Лекции 8 - 11.

Эрмитовы пространства. Ортогонализация.

Мы будем рассматривать векторные пространства над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Обычные определения линейной зависимости, независимости, базиса, координат, размерности, подпространств и их сумм работают и в этом контексте. Мы хотим также использовать понятие **длины** вектора и **расстояния**. Начнем с примера.

Пример. Длина в $\mathbb{C}^n$. Положим для вектора $\widetilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$

$$|\,\widetilde{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\, a_i}, \tag{1}$$

(чертой сверху мы обозначаем комплексное сопряжение).
Такая длина совпадает с тем, что называется длиной для комплексного числа при $n = 1$. Покажем, что это удобно использовать как длину для любого n. Однако, как и в случае Евклидова пространства, обобщающее длину скалярное произведение.

$$(\widetilde{a}|\widetilde{b}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\, b_i\,. \tag{2}$$

Тогда

$$|\,\widetilde{a}|^2 = (\widetilde{a}|\widetilde{b})\,. \tag{3}$$

Заметим, что для такого скалярного произведения выполнены следующие свойства.

- (линейность по второму аргументу)

$$(x|ay_1 + by_2) = a(x|y_1) + b(x|y_2)\,;$$

- (полу-линейность по первому аргументу)

$$(ax_1 + bx_2|y) = \overline{a}(x_1|y) + \overline{b}(x_2|y)\,;$$

- (полу-симметричность)

$$(y|x) = \overline{(x|y)}\,;$$

- (положительная определенность)

$$(x|x) \text{ вещественно и положительно при } x \neq 0\ \ .$$

Вышеназванные свойства принимаются за аксиомы абстрактного "эрмитова скалярного произведения"на комплексном векторном пространстве.

В примере было определено стандартное эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$.

Пример. Пусть V некоторое пространство функций на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ с комплексными значениями, векторное пространство над $\mathbb{C}$ и $s(x)$ – вещественная функция, строго положительная на $[a, b]$. Положим

$$(f|g) = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)s(x)dx\,.$$

Это дает эрмитово скалярное произведение при любой весовой функции s. Часто $s = 1$, но встречаются и другие s.

Пусть V пространство с выбранным эрмитовым скалярным произведением, сокращенно – "эрмитово пространство".

Предложение 8.1 *(неравенство Коши-Буняковского) Для $x, y \in V$*

$$(\mathrm{Re}(x|y))^2 \leq (x|x)(y|y)\,.$$

Следствие 8.2 *Выполнено неравенство треугольника.*

Действительно посчитаем, используя неравенство Коши-Буняковского,

$$|x+y|^2 = (x+y|x+y) = (x|x)+(x|y)+(y|x)+(y|y) \leq (x|x)+2(x|x)(y|y)+(y|y) = ((x|x)+(y|y))^2\,,$$

что и дает неравенство треугольника.

Доказательство. Рассмотрим для любого *вещественного* t вектор $u = tx + y$ тогда

$$q(t) = (u|u) = t^2(x|x) + t(2\,\mathrm{Re}(x|y)) + (y|y)$$

неотрицательно при всех t. Отсюда дискриминант $D = 4(\mathrm{Re}(x|y))^2 - 4(x|x)(y|y) \neq 0$, что и дает требуемое.

Определение 8.3 *Вектора x , y называются ортогональными, $x \perp y$, когда $(x|y) = 0$.*

Заметим, что $(x|y) = 0$ влечет $(y|x) = 0$ ввиду полу-симметричности.

Определение 8.4 *Пусть U подпространство в V. Определим его ортогональное дополнение $U^\perp$ как*

$$U^\perp = \{v \in V \mid (v|u) = 0 \text{ при всех } u \in U\}\,.$$

Ясно, что если $x \in U \cap U^\perp$, то $(x|x) = 0$ значит $x = 0$. То есть

$$U \cap U^\perp = 0\,,$$

сумма этих подпространств прямая.

Предложение 8.5 *Пусть подпространство U конечномерно. Тогда*

$$V = U \oplus U^\perp\,.$$

Доказательство. Пусть U одномерно, $U = \langle v \rangle$. Запишем

$$x = \frac{(v|x)}{(v|v)}\,v + z\,,\ \text{где } z = x - \frac{(v|x)}{(v|v)}\,v\,. \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что $z \perp v$, то есть $z \in U^\perp$, что дает требуемое в этом случае.

