

ОГ1◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $u_3 = (3, -6, 1, 0)$, $u_4 = (1, 0, 0, 0)$, $u_5 = (-18, 19, -4, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, -1, -3, -4)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ1◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & -1/4\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2 & 0 \\ 1/4\sqrt{3} & -3/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ1◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + x_2^2 - 4x_3x_2 - 2x_4x_2 + 7x_3^2 - 2x_4x_3 + 3x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ1◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -6 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 5 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5, -5, -1, 1, 1)$ и $(-8, 11, 4, -4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ1◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ2◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (3, 1, 0, 0)$, $u_3 = (9, 2, 1, 0)$, $u_4 = (13, 6, 2, 0)$, $u_5 = (-16, -6, -2, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (1, 0, -2, -3)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ2◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 1/4\sqrt{3} & 3/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ2◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + 3x_2^2 - 4x_3x_2 - 8x_4x_2 - x_3^2 + 8x_4x_3 + 3x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ2◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5, 2, 3, -1, 1)$ и $(1, -17, -12, 4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ2◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГЗ♦1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-3, 1, 0, 0)$, $u_3 = (14, -7, 1, 0)$, $u_4 = (-12, -3, 2, 0)$, $u_5 = (19, -10, 2, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (-1, 1, -1, -2)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГЗ♦2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГЗ♦3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 2x_2x_1 + 2x_2^2 + 2x_3x_2 + 2x_3^2 - x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГЗ♦4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 12x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(33, -10, 6, 4, -1)$ и $(-24, 10, 0, 5, -5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГЗ♦5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ4◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-7, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-7, 2, 1, 0)$, $u_4 = (-7, -2, 4, 0)$, $u_5 = (12, -4, 0, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, 2, 0, -1)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ4◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ4◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 4x_2x_1 - 2x_3x_1 - 2x_4x_1 + 5x_2^2 - 6x_4x_2 + 4x_3^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ4◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -6 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 1 & -7 & -4 \\ -1 & 4 & 5 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 18x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-16, -5, 4, 2, 1)$ и $(58, 11, -16, -8, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ4◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ5♦1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-12, -1, 1, 0)$, $u_4 = (-12, 8, -1, 0)$, $u_5 = (13, -3, 0, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (1, -2, 1, 0)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ5♦2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/4\sqrt{3} & -1/2 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3} & 0 \\ 1/4\sqrt{3} & -1/4 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q \sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ5♦3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_3x_1 + 8x_3x_2 - 2x_4x_2 - x_3^2 + 8x_4x_3 - 6x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ5♦4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -5 & -6 & 5 & -4 \\ -2 & -6 & -9 & 7 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & -5 & 3 \\ -2 & -4 & -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5, -4, 1, -1, 1)$ и $(10, 7, -4, 4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ5♦5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ6◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-4, 1, 0, 0)$, $u_3 = (7, 0, 1, 0)$, $u_4 = (-8, 5, -1, 0)$, $u_5 = (-13, 9, -3, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (-1, -1, 2, 1)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ6◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4\sqrt{3} & 1/2 \\ -1/2 & 1/2\sqrt{3} & 0 \\ -1/4\sqrt{3} & -1/4 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ6◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_2x_1 + 2x_3x_1 + 5x_2^2 - 6x_3x_2 + 3x_3^2 - 4x_4x_3 + 3x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ6◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(12, -3, -4, -1, 1)$ и $(-27, 3, 16, 4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ6◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ7◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-3, 1, 0, 0)$, $u_3 = (4, 5, 1, 0)$, $u_4 = (8, 16, 4, 0)$, $u_5 = (5, 7, 1, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, 0, -4, 2)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ7◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4\sqrt{3} & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\sqrt{3} & 0 \\ 1/4\sqrt{3} & 1/4 & -1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ7◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 2x_2x_1 + 4x_3x_1 - 2x_4x_1 + 2x_2^2 + 2x_4x_2 + 7x_3^2 - 4x_4x_3$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ7◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-2, 0, 2, 1, -1)$ и $(-34, 30, -5, -10, -5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ7◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ8◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-5, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-6, 