§5. Нормальные подгруппы и строение гомоморфизмов.

5.1. Строение гомоморфизмов. Любой гомоморфизм групп $G \xrightarrow{\varphi} G'$ переводит единицу e группы G в единицу e' группы G'. В самом деле, $\varphi(e)\,\varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e)$ и, умножая обе части на $\varphi(e)^{-1}$, получаем $\varphi(e) = e'$. Далее, поскольку $\varphi\left(g^{-1}\right)\varphi(g) = \varphi\left(g^{-1}g\right) = \varphi(e) = e'$, для любого $g \in G$ выполняется равенство $\varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)^{-1}$. Поэтому образ гомоморфизма $G \xrightarrow{\varphi} G'$

$$\operatorname{im}(\varphi) = \varphi(G) = \{g' \in G' \mid \exists\, g \in G : \varphi(g) = g'\}$$

является подгруппой в $G' : \forall\, \varphi(g), \varphi(f) \in \operatorname{im}(\varphi)\ \ \varphi(g)\varphi(f)^{-1} = \varphi(g)\varphi(f^{-1}) = \varphi(gf^{-1}) \in \operatorname{im}(\varphi)$.

Полный прообраз единицы $e' \in G'$ называется *ядром* гомоморфизма φ и обозначается

$$\ker\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{-1}\left(e'\right) = \left\{g \in G \mid \varphi(g) = e'\right\}\ .$$

Ядро является подгруппой в $G : \forall\, g, f \in \ker(\varphi)\ \ gf^{-1} \in \ker(\varphi)$, поскольку

$$\varphi(g) = \varphi(f) = e' \ \Rightarrow\ \varphi(gf^{-1}) = \varphi(g)\varphi(f^{-1}) = \varphi(g)\varphi(f)^{-1} = e'\left(e'\right)^{-1} = e'\,.$$

Полный прообраз произвольного элемента $g' = \varphi(g) \in \operatorname{im}(\varphi)$ представляет собою смежный класс ядра, отвечающий элементу $g \in G$, причём этот смежный класс одновременно является как левым, так и правым смежным классом подгруппы $\ker(\varphi)$, т. е.

$$\varphi^{-1}(\varphi(g)) = g \cdot \ker(\varphi) = \ker(\varphi) \cdot g\ . \tag{5-1}$$

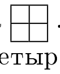
В самом деле, умножая обе части $\varphi(g) = \varphi(f)$ слева на $\varphi(g)^{-1}$, мы получаем равносильное равенство $e' = \varphi(g)^{-1}\varphi(f) = \varphi\left(g^{-1}f\right)$, которое означает, что $g^{-1}f \in \ker(\varphi)$, или $f \in g \cdot \ker(\varphi)$. Аналогично, умножая обе части $\varphi(g) = \varphi(f)$ на $\varphi(g)^{-1}$ справа, мы получаем $e' = \varphi(f)\varphi(g)^{-1} = \varphi\left(fg^{-1}\right)$, что означает, что $fg^{-1} \in \ker(\varphi)$, т. е. $f \in \ker(\varphi) \cdot g$. Суммируем все наши наблюдения в виде следующей *теоремы о строении гомоморфизма групп*.

5.1.1. ТЕОРЕМА. *Образ любого гомоморфизма групп $G \xrightarrow{\varphi} G'$ является подгруппой в G', а ядро — подгруппой в G. Левые и правые смежные классы ядра совпадают друг с другом и являются слоями эпиморфизма $G \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \operatorname{im}(\varphi) :\ \ \forall\, g \in G\quad g \cdot \ker(\varphi) = \ker(\varphi) \cdot g = \varphi^{-1}\big(\varphi(g)\big)$. В частности, $|\operatorname{im}(\varphi)| = [G : \ker(\varphi)] = |G| : |\ker(\varphi)|$.* □

5.1.2. СЛЕДСТВИЕ. *Для того, чтобы гомоморфизм групп был инъективен необходимо и достаточно, чтобы его ядро состояло только из единичного элемента.* □

5.1.3. Пример: ядро эпиморфизма $\mathfrak{S}_4 \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{S}_3$ из примера (n° 4.1.2) совпадает с множеством вращений, переводящих в себя каждую из трёх пар противоположных граней куба[1], и потому изоморфно группе двуугольника $\mathfrak{D}_2$, состоящей из тождественного преобразования и трёх поворотов на 180° вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней куба. В терминах группы $\mathfrak{S}_4$

$$\ker(\varphi) = \{(1,\,2,\,3,\,4)\,,\ (2,\,1,\,4,\,3)\,,\ (3,\,4,\,1,\,2)\,,\ (4,\,3,\,2,\,1)\} \tag{5-2}$$

состоит из тождественного преобразования и всех перестановок циклового типа . Сделанное нами в примере (n° 4.1.2) наблюдение, что все слои эпиморфизма φ состоят ровно из четырёх поворотов, объясняется предложением (n° 5.1.1). Читателю настоятельно рекомендуется явно проследить, что эти слои являются как левыми, так и правыми смежными классами подгруппы (5-2).