Лемма 8.6 *(ортогонализация) Пусть есть вектора $v_1, \dots, v_n$. Мы можем построить ортогональную систему векторов $e_1, \dots, e_m$, для которой*

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle e_1, \dots, e_m \rangle \text{ при } m \leq n\,,$$

применяя следующий процесс.
Начнем с $e_1 = v_1$. Если $e_1, \dots, e_{k-1}$ уже построены, то положим

$$e_k = v_k - \sum_{i=1\ldots k-1} \frac{(e_i|v_k)}{(e_i|e_i)}\,e_i\,.$$

Это совсем так же, как ортогонализация в евклидовом пространстве. Непосредственно проверяется, что при $j \le k-1$ имеем $(e_j|\, e_k) = 0$. То есть e_k можно добавить к ортогональной системе $e_1, \dots, e_{k-1}$.

Следствие 8.7 *1. В любом конечномерном подпространстве $U \subset V$ существует ортогональный базис.*
2. Если $e_1, \dots, e_n$ ортогональный базис в U, то для любого $x \in V$ имеет место разложение $x = y + z$, где

$$y = \sum_{i=1\dots n} \frac{(e_i|v_k)}{(e_i|e_i)}\, e_i \in U \text{ – ортогональная проекция } x \text{ на } U\,,$$

а $z = x - y \in U^\perp$.

Тем самым $V = U + U^\perp$. □

Заметим, что тем самым $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$.

Унитарные операторы.

Линейный оператор $\Phi : V \to V$ называется унитарным, когда

$$(\Phi\, x|\, \Phi\, y) = (x|\, y)\,.$$

Конечно, унитарный оператор сохраняет длины векторов. Можно показать, что верно и обратное: если линейный оператор сохраняет длины векторов, то он унитарный.

Свойства унитарных операторов
Мы предполагаем далее, что V конечномерно .

1. *Унитарный оператор невырожден, следовательно обратим.*
Действительно, вектор ненулевой длины не может перейти в ноль. Обратимость теперь следует из конечномерности.

2. *Унитарные операторы образуют группу по умножению.*
Ясно, что произведение унитаных операторов унитарно.
3. *Собственные значения унитарного оператора по модулю равны 1.*
Если $\Phi\, x = \lambda\, x$, то $(x|\, x) = (\Phi\, x|\, \Phi\, x) = \overline{\lambda}\, \lambda\, (x|\, x)$. Откуда $\overline{\lambda}\, \lambda = 1$, так как $(x|\, x) \ne 0$.

4. *Собственные векторы унитарного оператора с различными собственными значениями ортогональны.*
Если $\Phi\, x = \lambda\, x$ и $\Phi\, y = \mu\, y$, то $(x|\, y) = (\Phi\, x|\, \Phi\, y) = \overline{\lambda}\, \mu\, (x|\, y)$.
Заметим, что $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$, поэтому $\overline{\lambda}\, \mu - 1 \ne 0$. Заключаем, что $(x|\, y) = 0$.

5. *Если подпространство $U \subset V$ Φ-инвариантно, то $U^\perp$ тоже Φ-инвариантно.*
Пусть $w \in U^\perp$. Нам надо показать, что $\Phi\, w \in U^\perp$, то есть – что для любого $x \in U$ будет выполнено $(x|\, \Phi\, w) = 0$.
Заметим, что оператор Φ ограниченный на U унитарен, следжовательно обратим, поэтому $x = \Phi\, y$ для некоторого $y \in U$. Тогда

$$(x|\, \Phi\, w) = (\Phi\, y|\, \Phi\, w) = (y|\, w) = 0\,.$$

6. *Для любого унитаргого оператора существует ортогональный базис из собственных векторов.*

Проведем индукцию по размерности. Пусть $v_1 \in V$ собственный вектор Φ. Тогда подпространство $U = \langle v_1 \rangle$ Φ-инвариантно, поэтому $U^\perp$ тоже Φ-инвариантно и меньшей размерности, – к нему можно применить предположение индукции. Добавив v_1 получим базис V. Ясно, что этот базис будет ортогональным.

Самосопряженные операторы.

Линейный оператор $\mathcal{A} : V \to V$ называется самоспряженным, когда

$$(x|\,\mathcal{A}\,y) = (\mathcal{A}\,x|\,y)\,.$$

Свойства самосопряженных операторов

Мы снова предполагаем, что V конечномерно.

1. *Собственные значения самосопряженного оператора вещественны.*

Если $\mathcal{A}\,x = \lambda\,x$, то $(\mathcal{A}\,x|\,x) = (x|\,\mathcal{A}\,x)$ откуда $\overline{\lambda}(x|\,x) = \lambda\,(x|\,x)$. Тем самым $\overline{\lambda} = \lambda$, так как $(x|\,x) \neq 0$.