5, 1, 0)$, $u_4 = (-8, 5, 2, 0)$, $u_5 = (8, -1, -3, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (1, 1, -3, 3)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ8◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/4\sqrt{3} & -1/2 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3} & 0 \\ 1/4\sqrt{3} & -1/4 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ8◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_2x_1 - 4x_3x_1 - 2x_4x_1 + 3x_2^2 + 10x_3x_2 + 4x_4x_2 + 2x_3^2 - 4x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ8◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -6 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(6, -1, 1, 0, 1)$ и $(-3, -5, -4, 0, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ8◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ9◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (3, 4, 1, 0)$, $u_4 = (1, 7, 2, 0)$, $u_5 = (-3, 4, 0, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (-1, 2, -2, 4)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ9◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ9◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 2x_2x_1 - 4x_3x_1 + 2x_2^2 - 6x_3x_2 - 4x_4x_2 + 6x_3^2 + 4x_4x_3 + 3x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ9◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -5 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & -3 & -5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 10x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-7, -3, 3, -1, 1)$ и $(31, 3, -12, 4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ9◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ10◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (3, 1, 0, 0)$, $u_3 = (7, 5, 1, 0)$, $u_4 = (-14, 1, 1, 0)$, $u_5 = (21, -12, -4, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, -2, -1, 5)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ10◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ10◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 2x_2x_1 + 2x_2^2 + 2x_3x_2 - x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ10◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -6 & -6 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & -10 & 2 \\ 2 & -6 & -10 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(0, -5, 2, 1, 1)$ и $(-6, 11, -8, -4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ10◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ11◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (13, -2, 1, 0)$, $u_4 = (3, -6, -2, 0)$, $u_5 = (0, 7, 3, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (1, -1, 0, -5)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ11◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 1/4\sqrt{3} & 3/4 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ11◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 4x_2x_1 + 4x_3x_1 - 4x_4x_1 + 3x_2^2 + 4x_3x_2 - 12x_4x_2 - x_3^2 - 20x_4x_3 - 5x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ11◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(3, -5, -2, 3, -1)$ и $(6, -10, -10, 0, -5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ11◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ12◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0, 0)$, $u_3 = (10, -3, 1, 0)$, $u_4 = (-2, 0, -1, 0)$, $u_5 = (10, -5, -4, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (-1, 0, 1, -4)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ12◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & -1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2 & 0 \\ -1/4\sqrt{3} & 3/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ12◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 5x_2^2 + 2x_4x_2 + 6x_3^2 - 6x_4x_3 + x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ12◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & -10 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(7, 0, -3, -1, 1)$ и $(-7, -9, 12, 4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ12◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ13◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (4, 1, 0, 0)$, $u_3 = (13, 0, 1, 0)$, $u_4 = (17, -4, 3, 0)$, $u_5 = (-10, 8, -4, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, 1, 2, -3)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ13◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & -1/2\sqrt{3} & -1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & 1/2 & -3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ13◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 2x_3x_1 + 2x_4x_1 + x_2^2 + 4x_3x_2 + 2x_4x_2 + 4x_3^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ13◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -6 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(7, -8, 3, -1, 1)$ и $(-16, 23, -12, 4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ13◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ14◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-3, 1, 0, 0)$, $u_3 = (3, 0, 1, 0)$, $u_4 = (-8, 4, -3, 0)$, $u_5 = (12, -2, 4, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (1, 2, -4, -2)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ14◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2\sqrt{3} & 1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & -1/2 & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ14◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_3x_1 - 2x_4x_1 + 2x_4x_2 - x_3^2 + 8x_4x_3 - 4x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ14◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(7, -2, 1, -1, 1)$ и $(-7, -1, -4, 4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ14◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ15◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-3, 1, 0, 0)$, $u_3 = (4, -1, 1, 0)$, $u_4 = (5, -4, 4, 0)$, $u_5 = (10, -6, 2, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (-1, -2, -3, -1)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ15◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ15◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 