$

которая линейна относительно умножения на вещественные числа и *антилинейна* относительно умножения на комплексные числа:

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \ \ (zF)^* = \overline{z} \cdot F^* \, .$$

Сопряжение является *антиэндоморфизмом* алгебры $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ в том смысле, что $(FG)^* = G^* F^*$:

$$\forall\, v, w \in W \quad (v, FGw) = (F^* v, Gw) = (G^* F^* v, w) \, .$$

Упражнение 1.5. Убедитесь, что эрмитовы изометрии можно охарактеризовать как операторы, сопряжённые своему обратному $F^* = F^{-1}$.

Операторы F, удовлетворяющие условию $F^* = F$ называются *самосопряжёнными*, а операторы F, удовлетворяющие условию $F^* = -F^*$ называются *антисамосопряжёнными*. В ортонормированном базисе самосопряжённые операторы задаются *эрмитово симметричными* матрицами $F^t = \overline{F}$, а антисамосопряжённые — *эрмитово кососимметричными* матрицами $F^t = -\overline{F}$. Множества (анти) самосопряжённых операторов

$$\mathrm{End}^+_{\mathbb{C}}(W) = \{F \mid F^* = F\} \tag{1-13}$$

$$\mathrm{End}^-_{\mathbb{C}}(W) = \{F \mid F^* = -F\} \tag{1-14}$$

являются *вещественными* векторными подпространствами в комплексном векторном пространстве $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ в том смысле, что линейные комбинации (анти) самосопряжённых операторов *с вещественными* коэффициентами также являются (анти) самосопряжёнными операторами. Умножение на комплексное число i задаёт *вещественно* линейный изоморфизм между (вещественными) векторными пространствами самосопряжённых и антисамосопряжённых операторов:

$$F^* = F \quad \iff \quad (iF)^* = -(iF)$$

(обратный изоморфизм задаётся умножением на $-i$).

Пространство $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$, рассматриваемое как векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, является прямой суммой подпространств $\mathrm{End}^\pm_{\mathbb{C}}(W)$:

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) = \mathrm{End}^+_{\mathbb{C}}(W) \oplus \mathrm{End}^-_{\mathbb{C}}(W) \quad (\text{как пространства над } \mathbb{R})\,.$$

Разложение произвольного оператора в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого имеет вид $F = F_+ + F_-$, где

$$F_+ = \frac{F + F^*}{2} \in \mathrm{End}^+_{\mathbb{C}}(W)\ , \quad F_- = \frac{F - F^*}{2} \in \mathrm{End}^-_{\mathbb{C}}(W)\ .$$

1.6. Отступление: сопряжение операторов на евклидовом пространстве. На алгебре эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ вещественного евклидова пространства V тоже есть сопряжение $F \leftrightarrow F^*$, задаваемое тем же правилом $(F^*v, w) = (v, Fw)\ \forall\, w_1, w_2 \in W$. В терминах (вещественных) матриц $F^* = G^{-1} \cdot F^t \cdot G$. В ортонормальном базисе (анти) самосопряжённые операторы имеют (косо) симметричные матрицы, и любая матрица однозначно раскладывается в сумму симметричной и кососимметричной:

$$F = \frac{1}{2}\,\left(F + F^t\right) + \frac{1}{2}\,\left(F - F^t\right)\ .$$

Евклидовы изометрии можно охарактеризовать как операторы, сопряжённые к своим обратным.

1.6.1. Пример: сопряжение дифференциальных операторов. Пусть V — пространство бесконечно гладких функций $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, зануляющихся на концах отрезка вместе со всеми своими производными. Введём на V евклидову структуру

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt\ .$$

Оператор дифференцирования $d/dt\ :\ f \longrightarrow f'$ является антисамосопряжённым, как показывает интегрирование по частям:

$$(df/dt, g) = \int\limits_a^b f'g\,dt = -\int\limits_a^b fg'\,dt = (f, -dg/dt)\ .$$

Оператор умножения на фиксированную функцию, очевидно, самосопряжён. Поскольку сопряжение является антиэндоморфизмом алгебры операторов, оператор, сопряжённый, к примеру, с линейным дифференциальным оператором

$$t^3\frac{d^2}{dt^2}\,:\,f(t)\longmapsto t^3f''(t)\,,$$

действует по правилу $\left[t^3\frac{d^2}{dt^2}\right]^*\,:\,f(t)\longmapsto \left(t^3f(t)\right)''=\left[t^3\frac{d^2}{dt^2}+6t^2\frac{d}{dt}+6t\right]\,f(t)\,.$

Упражнение 1.6. Вычислите оператор, сопряжённый к оператору

$$L=a(t)\frac{d^2}{dt^2}+b(t)\frac{d}{dt}+c(t)\,:\,f\longmapsto af''+bf+c$$

где $a,b,c\in V$.