5.1.4. Пример: ядро эпиморфизма $\mathfrak{S}_n \overset{\text{sgn}}{\twoheadrightarrow} \{\pm 1\}$ из примера (n° 4.1.3) совпадает со *знакопеременной группой* $\mathfrak{A}_n$. Предложение (n° 5.1.1) даёт другое доказательство сделанным в (n° 4.2) наблюдениям, что

[1]или, если угодно, каждый из трёх отрезков, соединяющих центры противоположных граней

ровно половина всех перестановок являются чётными и что чётные перестановки составляют подгруппу в $\mathfrak{S}_5$, а нечётные образуют смежный класс этой подгруппы (одновременно как левый, так и правый).

5.1.5. Пример: ядро гомоморфизма полной группы додекаэдра в $\mathfrak{S}_5$, построенного в примере (n° 4.2.1), состоит из тождественного преобразования и центральной симметрии (т. е. изоморфно группе $\{\pm 1\}$), а образ является знакопеременной подгруппой $\mathfrak{A}_5 \subset \mathfrak{S}_5$. Прообраз каждой чётной перестановки пяти кубов представляет собою смежный класс подгруппы $\{\pm 1\}$, образованный одним из описанных в (n° 2.1.6), (n° 4.2.1) вращений и композицией этого вращения с центральной симметрией. Отметим, что центральная симметрия коммутирует с любым вращением, поэтому всё равно, в каком порядке эту композицию брать (что ещё раз показывает, что левый смежный класс является также и правым, а заодно подсказывает, как решать упр. 4.10).

5.1.6. Пример: универсальное накрытие единичной окружности числовою прямою. Рассмотрим группу всех преобразований плоскости, задаваемых поворотами вокруг начала координат на произвольные вещественные углы, и будем обозначать через ϑ_α поворот на угол α. Эта группа коммутативна. Её элементы можно отождествить с точками единичной окружности $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (см. рис. 5◇1). А именно, поместим тождественное преобразование $\mathrm{Id} = \vartheta_0$ в точку $(1, 0)$ (единичный направляющий вектор оси абсцисс), а поворот ϑ_α — в точку $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ (для попадания в эту точку из точки $\vartheta_0 = \mathrm{Id}$ надо пройти по единичной окружности дугу длины α против часовой стрелки, если $\alpha > 0$, и по часовой стрелке, если $\alpha < 0$). При таком отождествлении композиции поворотов $\vartheta_{\alpha_1}\vartheta_{\alpha_2}$ будет отвечать сложение ориентированных дуг единичной окружности, ведущих из точки ϑ_0 в точки ϑ_{α_1}, ϑ_{α_2}. Гомоморфизм из группы вещественных чисел $\mathbb{R}$ с операцией сложения в группу поворотов S^1, сопоставляющий каждому вещественному числу $\alpha \in \mathbb{R}$ поворот ϑ_α на угол α:

$$u : \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha \mapsto \vartheta_\alpha} S^1 , \qquad (5\text{-}3)$$

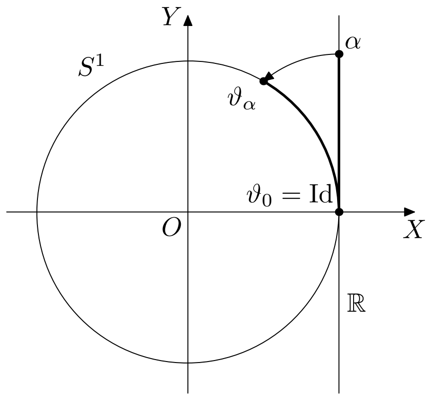


Рис. 5◇1. Накрытие $\mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$.

называется *универсальным накрытием* единичной окружности числовою прямою. Его можно представлять себе как «наматывание» ориентированной снизу вверх вертикальной числовой прямой $\mathbb{R}$, приставленной своим нулём к точке ϑ_0, на единичную окружность (см. рис. 5◇1). Гомоморфизм (5-3) сюрьективен. Его ядро состоит из всех углов, поворот на которые является тождественным преобразованием плоскости, т. е. из действительных чисел, являющихся целыми кратными длины единичной окружности:

$$\ker(u) = 2\pi \cdot \mathbb{Z} = \{\alpha = 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} .$$

Прообраз каждого поворота $\vartheta_\alpha \in S^1$ является смежным классом этой подгруппы. Он состоит из всех углов, поворот на которые совпадает с поворотом ϑ_α, т. е. всех углов, отличающихся от α на любое целое число оборотов. Множество всех таких углов называется *аргументом* поворота $\vartheta_a \in S^1$ и обозначается

$$\mathrm{Arg}\,(\vartheta_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} u^{-1}(\vartheta_\alpha) = \{\alpha + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\} .$$

Подчеркнём, что это бесконечное множество чисел, а не какой-то один конкретный угол.

Упражнение 5.1. Пусть $H \subset G$ — произвольная подгруппа абелевой группы G. Убедитесь, что $\forall\, g \in G$ $gH = Hg$.

