§3. Кватернионы.

3.1. Пространство $\mathbf{Mat_2(\mathbb{C})}$. На 4-мерном пространстве $W = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ комплексных матриц размера 2×2 имеется $\mathbb{C}$-линейная инволюция, переводящая матрицу в присоединённую транспонированную матрицу

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \eta^{\times} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \eta^{\vee t} = \begin{pmatrix} \eta_{22} & -\eta_{12} \\ -\eta_{21} & \eta_{11} \end{pmatrix} \tag{3-1}$$

Упражнение 3.1. Проверьте, что это антигомоморфизмом алгебры матриц, т. е. $(\eta\zeta)^{\times} = \zeta^{\times}\eta^{\times}$.

Поскольку $\eta \cdot \eta^{\times} = \det(\eta) \cdot E$ комплексная билинейная форма

$$\widetilde{\det}(\eta, \zeta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\eta\,\zeta^{\times}) \tag{3-2}$$

задаёт поляризацию комплексной квадратичной формы $\det(\eta)$ на W.

Упражнение 3.2. Убедитесь, что $\mathbb{C}$-билинейная форма (3-2) симметрична и невырождена, и напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из матричных единиц.

Кроме того, на W имеется $\mathbb{C}$-антилинейная инволюция эрмитова сопряжения матриц

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \eta^{*} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{\eta}^{t} = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_{11} & \overline{\eta}_{21} \\ \overline{\eta}_{12} & \overline{\eta}_{22} \end{pmatrix}\ , \tag{3-3}$$

которая также является антигомоморфизмом алгебры матриц (т. е. $(\eta\zeta)^{*} = \zeta^{*}\eta^{*}$), и формула, аналогичная (3-2), задаёт на пространстве W эрмитово скалярное произведение

$$(\eta, \zeta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\eta\,\zeta^{*})\ . \tag{3-4}$$

Ассоциированная с этим произведением норма представляет собой полусумму квадратов модулей матричных элементов

$$||\eta||^2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\eta, \eta) = \frac{1}{2}\sum |\eta_{ij}|^2\ ,$$

и матричные единицы составляют ортогональный базис формы (3-4) (откуда видна её невырожденность и положительная определённость).

Композиция инволюций $\eta \leftrightarrow \eta^{*}$ и $\eta \leftrightarrow \eta^{\times}$ является $\mathbb{C}$-антилинейной инволюцией на пространстве W и автоморфизмом матричной алгебры

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \eta^{\sigma} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{\eta}^{\vee} = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_{22} & -\overline{\eta}_{21} \\ -\overline{\eta}_{12} & \overline{\eta}_{11} \end{pmatrix}\ . \tag{3-5}$$

Упражнение 3.3. Убедитесь, что $(\eta\zeta)^{\sigma} = \eta^{\sigma}\zeta^{\sigma}$ и $(\eta, \zeta) = \widetilde{\det}(\eta, \zeta^{\sigma})$, а также что все три инволюции попарно коммутируют друг с другом и произведение любых двух из них равно третьей.

Мы будем использовать инволюцию $\eta \leftrightarrow \eta^{\sigma}$ в качестве *вещественной структуры* на W. Подпространство $V = \mathrm{Re}_{\sigma}(W)$ вещественных векторов этой структуры состоит из матриц вида

$$x = \begin{pmatrix} x_1 + i\,x_2 & x_2 + i\,x_3 \\ -x_2 + i\,x_3 & x_1 - i\,x_2 \end{pmatrix} \quad \text{с} \quad x_{\nu} \in \mathbb{R}\ ,$$

и обе формы (3-2), (3-4) ограничиваются на это вещественное подпространство в стандартную евклидову структуру $(x, x) = \sum x_{\nu}^2$, ортонормальным базисом для которой служат, например, матрицы

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{3-6}$$

Итак, комплексное 4-мерное пространство W представляет собой комплексификацию 4-мерного вещественного евклидова пространства $V \simeq \mathbb{R}^4$, а формы $\widetilde{\det}$ и $(*,*)$ суть комплексно билинейное и эрмитово продолжения евклидовой структуры с V на W.