1.7. Нормальные операторы. Оператор F на эрмитовом пространстве W называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряжённым оператором: $F^*\cdot F=F\cdot F^*$. В частности, нормальными являются (анти) самосопряжённые и унитарные операторы, для которых F^* равен $\pm F$ и F^{-1} соответственно.

Мы собираемся показать, что нормальность оператора равносильна тому, что в некотором *ортогональном* базисе этот оператор будет иметь диагональную матрицу. Доказательство будет основано на некоторых общих свойствах коммутирующих друг с другом операторов.

1.7.1. Свойства перестановочных операторов. Если линейный оператор $V\xrightarrow{F}V$ на векторном пространстве V (над произвольным полем $\Bbbk$) перестановочен с оператором $V\xrightarrow{G}V$, т. е. $FG=GF$, то ядро и образ любого многочлена $f(F)$ от оператора F будут переводиться оператором G в себя: $G\Big(\ker\big(f(F)\big)\Big)\subset\ker\big(f(F)\big)$ и $G\Big(\operatorname{im}\big(f(F)\big)\Big)\subset\operatorname{im}\big(f(F)\big)$ В самом деле, $f(F)\,v=0\Rightarrow f(F)G\,v=Gf(F)\,v=0$ и, аналогично, $v=f(F)\,w\Rightarrow Gv=Gf(F)\,w=f(F)G\,w$.

В частности, собственные подпространства оператора F, представляющие собою ядра линейных многочленов $\ker(F-\lambda E)$ от оператора F, тоже переходят под действием G в себя. Следующее следствие этого наблюдения используется особенно часто:

1.7.2. ЛЕММА. *Над алгебраически замкнутым полем любое множество коммутирующих операторов обладает общим собственным вектором. Над произвольным полем любое множество диагонализуемых коммутирующих операторов может быть диагонализовано одновременно в одном общем для всех операторов базисе.*

Доказательство. Индукция по размерности пространства. Если все операторы скалярны (а в одномерном пространстве это так), годится любой вектор и, соответственно, любой базис. Если среди операторов есть нескалярный, то его собственные подпространства имеют меньшую размерность и инвариантны для всех операторов. Применяя к ним предположение индукции, получаем требуемое. □

1.7.3. ТЕОРЕМА. *Следующие условия на оператор F в эрмитовом пространстве W попарно эквивалентны:*

(1) *F нормален;*

(2) *F диагонализуется в некотором ортонормальном базисе;*

(3) *ортогональное дополнение к любому собственному подпространству оператора F переводится оператором F в себя.*

При выполнении этих условий диагональные элементы в (2) с точностью до перестановки не зависят от выбора диагонализующего базиса.

Доказательство. Условия (2) и (3) очевидно равносильны. Из (2) вытекает (1), поскольку в ортонормальном базисе матрица оператора, сопряжённого к диагональному, также будет диагональной, а любые две диагональные матрицы коммутируют. Покажем теперь, что из (1) вытекает (3). Пусть $U\subset V$ — собственное подпространство для F с собственным значением λ. Согласно (1) F^* коммутирует с F и, стало быть, F^* переводит подпространство U в себя. Тогда для любого $w \in U^\perp$ и всех $u \in U$ мы имеем $(Fw, u) = (w, F^*u) = 0$, поскольку $F^*u \in U$. Стало быть, $Fw \in U^\perp$, что и требовалось.

Последнее утверждение теоремы вытекает из того, что (с учётом кратностей) набор диагональных элементов совпадает с набором корней характеристического многочлена. □

1.7.4. СЛЕДСТВИЕ. *Самосопряжённые операторы — это в точности нормальные операторы с вещественными собственными значениями, а антисамосопряжённые — это нормальные операторы с чисто мнимыми собственными значениями.* □

1.7.5. СЛЕДСТВИЕ. *Унитарные операторы — это в точности нормальные операторы с собственными значениями по модулю равными единице.* □

Упражнение 1.7. Докажите, что ортогональное дополнение к любому (не обязательно собственному) инвариантному подпространству нормального оператора также инвариантно.

Упражнение 1.8. Докажите, что собственные векторы нормального оператора, имеющие различные собственные значения, ортогональны, и что любой ортонормированный набор собственных векторов можно дополнить до ортонормального базиса из собственных векторов.

1.8. Полярное разложение операторов обобщает хорошо известное представление комплексных чисел в полярных координатах
$$z = \varrho \cdot e^{i\vartheta} , \tag{1-15}$$
где $\varrho = |z|$ вещественно и положительно при $z \neq 0$, а $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta \in U_1$.

Для любого линейного оператора F на эрмитовом пространстве W операторы FF^* и F^*F самосопряжены. Покажем, что их собственные значения (автоматически вещественные) всегда неотрицательны, а при $\det F \neq 0$ — строго положительны.