5.1.7. Пример: эпиморфизм $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \boldsymbol{\mu}_n$ и группа вычетов $\mathbb{Z}/(n)$. Этот пример является дискретной версией предыдущего примера. Зафиксируем натуральное число $n \neq 0, 1$ и рассмотрим отображение

$$u_n : \mathbb{Z} \xrightarrow{k \mapsto \tau_k} \boldsymbol{\mu}_n \qquad (5\text{-}4)$$

сопоставляющее каждому целому числу k поворот $\tau_k = \vartheta_{2\pi k/n}$ на угол $2\pi k/n$. Это отображение является гомоморфизмом из группы целых чисел $\mathbb{Z}$ с операцией сложения в группу $\boldsymbol{\mu}_n$ поворотов на углы, кратные $2\pi/n$. Ядро этого гомоморфизма обозначается

$$(n) \stackrel{\text{def}}{=} \ker(u_n) = \{zn \mid z \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z} ,$$

и состоит из всех целых чисел, кратных n. Смежные классы $k + (n)$ этой подгруппы называются *классами вычетов по модулю* n и обозначаются $[k]_n$ или $k \,(\mathrm{mod}\; n)$. Они взаимно однозначно соответствуют остаткам 0, 1, … , $(n-1)$ от деления на n: числа k и m тогда и только тогда лежат в одном смежном классе, когда их разность $k-m \in (n)$ делится на n, а это равносильно тому, что они имеют одинаковый остаток[1] от деления на n. Операция композиции в группе поворотов индуцирует операцию *сложения классов вычетов*:

$$[k]_n + [m]_n \stackrel{\text{def}}{=} [k+m]_n\,. \tag{5-5}$$

Эта формула — не что иное как известное из школы правило, гласящее, что остаток суммы равен остатку от суммы остатков слагаемых.

Упражнение 5.2. Убедитесь, что правило (5-5), задающее сложение классов в терминах сложения конкретных представителей этих классов, на самом деле не зависит от выбора этих представителей, т. е. что из равенств $[k]_n = [k']_n$ и $[m]_n = [m']_n$ вытекает равенство $[k+m]_n = [k'+m']_n$. Проверьте также, что эта операция превращает множество смежных классов в группу, изоморфную группе $\boldsymbol{\mu}_n$.

Группа классов с операцией (5-5) называется *группой классов вычетов по модулю n*. Принадлежность двух чисел $k,m \in \mathbb{Z}$ одному и тому же классу $[k]_n = [m]_n$ традиционно записывается в виде $k \equiv m \pmod n$ (читается k сравнимо с m по модулю n).

5.2. Нормальные подгруппы. Согласно теореме о строении гомоморфизма (n° 5.1.1) подгруппа $H \subset G$, являющаяся ядром гомоморфизма $G \xrightarrow{\varphi} G'$, обладает замечательным свойством — её левые и правые смежные классы совпадают друг с другом: $\forall\, g \in G\quad gH = Hg$. Последнее равенство можно переписать по-другому:

$$\forall\, g{\in}G\quad gHg^{-1} = H\,. \tag{5-6}$$

Подгруппы $H \subset G$, обладающие этим свойством, называются *нормальными* (или *инвариантными*) подгруппами, что обозначается как $H \lhd G$.

5.2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Подгруппа $H \subset G$ тогда и только тогда является ядром какого-нибудь гомоморфизма $G \xrightarrow{\varphi} G'$, когда она нормальна.*

Доказательство. Необходимость уже была установлена в (n° 5.1.1). Докажем достаточность. Возьмём в качестве G' множество G/H всех различных левых смежных классов gH подгруппы H и зададим на нём структуру группы так, чтобы сюрьекция

$$G \xrightarrow{\;g\mapsto gH\;} G/H\,, \tag{5-7}$$

сопоставляющая каждому $g \in G$ смежный класс gH, в котором он лежит, была гомоморфизмом групп. Это требование не оставляет иного выбора, как задать операцию на смежных классах формулой

$$(g_1H)\cdot(g_2H) \stackrel{\text{def}}{=} g_1g_2H\,. \tag{5-8}$$

Единственная неприятность заключается в том, что один и тот же смежный класс может по-разному записываться в виде gH — в качестве g можно взять *любой* из $|H|$ элементов этого класса. Поэтому мы должны убедиться в том, что заменяя запись g_1H другой записью f_1H, задающей тот же самый смежный класс $f_1H = g_1H$, а запись g_2H — записью f_1H с $f_2H = g_2H$, мы получим класс f_1f_2H равный классу g_1g_2H — иначе определение (5-8) будет некорректно.

Итак, пусть $f_1H = g_1H$ и $f_2H = g_2H$. Тогда элементы $g_1^{-1}f_1$ и $g_2^{-1}f_2$ оба лежат в H. В силу нормальности H $\forall\, g \in G\;\; h \in H\;\; ghg^{-1} \in H$. Беря $g = g_2^{-1}$, $h = g_1^{-1}f_1$, получим элемент $g_2^{-1}\left(g_1^{-1}f_1\right)g_2 \in H$. Умножая его справа на $g_2^{-1}f_2$, получаем $g_2^{-1}\left(g_1^{-1}f_1\right)g_2\left(g_2^{-1}f_2\right) = g_2^{-1}g_1^{-1}f_1f_2 = (g_1g_2)^{-1}(f_1f_2) \in H$. Следовательно, $(g_1g_2)\,H = (f_1f_2)\,H$, что и требовалось. Тем самым, формула (5-8) корректно наделяет множество левых смежных классов G/H операцией умножения, для которой отображение (5-7) является гомоморфизмом.