2. *Собственные векторы самосопряженного оператора с различными собственными значениями ортогональны.*

Если $\mathcal{A}\,x = \lambda\,x$ и $\mathcal{A}\,y = \mu\,y$, то $(\mathcal{A}\,x|\,y) = (x|\,\mathcal{A}\,y) = \overline{\lambda}(x|\,y) = \mu\,(x|\,y)$.
Заметим, что $\overline{\lambda} = \lambda$, поэтому $\overline{\lambda} - \mu \neq 0$. Заключаем, что $(x|\,y) = 0$.

3. *Если подпространство $U \subset V$ $\mathcal{A}$-инвариантно, то $U^\perp$ тоже $\mathcal{A}$-инвариантно.*

Пусть $w \in U^\perp$. Нам надо показать, что $\mathcal{A}\,w \in U^\perp$, или, что для любого $x \in U$ будет выполнено $(x|\,\mathcal{A}\,w) = 0$.
Считаем

$$(x|\,\mathcal{A}\,w) = (\mathcal{A}\,y|\,w) = 0\,,\ \text{так как}\ \mathcal{A}\,y \in U\,.$$

4. *Для любого самосопряженного оператора существует ортогональный базис из собственных векторов.*

Проведем индукцию по размерности. Пусть $v_1 \in V$ собственный вектор $\mathcal{A}$. Тогда подпространство $U = \langle v_1 \rangle$ $\mathcal{A}$-инвариантно, поэтому $U^\perp$ тоже $\mathcal{A}$-инвариантно и меньшей размерности. По индукции $U^\perp$ имеет ортогональный базис из собственных векторов, добавляя v_1 получим базис V. Ясно, что получаенный базис будет ортогональным.

Свойство 4 можно переписать в виде теоремы.

Теорема 8.8 *(спектральное разложение) Пусть $\mathcal{A} : V \to V$ самосопраженный оператор на конечномерном эрмитовом пространстве V. Для каждого собственного значения λ оператора $\mathcal{A}$ рассмотрим подпространство собственных векторов*

$$U(\lambda) = \{v|\,\mathcal{A}\,v = \lambda\,v\}\,.$$

Тогда $V = \oplus_i U(\lambda_i)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ это все (различные) собственные значения $\mathcal{A}$.

Действительно, собирая вместе базисные вектора, соответствующие одному и тому же собственному значению, мы получим базисы в собственных подпространствах. Тем самым ясно, что все пространство будет суммой собственных подпространств. Как было показано раньше, собственные векторы с различными собственными значениями линейно независимы, и тем самым, сумма собственных подпространств всегда прямая. Здесь – эти подпространства попарно ортогональны (по свойству 2). □

5. *Если самосопряженные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ коммутируют, то существует базис их общих собственных векторов.*
Покажем, что собственные подпространства $U(\lambda)$ для $\mathcal{A}$ инвариантны относительно $\mathcal{B}$. Действительно, если $x \in U(\lambda)$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\,x) \;=\; \mathcal{B}(\mathcal{A}\,x) = \mathcal{B}(\lambda\,x) \;=\; \lambda\,(\mathcal{B}\,x)\,.$$

То есть $\mathcal{B}\,x \in U(\lambda)$.

Теперь остается выбрать в каждом $U(\lambda_i)$ базис из собственных векторов для $\mathcal{B}$, получим требуемый базис.

Матричные рассмотрения.

Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_n$ в пространстве V.
Скалярное произведение определяет матрицу Грама G: $g_{ij} = (e_i|\, e_j)$, используя которую мы можем вычислть значение скалярного произведения векторов x, y через столбцы X, Y их координат в базисе $e_1, \dots, e_n$:

$$(x|\,y) \;=\; \overline{X^{\intercal}}\,G\,Y\,,$$

(что проверяется непосредственным вычислением).

Есть стандартное специальное обозначение

$$M^* := \overline{M^{\intercal}}\,.$$

Нетрудно проверить, что $(M_1\,M_2)^* = M_1^*\,M_2^*$ и $(M^{-1})^* = (M^*)^{-1}$.

Матрица M, для которой $M^* = M$, называется эртитово симметричной.

Матрица Грама – эрмитова симметрична ввиду полу-симметричности скалярного поизведения.

Предложение 8.9 *Оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен тогда и только тогда, когда его матрица A удовлетворяет соотношению*

$$A^*\,G = G\,A\,.$$

В часности, если базис ортонормирован, то $\mathcal{A}$ самосопряжен $\iff$ матрица A эрмитово симметрична.

Запишем

$$(\mathcal{A}\,x|y) = (XA)^*GY \text{ и } (x|\,\mathcal{A}\,y) = X^*GAY\,.$$

Отсюда следует требуемое.

Матрица T называется унитарной, если $T^* = T^{-1}$. Унитарные матрицы порядка n овразуют группу $U(n)$, а через $SU(n)$ обозначается подгрунна таких матриц с определителем 1.