3.2. Тело кватернионов $\mathbb{H}$. Поскольку σ является гомоморфизмом относительно матричного умножения, вещественное подпространство $V \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ является подалгеброй в алгебре матриц. Эта подалгебра называется *алгеброй кватернионов* и обозначается $\mathbb{H}$. Вектор $\boldsymbol{e}$ является единичным элементом этой алгебры, и обычно обозначается просто 1, а в произведениях опускается вовсе. Таблица умножения остальных базисных кватернионов (3-6) имеет вид:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1 \;, \\ \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k} \;, \quad \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i} \;, \quad \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j} \;. \end{gathered} \tag{3-7}$$

Стало быть, произвольная пара кватернионов перемножается по правилу

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}) \cdot (y_0 + y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k}) &= (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) \\ &+ (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)\,\boldsymbol{i} \\ &+ (x_0y_2 + x_2y_0 + x_3y_1 - x_1y_3)\,\boldsymbol{j} \\ &+ (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1)\,\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{3-8}$$

Упражнение 3.4. Убедитесь непосредственно, что формулы (3-7) и (3-8) задают на абстрактном вещественном векторном пространстве с базисом $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ структуру ассоциативной алгебры над $\mathbb{R}$.

По аналогии с комплексными числами, 1-мерное подпространство $\mathbb{R} \cdot \boldsymbol{e} \subset \mathbb{H}$ называется пространством *чисто вещественных* кватернионов, а 3-мерное подпространство

$$I = \{x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} + z \cdot \boldsymbol{k} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

называется пространством *чисто мнимых* кватернионов. На языке матриц, $I \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ состоит из всех косоэрмитовых матриц со следом нуль, а $\mathbb{R} \cdot \boldsymbol{e}$ состоит из вещественных скалярных матриц.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что I и $\boldsymbol{e}$ ортогональны относительно евклидовой структуры на $\mathbb{H}$.

Инволюция эрмитова сопряжения $\eta \leftrightarrow \eta^*$ переводит $\mathbb{H}$ в себя, тождественно действуя на $\boldsymbol{e}$ и меняя знак у мнимых кватернионов. Она называется *кватернионным сопряжением*. Это *антиавтоморфизм* алгебры кватернионов:

$$(pq)^* = q^*p^* \;.$$

Так как квадрат евклидовой длины кватерниона $\eta = x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$ равен

$$||\eta||^2 = \sum x_\nu^2 = (\eta, \eta) = \det(\eta) \;,$$

из мультипликативности определителя вытекает мультипликативность нормы кватернионов относительно кватернионного умножения:

$$||\eta\zeta|| = ||\eta|| \cdot ||\zeta|| \quad \forall\, \eta, \zeta \in \mathbb{H} \;.$$

Мультипликативность нормы легко усмотреть и без матричной интерпретации — исходя из одного только абстрактного определения алгебры $\mathbb{H}$ при помощи соотношений (3-7), как в упр. 3.4. В самом деле, из первой строчки формулы (3-8) очевидно, что скалярное произведение выражается через кватернионное умножение как

$$(p, q) = \mathrm{Re}\,(p \cdot q^*) = \mathrm{Re}\,(p^* \cdot q) \;. \tag{3-9}$$

Поскольку $\forall\, q \in \mathbb{H}$ кватернион $q \cdot q^*$ самосопряжён, он чисто вещественен: $q \cdot q^* = \mathrm{Re}\,(q \cdot q^*)$. Следовательно, беря в (3-9) $p = q$, получаем соотношение

$$||q||^2 = \sum x_\nu^2 = q \cdot q^* \;, \tag{3-10}$$

из которого вытекает $||pq||^2 = pq(pq)^* = pqq^*p^* = p||q||^2p^* = ||p||^2||q||^2$.

Упражнение 3.6. Выведите из мультипликативности кватернионной нормы *тождество Эйлера*[1]

$$\begin{aligned}(x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)\cdot(y_0^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2) &= (x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)^2\\ &+(x_0y_1+x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2)^2\\ &+(x_0y_2+x_2y_0+x_3y_1-x_1y_3)^2\\ &+(x_0y_3+x_3y_0+x_1y_2-x_2y_1)^2\end{aligned} \tag{3-11}$$

Важным следствием соотношения (3-10) является наличие в $\mathbb{H}$ *деления*: для любого ненулевого $q \in \mathbb{H}$ кватернион $q^{-1} = q^*/||q||^2$ служит для q двусторонним обратным: $q\cdot q^{-1} = q^{-1}\cdot q = 1$. Ассоциативное некоммутативное кольцо, в котором каждый ненулевой элемент обратим, называется *телом*[2]. Итак, кватернионы образуют тело.