Остаётся проверить, что это умножение превращает G/H в группу, т. е. удовлетворяет свойствам (4-4)–(4-6). Ассоциативность умножения (5-8) вытекает из ассоциативности умножения в G:

$$\begin{aligned}((g_1H)\cdot(g_2H))\cdot(g_3H) &= (g_1g_2H)\cdot(g_3H) = (g_1g_2)g_3H = \\ &= g_1(g_2g_3)H = (g_1H)\cdot(g_2g_3H) = (g_1H)\cdot((g_2H)\cdot(g_3H))\,.\end{aligned}$$

[1] отметим, что этот остаток, умноженный на $2\pi/n$, как раз и задаёт угол поворота, в который переходят числа k и m при гомоморфизме (5-4)

Из правила (5-8) немедленно вытекает, что единичным элементом в G/H является класс единицы $eH = H$, а обратным к произвольному классу gH является класс $g^{-1}H$. Предложение полностью доказано. □

5.3. Факторизация. Построенная в доказательстве предложения (n° 5.2.1) группа G/H, образованная левыми смежными классами gH нормальной подгруппы $H \lhd G$ с умножением (5-8) :

$$(g_1H)\cdot(g_2H) \overset{\text{def}}{=} g_1g_2H\ . \tag{5-9}$$

называется *фактор группой* G по подгруппе $H \lhd G$, а гомоморфизм (5-7)

$$G \xrightarrow{g\mapsto gH} G/H\ ,$$

отображающий каждый элемент группы в тот смежный класс, где он лежит, называется *гомоморфизмом факторизации*. Иными словами, гомоморфизм факторизации «склеивает» каждый смежный класс подгруппы H в одну точку, а формула (5-9) задаёт на этих точках структуру группы. Подчеркнём, что *корректность* формулы (5-9), т. е. независимость результата от выбора представителей g_1, g_2 в смежных классах, *равносильна* тому, что подгруппа H нормальна в G. В самом деле, если формула (5-9) корректна, то G/H, как мы видели, автоматически является группой, а отображение (5-7) — гомоморфизмом групп с ядром H. Поэтому по теореме о строении гомоморфизма (n° 5.1.1) подгруппа H *должна быть* нормальной.

Если группа G не коммутативна, то далеко не всякая подгруппа $H \subset G$ является нормальной.

5.3.1. Пример: неинвариантность стабилизатора одной точки неодноточечной орбиты. Рассмотрим в симметрической группе $G = \mathfrak{S}_4$ подгруппу $H = \mathrm{Stab}(1)$, состоящую из всех перестановок, переводящих элемент 1 в себя. Эта подгруппа не инвариантна: если в условии (5-6) взять в качестве g транспозицию $g = g^{-1} = \langle 1,\, 2\rangle$, то в качестве $g\cdot H\cdot g^{-1} = g\cdot \mathrm{Stab}(1)\cdot g^{-1} = \mathrm{Stab}(2)$ мы получим подгруппу, состоящую из всех перестановок, переводящих в себя элемент 2.

Упражнение 5.3. Убедитесь, что перестановка σ оставляет на месте элемент 1 тогда и только тогда, когда перестановка $\langle 1,\, 2\rangle\cdot\sigma\cdot\langle 1,\, 2\rangle$ оставляет на месте элемент 2.

При этом ясно, что $\mathrm{Stab}(2) \neq \mathrm{Stab}(1)$, поскольку, например, $\langle 2,\, 3\rangle$ лежит в $\mathrm{Stab}(1)$, но не лежит в $\mathrm{Stab}(2)$. Отметим, что сделанное выше замечание о том, что корректность формулы (5-9) равносильна нормальности подгруппы H означает, что на множестве смежных классов $\mathfrak{S}_4/H$, которое согласно (n° 3.1.2) можно отождествить с орбитой $\{1, 2, 3, 4\}$ элемента 1, не существует такой структуры группы, что отображение, сопоставляющее перестановке её значение на элементе 1 : $\mathfrak{S}_4 \xrightarrow{\sigma\mapsto\sigma(1)} \{1, 2, 3, 4\}$, являлось бы гомоморфизмом групп.

Упражнение 5.4. Убедитесь в этом.

Упражнение 5.5. Покажите, что в абелевой группе любая подгруппа нормальна.