В самом деле, если $FF^*v = \lambda v \neq 0$, то $\lambda \cdot (v,v) = (\lambda v, v) = (FF^*v, v) = (F^*v, F^*v)$, откуда $\lambda = (F^*v, F^*v)/(v,v) > 0$. Аналогично, если $F^*Fv = \lambda v \neq 0$, то $\lambda \cdot (v,v) = (\lambda v, v) = (F^*Fv, v) = (Fv, Fv)$, и $\lambda = (Fv, Fv)/(v,v) > 0$.

Приведём FF^* и F^*F к диагональному виду и обозначим через $S_1 = \sqrt{FF^*}$, $S_2 = \sqrt{F^*F}$, диагональные операторы, получающиеся извлечением вещественных неотрицательных квадратных корней из стоящих на диагонали элементов. Операторы $S_{1,2}$ также самосопряжены и неотрицательны, причём S_1 коммутирует с FF^* и по построению удовлетворяет соотношению $S_1^2 = FF^*$, а S_2 коммутирует с F^*F и удовлетворяет соотношению $S_1^2 = F^*F$.

Если F обратим, то $S_{1,2}$ положительны и тоже обратимы. В этом случае определены операторы $I_1 = S_1^{-1}F$ и $I_2 = FS_2^{-1}$, которые автоматически унитарны:

$$(I_1u, I_1w) = (S_1^{-1}Fu, S_1^{-1}Fw) = (F^*S_1^{-2}Fu, w) = (F^*(FF^*)^{-1}Fv, w) = (u, w) ,$$
$$(I_2u, I_2w) = (FS_2^{-1}u, FS_2^{-1}w) = (u, S_2^{-1}F^*FS_2^{-1}w) = (v, F^*FS_2^{-2}w) = (u, w) .$$

Итак, для любого обратимого оператора на эрмитовом пространстве имеются два разложения в композицию унитарного оператора и самосопряжённого оператора с положительными собственными числами
$$F = S_1I_1 = I_2S_2 .$$

Эти разложения называются *полярными разложениями* оператора F. Покажем, что оба сомножителя каждого из разложений определяются по F однозначно и не зависят от выбора диагонального представления операторов FF^* и F^*F, использованных при их построении.

Из равенств $I_1^* = I_1^{-1}$ и $F = I_1S_1$ вытекает, что $F^*F = S_1^2$. Поэтому S_1 перестановочен с FF^*. Будучи самосопряжёнными и перестановочными, операторы S_1 и FF^* одновременно приводятся к диагональному виду. Поэтому действие оператора S_1 на каждом собственном подпространстве V_μ оператора FF^* с собственным значением μ может быть задано диагональной матрицей, квадрат которой — скалярная матрица μE. Тем самым, S_1 действует на V_μ умножением на положительный вещественный $\sqrt{\mu}$. Поскольку всё пространство W является прямой суммой пространств V_μ, действие оператора S_1 на всём пространстве W однозначно определено и совпадает с построенным нами выше. Однозначность разложения $F = I_2 S_2$ устанавливается аналогично.

Упражнение 1.9. Покажите, что $F^*F = FF^* \iff I_1 = I_2$ & $S_1 = S_2 \iff I_1 S_1 = S_1 I_1 \iff I_2 S_2 = S_2 I_2$.

Упражнение 1.10. Покажите, что всякий обратимый оператор в вещественном евклидовом пространстве единственным образом раскладывается в левую и правую композиции ортогонального оператора и самосопряжённого оператора с положительными собственными числами.

Следующая ниже лемма позволяет при желании записать полярное разложение в виде

$$F = Se^{iT} ,$$

буквально обобщающем (1-15). Здесь оба оператора S, T самосопряжены, S положителен и однозначно определяется по F (как и выше), но собственные значения T произвольны, и различным T может отвечать один и тот же оператор $I = e^{iT}$.

1.8.1. ЛЕММА. *Отображение $A \longmapsto e^A = \sum_{m \geqslant 0} A^m/m!$ корректно определено и сюрьективно отображает пространство косоэрмитовых матриц на пространство унитарных матриц.*

Доказательство. Используя в качестве нормы на пространстве матриц сумму квадратов модулей матричных элементов нетрудно убедиться, что экспоненциальный ряд абсолютно сходится на всём пространстве матриц равномерно на каждом компакте (обязательно убедитесь в этом). Поскольку $e^{CAC^{-1}} = Ce^A C^{-1}$, для вычисления экспоненты можно воспользоваться базисом, в котором матрица косоэрмитова оператора диагональна с чисто мнимыми собственными значениями. В этом базисе матрица e^A также будет диагональна с собственными значениями, по модулю равными единице, т. е. будет матрицей унитарного оператора. Наоборот, приводя произвольный унитарной оператор к диагональному виду, убеждаемся, что он может быть записан как e^A для некоторой диагональной матрицы A с чисто мнимыми диагональными элементами. $\square$