Упражнение 3.7. Покажите, что центр алгебры кватернионов $Z(\mathbb{H}) \overset{\text{def}}{=} \{\zeta \in \mathbb{H} \mid q\zeta = \zeta q \quad \forall q \in \mathbb{H}\}$ совпадает с пространством чисто вещественных кватернионов (в матричной интерпретации — вещественных скалярных матриц).

Из (3-9) следует также, что ортогональность кватернионов p и q равносильна тому, что кватернион pq^* чисто мним, т. е. антисамосопряжён: $pq^* = -qp^*$. Применяя это наблюдение к чисто мнимым кватернионам $p^* = -p$ и $q^* = -q$ получаем такой полезный при практических вычислениях результат:

3.2.1. ЛЕММА. *Чисто мнимые кватернионы p, q ортогональны тогда и только тогда, когда они антикоммутируют, причём в этом случае произведение $pq = -qp$ тоже будет чисто мнимым кватернионом, ортогональным как к p, так и к q.*

Доказательство. Антисамосопряжённость произведения $r = pq = -qp$ вытекает из $r^* = (pq)^* = q^*p^* = qp = -pq = -r$, а его ортогональность к p и q — из $rp^* = -pqp = -pr^*$ и $rq^* = qpq = -qr^*$. □

Упражнение 3.8. Убедитесь, что соотношения (3-7) на *произвольные* три кватерниона $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ равносильны тому, что эти кватернионы образуют ортонормальный базис пространства чисто мнимых кватернионов, ориентированный точно также, как базис (3-6).

3.3. Универсальное накрытие $S^3 = \mathrm{SU}_2 \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Трёхмерная сфера кватернионов единичной нормы в матричной интерпретации совпадает со специальной унитарной группой, поскольку для матриц единичного определителя $\eta^\times = \eta^{-1}$ и условие σ-вещественности $\eta^\times = \eta^*$ превращается в условие унитарности $\eta^{-1} = \eta^*$:

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid q\cdot q^* = 1\} = \{\eta \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid \det\eta = 1 \;\&\; \eta^{-1} = \eta^*\} = \mathrm{SU}_2 \,.$$

Эта группа действует на алгебре кватернионов по правилу

$$S^3 \ni \psi \longmapsto F_\psi : \mathbb{H} \xrightarrow{q\mapsto\psi q\psi^*} \mathbb{H} \,. \tag{3-12}$$

(поскольку $\psi^* = \psi^{-1}$ это действие можно было бы описать и как *сопряжение* при помощи ψ).

Упражнение 3.9. Проверьте, что $F_{\varphi\psi} = F_\varphi \circ F_\psi$ и что $\forall \psi \in S^3$ линейный оператор F_ψ является автоморфизмом тела кватернионов, т. е. обратим и удовлетворяет соотношению $F_\psi(pq) = F_\psi(p)F_\psi(q)$.

Поскольку $\det(\psi q\psi^{-1}) = \det q$, оператор F_ψ является евклидовой изометрией пространства $\mathbb{H}$, а так как он сохраняет $\boldsymbol{e}$, ограничение F_ψ на $I = \boldsymbol{e}^\perp$ является ортогональным преобразованием 3-мерного евклидова пространства I чисто мнимых кватернионов. Это преобразование собственное, поскольку может быть непрерывно продеформировано по сфере S^3 в тождественное преобразование $F_{\boldsymbol{e}}$. Итак, мы получаем гомоморфизм

$$S^3 = \mathrm{SU}_2 \xrightarrow{\psi\mapsto F_\psi|_I} \mathrm{SO}_{\det}(I) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \tag{3-13}$$

[1] оно играет важную роль в доказательстве теоремы о представимости натурального числа в виде суммы четырёх квадратов, поскольку редуцирует её к задаче о представимости простых чисел