5.4. Разложение гомоморфизма. Теорема о строении гомоморфизма (n° 5.1.1) утверждает, что всякий гомоморфизм групп $G \xrightarrow{\varphi} G'$ раскладывается в композицию эпиморфизма факторизации $G \xrightarrow{\varphi''} G/\ker(\varphi)$, отображающего каждый элемент $g \in G$ в его смежный класс $g{\cdot}\ker(\varphi) = \ker(\varphi){\cdot}g$, и мономорфизма $G/\ker(\varphi) \xhookrightarrow{\varphi'} G'$, отображающего класс $g{\cdot}\ker(\varphi) = \ker(\varphi){\cdot}g$ в элемент $\varphi(g) \in \mathrm{im}\,(\varphi) \subset G'$. Иными словами, мы имеем *коммутативную диаграмму*[1] гомоморфизмов групп

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, two heads, "\varphi''"'] & & G' \\ & G/\ker(\varphi) \simeq \mathrm{im}\,(f) \arrow[ur, hook, "\varphi'"'] & \end{tikzcd} \tag{5-10}$$

Диаграмма (5-10) называется *каноническим разложением* гомоморфизма $G \xrightarrow{\varphi} G'$.

[1] диаграмма, состоящая из множеств и отображений между ними, называется коммутативной, если композиция отображений вдоль любых двух путей, ведущих из любого узла этой диаграммы в любой другой её узел одинакова; в нашем случае коммутативность диаграммы (5-10) означает, что $\varphi = \varphi'\varphi''$

5.5. Внутренние автоморфизмы. Чтобы прояснить смысл условия нормальности $gHg^{-1} = H$, свяжем с каждым элементом $g \in G$ отображение

$$\mathrm{Ad}_g : G \xrightarrow{h \mapsto ghg^{-1}} G\,, \tag{5-11}$$

которое называется *сопряжением*[1] при помощи g (или *внутренним автоморфизмом*, ассоциированным с g).

Упражнение 5.6. В группе G всех движений плоскости обозначим через σ_ℓ и $\tau_O^{(\alpha)}$ осевую симметрию относительно прямой ℓ и поворот на угол α вокруг точки O. Убедитесь, что сопрягая их произвольным собственным движением g мы получим $g\sigma_\ell g^{-1} = \sigma_{g(\ell)}$ и $g\tau_O^{(\alpha)}g^{-1} = \tau_{g(O)}^{(\alpha)}$. Что изменится, если движение g будет несобственным?

Упражнение 5.7. Покажите, что для любой подгруппы $H \subset G$ и любого элемента $g \in G$ множество

$$\mathrm{Ad}_g(H) = gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$$

также является подгруппой в G (она называется *сопряжённой* к H посредством g).

Отображение Ad_g является биективным гомоморфизмом из группы G в себя:

$$\mathrm{Ad}_g(h_1h_2) = gh_1h_2g^{-1} = gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = \mathrm{Ad}_g(h_1)\mathrm{Ad}_g(h_2)\,,$$
$$\mathrm{Ad}_g^{-1} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\,,\ \text{т.к. } \forall\, h{\in}G\ \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\mathrm{Ad}_g(h) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(ghg^{-1}) = g^{-1}ghg^{-1}g = h\,.$$

Кроме того, оно гомоморфно зависит от g, т. е. $\mathrm{Ad}_{g_1g_2} = \mathrm{Ad}_{g_1}\mathrm{Ad}_{g_2}$, поскольку

$$\forall\, h{\in}G\ \mathrm{Ad}_{g_1g_2}(h) = g_1g_2h(g_1g_2)^{-1} = g_1g_2hg_2^{-1}g_1^{-1} = \mathrm{Ad}_{g_1}(g_2hg_2^{-1}) = \mathrm{Ad}_{g_1}\left(\mathrm{Ad}_{g_2}(h)\right)\,.$$

Таким образом, сопоставление элементу $g \in G$ автоморфизма сопряжения $G \xrightarrow{\mathrm{Ad}_g} G$ является гомоморфизмом

$$\mathrm{Ad} : G \xrightarrow{g \mapsto \mathrm{Ad}_g} \mathrm{Aut}\,(G)\,. \tag{5-12}$$

Этот гомоморфизм называется *присоединённым представлением* группы G. В отличие от левого и правого регулярных представлений присоединённое представление, вообще говоря, не является точным. Например, если группа G абелева, все внутренние автоморфизмы (5-11) будут тождественными, и ядро присоединённого представления в этом случае совпадает со всей группой. В общем случае $\ker(\mathrm{Ad})$ состоит из всех элементов $g \in G$, которые удовлетворяют условию $ghg^{-1} = h\ \ \forall\, h \in G$ или, что равносильно, $gh = hg$. Подгруппа элементов, перестановочных со всеми элементами группы G называется *центром* группы G и обозначается

$$Z(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \ \forall\, h{\in}G\ \ gh = hg\}\,.$$

Таким образом, $\ker(\mathrm{Ad}) = Z(G)$ — это центр группы G. Образ присоединённого представления $\mathrm{im}\,(\mathrm{Ad}) = \mathrm{Ad}_G \subset \mathrm{Aut}\,(G)$ называется *группой внутренних автоморфизмов* группы G и обозначается $\mathrm{Int}(G)$. Автоморфизмы $\varphi \in \mathrm{Aut}\,(G) \smallsetminus \mathrm{Int}(G)$ называются *внешними*.

Упражнение 5.8. Покажите, что $Z(\mathfrak{S}_n) = \{e\}$, и тем самым, присоединённое представление симметрической группы является точным.