Пример. Пусть

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SU(2) \iff \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix}$$

Это значит $d = \bar{d}$, $c = \bar{b}$ и условие $\det T = 1$ означает $\bar{a}a + \bar{b}b = 1$, что дает уравнение сферы в $\mathbb{C}^2 \sim \mathbb{R}^4$.

Предложение 8.10 *Оператор Φ унитарен тогда и только тогда, когда его матрица T удовлетворяет соотношению*

$$T^*G\,T = G\,.$$

В часности, если базис ортонормирован, то Φ унитарен $\iff$ матрица T унитарна.

Вычисление проводится аналогично.

Положительные операторы.

Заметим, что ввиду полу-симметричности число $(x|\,\mathcal{A}\,x)$ вещественно для любого самосопряженного оператора $\mathcal{A}$.

Определение 8.11 *Самосопряженный оператор $\mathcal{R}$ называется положительным если для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $(x|\,\mathcal{R}\,x) > 0$.*

В частности, собственные значения положительного оператора положительны.

Предложение 8.12 *Из положительного оператора $\mathcal{Q}$ можно извлечь квадратный корень – существует единственный положительный оператор $\mathcal{R}$, для которого $\mathcal{Q} = (\mathcal{R})^2$.*

Если выбрать ортонормированный базис из собственных векторов для $\mathcal{Q}$, то его матрица Q в этом базисе диагональна, с положительными элементоми q_i на диагонали. Расставляя на диагонали положительные квадратные корни $r_i = +\sqrt{q_i}$, получим матрицу R, для которой $R^2 = Q$. Оператор $\mathcal{R}$ определенный матрицей R самосопряжен ввиду того, что $R^* = R$. Ясно что

$$X^*RX = \sum_i r_i\,\overline{x_i}x_i > 0 \text{ при } X \neq 0\,.$$

Это показывает, что оператор $\mathcal{R}$ положителен.

Для доказательства единственности заметим, что $\mathcal{R}$ и $\mathcal{Q}$ обязаны коммутировать, значит у них обязательно есть базис из общих собственных векторов. При этом собственные значения для $\mathcal{R}$ однозначно определяются $r_i = +\sqrt{\lambda_i}$. Отсюда следует, что $\mathcal{R}$ действует умножением на r_i на всем собственном подпространстве $U(\lambda_i)$, тем самым – определен однозначно.

Полярное разолжение.

Докажем теорему "о полярном разложении".

Теорема 8.13 *Пусть $\mathcal{A} : V \to V$ невырожденный оператор. Тогда существует единственное разложение: $\mathcal{A} = \mathcal{R}\,\Phi$, где $\mathcal{R}$ – положительный (самосопряженный) оператор, а Φ – унитарный.*

Будем использовать ортонормированный базис. Рассмотрим оператор $\mathcal{Q}$ с матрицей $Q = A\,A^*$.

Лемма 8.14 *Оператор $\mathcal{Q}$ положительный.*

Считая в матрицах $Q = A\,A^*$ и $Q^* = (A\,A^*)^* = (A^*)^*(A^*) = A\,A^* = Q$, откуда самосопряженность.

Для проверки положительности заметим, что

$$(x|\,\mathcal{Q}\,x) = X^*A\,A^*X = (A^*X)^*\,(A^*X) = (y|\,y) > 0\,,$$

где y есть вектор с координатами $Y = A^*X$. Эаметим, что ввиду невырожденности A, матрица A^* невырождена и $Y \neq 0$.

Итак, $\mathcal{Q}$ положителен и у него сущестует квадратный корень $\mathcal{R}$. Тогда для матриц запишем

$$T := R^{-1}A\,,\ \text{тогда}\ T\,T^* = R^{-1}A\,A^*(R^{-1})^* = R^{-1}R^2\,(R^{-1})^* = E\,,$$

так как очевидно $(R^{-1})^* = R^{-1}$. Мы заключаем, что оператор Φ задаваемый матрицей T унитарен, и $\mathcal{A} = \mathcal{R}\,\Phi$, что дает существование.

Для доказательства единственности заметим, что $A = R\,T$ влечет $A\,A^* = R\,T\,T^*R = R^2$, тем самым $\mathcal{R}$ есть квадратный корень из $\mathcal{Q}$ и определен однозначно. Но $\Phi = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{A}$ однозначно восстанавливается по $\mathcal{R}$ и $\mathcal{A}$. □

Следствие 8.15 *Пусть множество $P(n)$ – это "положительные матрицы"порядка n, тогда*
$GL(n,\mathbb{C}) = P(n)\,\times\,U(n)$.

Нетрудно заметить, что $P(n)$ стягиваемо, откуда например следует что $\pi_1(GL(n,\mathbb{C}) = \pi_1(U(n)$.