[2] таким образом поля — это в точности коммутативные тела

Заметим, что $F_\psi(\psi) = \psi$, поэтому при $\psi \neq \boldsymbol{e}$ оператор F_ψ оставляет на месте двумерную плоскость

$$\Pi_\psi = \mathbb{R}\cdot\boldsymbol{e} \oplus \mathbb{R}\cdot\psi\ ,$$

а значит, $F_\psi|_I$ является вращением вокруг прямой $\ell_\psi = \Pi_\psi \cap I$. Фиксируя на этой прямой один из двух чисто мнимых кватернионов $\boldsymbol{n}$ с $||\boldsymbol{n}|| = 1$, мы можем отождествить $\Pi_\psi = \Pi_{\boldsymbol{n}}$ с полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ по правилу

$$\mathbb{C} \ni (x+iy) \longleftrightarrow (x\boldsymbol{e}+y\boldsymbol{n}) \in \Pi_{\boldsymbol{n}}\ . \tag{3-14}$$

При этом кватернион $\psi \in \mathbb{C}$ приобретает *аргумент* $\operatorname{Arg}\psi$.

Упражнение 3.10. Убедитесь, что $F_\psi|_I$ является поворотом вокруг прямой ℓ_ψ на угол $2\operatorname{Arg}(\psi)$, если смотреть вдоль орта $\boldsymbol{n} \in \ell_\psi$.

Из упр. 3.10 немедленно следует, что гомоморфизм (3-13) является двулистным накрытием с ядром $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\}$. Неформально говоря, взятие прообраза относительно (3-13) означает «извлечение корня» из вращения трёхмерного пространства.

Упражнение 3.11*. Если вы знакомы с основами топологии, покажите, что S^3 *односвязна*, т. е. что фундаментальными группа $\pi_1(S^3) = 1$. Чуть сложнее увидеть, что $\pi_1(\mathrm{SO}_3) = \pi_1(\mathbb{RP}_3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Это означает, что отображение (3-13) является *универсальным накрытием*.

3.4. Два семейства комплексных структур на $\mathbb{H}$. Операторы левого и правого умножения на любой чисто мнимый кватернион $\boldsymbol{n}$ единичной нормы

$$\begin{aligned} I'_{\boldsymbol{n}} &: \mathbb{H} \xrightarrow{\eta\mapsto \boldsymbol{n}\eta} \mathbb{H} \\ I''_{\boldsymbol{n}} &: \mathbb{H} \xrightarrow{\eta\mapsto \eta\boldsymbol{n}} \mathbb{H} \end{aligned} \tag{3-15}$$

задают комплексные структуры на 4-мерном вещественном векторном пространстве $\mathbb{H}$, т. к.

$$\boldsymbol{n}^2 = -\boldsymbol{n}^*\boldsymbol{n} = -(\boldsymbol{n}^*/||\boldsymbol{n}||)\cdot\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}^{-1}\cdot\boldsymbol{n} = -1\ .$$

Отметим, что всякий кватернион $\boldsymbol{n}$ с $\boldsymbol{n}^2 = -1$ имеет $||\boldsymbol{n}|| = 1$ и $\boldsymbol{n}^{-1} = -\boldsymbol{n}$, откуда в силу (3-10) $\boldsymbol{n}^* = -\boldsymbol{n}$, т. е. все кватернионы с квадратом -1 автоматически чисто мнимы. Таким образом, на $\mathbb{H}$ имеются два семейства комплексных структур, параметризованных двумерной единичной сферой $S^2 \subset I$ чисто мнимых кватернионов нормы 1.

Покажем, что все эти структуры попарно различны. Операторы (3-15) переводят в себя двумерное вещественное пространство $\Pi_{\boldsymbol{n}} = \mathbb{R}\cdot\boldsymbol{e}\oplus\mathbb{R}\cdot\boldsymbol{n}$, которое, таким образом, является для обеих структур комплексным одномерным подпространством и, более того, может быть канонически отождествлено с полем $\mathbb{C}$ по формуле (3-14) : $(x+iy) \leftrightarrow (x\boldsymbol{e}+y\boldsymbol{n})$. С другой стороны, из леммы (n° 3.2.1) вытекает, что плоскость $\Pi_{\boldsymbol{n}}$ не инвариантна ни для одного из операторов $I'_{\boldsymbol{m}}$, $I''_{\boldsymbol{m}}$ с $\boldsymbol{m} \neq -\boldsymbol{n}$, и значит, не является комплексным подпространством в этих структурах. Таким образом, структуры $I'_{\boldsymbol{n}}$, $I''_{\boldsymbol{n}}$ не совпадают ни с одной из структур $I'_{\boldsymbol{m}}$, $I''_{\boldsymbol{m}}$ при $\boldsymbol{m} \neq \pm\boldsymbol{n}$.