Орбиты присоединённого представления группы G называются *классами сопряжённости*. Иными словами, класс сопряжённости

$$\mathrm{Ad}_G(f) = \{gfg^{-1} \mid g \in G\}$$

данного элемента $f \in G$ представляет собою множество всех элементов, получающихся при сопряжении элемента f всевозможными элементами $g \in G$. Стабилизатором элемента $f \in G$ относительно присоединённого действия является подгруппа

$$C(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gfg^{-1} = f\} = \{g \in G \mid gf = fg\} = \{g \in G \mid fgf^{-1} = g\}\,,$$

[1]обозначение Ad является сокращением от *adjunction*

которую можно иначе описать как множество всех элементов, коммутирующих с f, или как множество всех элементов, остающихся на месте при сопряжении элементом f. Эта подгруппа также называется *централизатором* элемента f. Из формулы для длины орбиты вытекает, что число элементов, сопряжённых f, равно отношению

$$|\operatorname{Ad}_G(f)| = |G|/|C(f)| \tag{5-13}$$

5.5.1. Пример: сопряжения в группе перестановок. При сопряжении цикла $\tau = \langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle \in \mathfrak{S}_n$ перестановкой $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ получится цикл

$$g \cdot \langle i_1, i_2, \dots, i_k \rangle \cdot g^{-1} = \langle g(i_1),\, g(i_2),\, \dots\,,\, g(i_k) \rangle\,, \tag{5-14}$$

переставляющий g-образы тех элементов, которые переставлялись исходным циклом. В самом деле, если элемент $m \in \{1,\, 2,\, \dots\,,\, n\}$ лежит в множестве $\{g(i_1),\, g(i_2),\, \dots\,,\, g(i_k)\}$ — скажем, $m = g(i_\nu)$, то левая часть формулы (5-14) действует на него как

$$g(i_\nu) \xmapsto{g^{-1}} i_\nu \xmapsto{\tau} i_{\nu+1} \xmapsto{g} g(i_{\nu+1})\,,$$

т. е. в точности как правая. Если же $m \notin \{g(i_1),\, g(i_2),\, \dots\,,\, g(i_k)\}$, и тем самым, $g^{-1}(m) \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, то левая часть (5-14), так же как и правая, оставит элемент m на месте:

$$\begin{array}{ccccccc} m & \xmapsto{g^{-1}} & g^{-1}(m) & \xmapsto{\tau} & g^{-1}(m) & \xmapsto{g} & m\,. \\ & & \rotatebox{90}{$\notin$} & & & & \\ & & \{i_1, i_2, \dots, i_k\} & & & & \end{array}$$

Поскольку сопряжение является гомоморфизмом, действие Ad_g на произвольную перестановку $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, распадающуюся в произведение независимых циклов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$, будет состоять в применении перестановки g к элементам каждого из циклов: $g\tau_1\tau_2 \,\cdots\, \tau_s g^{-1} = g\tau_1 g^{-1} \cdot g\tau_2 g^{-1} \cdot \,\cdots\, \cdot g\tau_s \cdot g^{-1}$. Например, результатом сопряжения перестановки

$$\sigma = (6,\, 5,\, 4,\, 1,\, 8,\, 3,\, 9,\, 2,\, 7) = \langle 1,6,3,4 \rangle \langle 2,5,8 \rangle \langle 7,9 \rangle = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & 8 & \\ \cline{1-3} 7 & 9 & & \\ \cline{1-2} \end{array}$$

перестановкой $g = (2,\, 1,\, 5,\, 4,\, 3,\, 9,\, 8,\, 7,\, 6)$ будет перестановка

$$\begin{aligned} \operatorname{Ad}_g(\sigma) = g\sigma g^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 9 & 5 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 7 & \\ \cline{1-3} 8 & 6 & & \\ \cline{1-2} \end{array} &= \\ &= \langle g(1), g(6), g(3), g(4) \rangle \cdot \langle g(2), g(5), g(8) \rangle \cdot \langle g(7), g(9) \rangle = (3,\, 9,\, 7,\, 2,\, 4,\, 8,\, 1,\, 6,\, 5)\,. \end{aligned}$$

Иными словами, присоединённое действие группы перестановок на себе совпадает с действием, которое мы рассматривали в примере (n° 3.2.1), когда подсчитывали число перестановок заданного циклового типа: если разложить произвольную перестановку $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ в произведение независимых циклов и записать элементы этих циклов по строкам диаграммы Юнга, изображающей цикловой тип перестановки σ, то переход от σ к $g\sigma g^{-1}$ будет заключаться в применении перестановки g ко всем элементам диаграммы.

Таким образом, класс сопряжённости $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ перестановки σ состоит из всех перестановок, имеющих тот же цикловой тип, что и σ, и орбиты присоединённого представления симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга λ веса n. Орбита $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{S}_n}(\lambda)$, отвечающая диаграмме λ с m_1 строками длины 1, m_2 строками длины 2, … , m_n строками длины n состоит из

$$|\operatorname{Ad}_{\mathfrak{S}_n}(\lambda)| = \frac{n!}{z_\lambda} = \frac{n!}{1^{m_1} \cdot m_1! \cdot 2^{m_2} \cdot m_2! \cdot \,\cdots\, \cdot n^{m_n} \cdot m_n!}$$

перестановок, а центализатор $C(\lambda)$ каждой перестановки из этой орбиты состоит из

$$|C(\lambda)| = z_\lambda = 1^{m_1} \cdot m_1! \cdot 2^{m_2} \cdot m_2! \cdot \,\cdots\, \cdot n^{m_n} \cdot m_n! = \prod_{\alpha=1}^{n} \alpha^{m_\alpha} m_\alpha!$$

перестановок.

Упражнение 5.9. Убедитесь, что перестановку $g\sigma g^{-1}$, сопряжённую перестановке $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathfrak{S}_n$, можно также описать как перестановку, переводящую каждый элемент $g(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$ в элемент[1] $g(\sigma_i)$.

Упражнение 5.10. Покажите, что стабилизаторы любых двух точек, лежащих в одной орбите группы преобразований $G \subset \operatorname{Aut}(X)$, сопряжены посредством произвольного элемента, переводящего одну из этих точек в другую: если $y = g(x)$, то $\operatorname{Stab}(y) = g \cdot \operatorname{Stab}(x) \cdot g^{-1}$.

5.5.2. Пример: сопряжения в группах фигур. Если движение g переводит точки A, B в точки $C = g(A)$ и $D = g(B)$, то преобразование $g\tau g^{-1}$, сопряжённое к повороту τ вокруг оси AB на угол α против часовой стрелки (если смотреть в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$), представляет собою поворот вокруг оси CD на угол α против часовой стрелки (если смотреть в направлении вектора $\overrightarrow{CD}$), когда движение g собственное, и на угол $-\alpha$, когда g несобственное. Таким образом, сопряжение элементом g в собственной группе фигуры переводит каждый поворот τ в поворот на такой же угол, но относительно оси, получающейся применением g к оси поворота τ.

5.5.3. Геометрическая характеризация нормальности. Рассмотренные выше примеры показывают, что условие $gHg^{-1} = H$ для подгруппы H какой-либо группы преобразований $G \subset \operatorname{Aut}(X)$ означает, что H «симметрична» по отношению ко всем преобразованиям из G в том смысле, что если в H имеется преобразование, как-то специально ведущее себя по отношению к какому-либо набору точек $x_1, x_2, \dots, x_m$, то в H должны быть и преобразования, столь же специально ведущие себя по отношению ко всем наборам точек вида $g(x_1)$, $g(x_2)$, … , $g(x_m)$ с любыми $g \in G$. Рассмотренная в (n° 5.3) подгруппа $H = \operatorname{Stab}(1) \subset \mathfrak{S}_4$ не была инвариантной, поскольку задавалась свойством, привязанным к конкретной точке 1. Сопряжение транспозицией $g = \langle 1, 2\rangle$ переводило все перестановки из H в перестановки, обладающие тем же свойством, но уже по отношению к точке 2. Напротив, диэдральная подгруппа $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{S}_4$, состоящая из четырёх перестановок $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 1, 4, 3)$, $(3, 4, 1, 2)$, $(4, 3, 2, 1)$ (являющаяся ядром эпиморфизма $\mathfrak{S}_4 \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_3$ из (n° 4.1.2)), задаётся условием, симметричным по отношению ко всем перестановкам чисел $1, 2, 3, 4$ — она состоит из тождественного отображения и всех перестановок циклового типа $\boxplus$. Увидеть, что подгруппа $H \subset G$ инвариантна в простых случаях помогает следующая геометрическая переформулировка предложения (n° 5.2.1):

Упражнение 5.11. Покажите, что подгруппа $H \subset G$ нормальна тогда и только тогда, когда существует действие группы G на некотором множестве X, в котором H совпадает с подгруппой всех пребразований, оставляющих каждую точку множества X на месте.

5.6. Простые группы. Группа G называется *простой*, если она не содержит нормальных подгрупп, отличных от $\{e\}$ и G. Например, любая группа простого порядка проста, поскольку по теореме Лагранжа вообще не содержит никаких подгрупп кроме $\{e\}$ и G. Согласно предложению (n° 5.2.1) простота группы G равносильна тому, что всякий гомоморфизм $G \longrightarrow G'$ либо является вложением, либо отображает всю группу G в единицу $e' \in G'$.

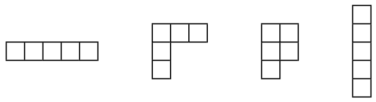
Одним из крупных достижений математики XX века было создание полного списка всех конечных простых групп. В этом курсе мы обсудим многие из идей, использовавшихся при построении этого списка, а также выясним, каким образом произвольные группы можно «собирать» из простых. Однако, это будет чуть позже, а пока что мы закончим наше первое знакомство с группами указанием одной бесконечной серии простых конечных групп, играющей важную роль в теории алгебраических уравнений.