Комплексные структуры $I'_{\boldsymbol{n}}$ и $I'_{-\boldsymbol{n}} = -I'_{\boldsymbol{n}}$, очевидно, различны — они *сопряжены* друг другу. Структуры $I''_{\boldsymbol{n}}$ и $I''_{-\boldsymbol{n}} = -I''_{\boldsymbol{n}}$ также сопряжены. По аналогичной причине $I'_{\boldsymbol{n}} \neq I''_{-\boldsymbol{n}}$ — операторы $I'_{\boldsymbol{n}}$ и $I''_{-\boldsymbol{n}}$ задают сопряжённые комплексные структуры на плоскости $\Pi_{\boldsymbol{n}} = \Pi_{-\boldsymbol{n}}$ (их ограничения на эту плоскость отличаются друг от друга знаком).

Наконец, сравним между собою структуры $I'_{\boldsymbol{n}}$ и $I''_{\boldsymbol{n}}$, совпадающие на $\Pi_{\boldsymbol{n}} \simeq \mathbb{C}$. Поскольку обе они переводят в себя ортогонал $\Pi_{\boldsymbol{n}}^\perp$, он является в обеих структурах одномерным комплексным подпространством. Зафиксируем какой-нибудь чисто мнимый кватернион единичной нормы $\boldsymbol{m} \in \Pi_{\boldsymbol{n}}^\perp$ в качестве базисного вектора этого подпространства. Тогда $\mathbb{H}$ как двумерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ разложится в структурах $I'_{\boldsymbol{n}}$ и $I''_{\boldsymbol{n}}$ в прямую сумму двух одномерных комплексных пространств:

$$\text{(в структуре } I'_{\boldsymbol{n}}) \quad \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\cdot\boldsymbol{m} = \mathbb{H} = \mathbb{C}\oplus\boldsymbol{m}\cdot\mathbb{C} \quad \text{(в структуре } I''_{\boldsymbol{n}})\ , \tag{3-16}$$

где умножение базисного орта $\boldsymbol{m}$ на $i \in \mathbb{C}$ задаётся в структурах $I'_{\boldsymbol{n}}$ и $I''_{\boldsymbol{n}}$, соответственно, левым и правым умножением его на $\boldsymbol{n}$. Поскольку по лемме (n° 3.2.1) $I'_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{nm} = -\boldsymbol{mn} = -I''_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{m})$, комплексные структуры $I'_{\boldsymbol{n}}$ и $I''_{\boldsymbol{n}}$ на пространстве $\Pi_{\boldsymbol{n}}^{\perp}$ будут сопряжены друг другу:

$$\overline{z} \cdot \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} \cdot z \qquad \forall\, z = x + iy = x \cdot \boldsymbol{e} + y \cdot \boldsymbol{n} \in \mathbb{C}\,. \tag{3-17}$$

Итак, $I'_{\boldsymbol{n}} \neq I''_{\boldsymbol{n}}$, и все комплексные структуры (3-15) действительно различны.

Упражнение 3.12. Проверьте, что представление (3-16) аналогично представлению $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ поля $\mathbb{C}$ в виде «формально удвоенного» поля $\mathbb{R}$ в том смысле, что элементы $\mathbb{H}$ можно было бы *определить* как формальные записи вида $z + w \cdot \boldsymbol{m}$, в которых $z, w \in \mathbb{C}$ суть комплексные числа, формальный символ $\boldsymbol{m}$ имеет $\boldsymbol{m}^2 = -1$ и удовлетворяет соотношениям (3-17), а *кватернионное умножение*

$$(z_1 + w_1 \cdot \boldsymbol{m}) \cdot (z_2 + w_2 \cdot \boldsymbol{m}) \stackrel{\text{def}}{=} (z_1 z_2 - w_1 \overline{w}_2) + (z_1 w_2 + w_1 \overline{z}_2) \cdot \boldsymbol{m}$$

происходит по обычным правилам раскрытия скобок с учётом всех этих соотношений.