5.6.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Знакопеременная группа $\mathfrak{A}_5$ проста.*

Доказательство. Пусть $H \lhd \mathfrak{A}_5$. Тогда вместе с каждой перестановкой $g \in H$ в подгруппу H войдут и все перестановки сопряжённые g в $\mathfrak{A}_5$. Перестановки, сопряжённые g в полной симметрической группе $\mathfrak{S}_5$ — это все перестановки того же циклового типа, что и g (см. пример (n° 5.5.1)). Так как g чётна, её

[1]поскольку $g(i)$, так же как и i, перебирает без повторов все элементы множества $\{1, 2, \dots, n\}$, описание $g(i) \longmapsto g(\sigma_i)$ «ничем не хуже» описания $i \longmapsto \sigma_i$ — оно отличается от него «переобозначением» элементов в соответствии с перестановкой g

цикловой тип представляет собою диаграмму Юнга веса 5 с чётным количеством строк чётной длины (см. (n° 4.1.3)). Всего имеется 4 таких диаграммы



отвечающие, соответственно, циклам длины 5, циклам длины 3, парам независимых транспозиций и тождественному преобразованию. Если воспользоваться изоморфизмом $\mathfrak{A}_5$ с группой вращений додекаэдра (см. пример (n° 4.2.1)), то можно описать эти классы, соответственно, как повороты на углы $2\pi k/5$ вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней, повороты на углы $\pm 2\pi/3$ вокруг осей, проходящих через противоположные вершины, и повороты на $180°$ вокруг осей, проходящих через середины противоположных рёбер. Поскольку любая упорядоченная пара противоположных вершин A, B может быть переведена вращением додекаэдра в любую другую такую пару (в том числе и в пару B, A), все повороты на $\pm 2\pi/3$ сопряжены между собою в собственной группе додекаэдра, а стало быть, все циклы длины 3 образуют один класс сопряжённости не только в $\mathfrak{S}_5$, но и в $\mathfrak{A}_5$. По тем же причинам сопряжены между собою в $\mathfrak{A}_5$ и все пары независимых транспозиций. А вот вращения пятого порядка очевидным образом распадаются на два разных класса: 12 сопряжённых вращений на углы $\pm\pi/5$ и 12 сопряжённых вращений на углы $\pm 2\pi/5$.

Упражнение 5.12. Не прибегая к изоморфизму $\mathfrak{A}_5$ с собственной группой додекаэдра, а пользуясь только явными вычислениями в группе перестановок в стиле примера (n° 5.5.1), дайте другое доказательство тому, что в $\mathfrak{A}_5$ все циклы длины 3, а также все пары независимых транспозиций сопряжены между собою, а циклы длины 5 распадается на два класса сопряжённости, содержащие по 12 элементов и состоящие, соответственно, из циклов, сопряжённых $\langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle$, и циклов, сопряжённых $\langle 2, 1, 3, 4, 5\rangle$.

Итак, в знакопеременной группе $\mathfrak{A}_5$ имеется ровно 5 классов сопряжённости: класс единицы, содержащий 1 элемент, класс циклов длины 3, содержащий 20 элементов, класс пар независимых транспозиций, содержащий 15 элементов, и два класса циклов длины 5, содержащие по 12 элементов. Поскольку $e \in H$, а каждый из четырёх оставшихся классов либо входит в H целиком, либо не пересекается с H, порядок подгруппы H равен

$$|H| = 1 + 12\varepsilon_1 + 12\varepsilon_2 + 20\varepsilon_3 + 15\varepsilon_4 \,, \tag{5-15}$$

где каждый из коэффициентов ε_k равен либо 1, либо 0. С другой стороны, по теореме Лагранжа (n° 2.2.1) $|H|$ является делителем $|\mathfrak{A}_5| = 3 \cdot 4 \cdot 5$.

Упражнение 5.13. Убедитесь, что правая часть формулы (5-15) делит 60 только в двух случаях: когда все $\varepsilon_k = 1$ и когда все $\varepsilon_k = 0$

Таким образом, нормальные подгруппы в $\mathfrak{A}_5$ исчерпываются единичной подгруппой и всей группой $\mathfrak{A}_5$, что и требовалось установить. □

Упражнение 5.14. Докажите, что все знакопеременные группы $\mathfrak{A}_n$ с $n > 5$ тоже просты.

Указание. Воспользуйтесь индукцией. Вложите $\mathfrak{A}_{n-1}$ в $\mathfrak{A}_n$ как стабилизатор символа n, и докажите, что нетривиальная нормальная подгруппа в $\mathfrak{A}_n$ обязана иметь нетривиальное пересечение с $\mathfrak{A}_{n-1}$ (автоматически нормальное в $\mathfrak{A}_{n-1}$, что противоречит индуктивному предположению о простоте $\mathfrak{A}_{n-1}$).

Упражнение 5.15. Докажите, что внутренние автоморфизмы составляют подгруппу индекса 2 в группе всех автоморфизмов группы $\mathfrak{A}_5$.

Указание. Всякий автоморфизм $\mathfrak{A}_5$ переводит цикл длины 5 в цикл длины 5 и является внутренним тогда и только тогда, когда переводит циклы длины 5 в сопряжённые циклы длины 5.

Упражнение 5.16*. Постройте внешний автоморфизм симметрической группы $\mathfrak{S}_6$.

Указание. Найдите в $\mathfrak{S}_6$ два разных класса сопряжённости, состоящие из одинакового числа элементов, и попытайтесь «переставить» их друг с другом.