4x_2x_1 + 2x_3x_1 + 2x_4x_1 + 5x_2^2 + 4x_3x_2 + 2x_3^2 + 5x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ15◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 3x_4 - 11x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(20, 12, -11, 5, -1)$ и $(46, 30, -25, 10, -5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ15◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ16◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (4, 1, 0, 0)$, $u_3 = (7, -4, 1, 0)$, $u_4 = (7, 6, -1, 0)$, $u_5 = (26, -13, 4, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, -1, -2, 0)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ16◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ16◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 - 2x_4x_1 + 5x_2^2 - 6x_3x_2 + 4x_3^2 - 10x_4x_3 + 3x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ16◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-2, -3, 0, 1, 1)$ и $(11, 3, 0, -4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ16◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ17◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-8, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-8, 3, 1, 0)$, $u_4 = (19, -3, 2, 0)$, $u_5 = (-4, 0, -1, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (1, 0, -1, 1)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ17◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ17◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 2x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_4x_1 - 6x_3x_2 + 2x_3^2 + 12x_4x_3 - x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ17◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -9 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 8x_4 + 26x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(28, 9, -4, -2, 1)$ и $(-118, -45, 16, 8, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ17◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ18◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-5, 1, 0, 0)$, $u_3 = (2, 0, 1, 0)$, $u_4 = (7, -4, 1, 0)$, $u_5 = (4, -4, 2, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (-1, 1, 0, 2)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ18◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4\sqrt{3} \\ -1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ18◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 4x_4x_1 + x_2^2 + 2x_3x_2 + 4x_4x_2 + 2x_3^2 + 4x_4x_3 + 7x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ18◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 4 & -1 & -4 \\ -2 & 4 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1, -3, -2, -2, 1)$ и $(-10, 3, 8, 8, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ18◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ19◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (16, 0, 1, 0)$, $u_4 = (7, -10, -2, 0)$, $u_5 = (-9, 13, 3, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, 2, 1, 3)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ19◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ19◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_2x_1 + 2x_3x_1 + 2x_4x_1 + 5x_2^2 - 4x_3x_2 + 3x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ19◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 8x_5 = 0 \\ x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-4, -2, -1, 1, -1)$ и $(31, 20, -5, -10, -5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ19◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ20◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (5, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-6, -2, 1, 0)$, $u_4 = (17, 4, 3, 0)$, $u_5 = (-5, -2, -4, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (1, -2, 2, 4)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ20◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ20◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_3x_1 + 4x_4x_1 - x_2^2 - 2x_3x_2 + 2x_4x_2 + 2x_3^2 - 8x_4x_3 + x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ20◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(6, -6, 2, 0, 1)$ и $(-12, 15, -8, 0, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ20◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ21◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-2, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-3, -6, 1, 0)$, $u_4 = (2, 8, -2, 0)$, $u_5 = (3, 2, -1, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (-1, -1, -4, 5)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ21◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ21◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 2x_2x_1 + 2x_3x_1 + 2x_2^2 - 2x_3x_2 + 2x_4x_2 + 6x_3^2 + 4x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ21◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -6 & -3 & -4 \\ -2 & 4 & -3 & -4 & -8 \\ -2 & 4 & -4 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 13x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(15, 7, -4, 2, 1)$ и $(-66, -37, 16, -8, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ21◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ22◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-6, 1, 0, 0)$, $u_3 = (10, 1, 1, 0)$, $u_4 = (-10, -8, -3, 0)$, $u_5 = (4, -13, -4, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, 0, -3, -5)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ22◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ22◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 2x_3x_1 - 4x_4x_1 + x_2^2 + 2x_3x_2 + 2x_4x_2 + x_3^2 - 6x_4x_3$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ22◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & -7 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2, 6, -1, 2, 1)$ и $(13, -33, 4, -8, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ22◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ23◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (3, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-4, -5, 1, 0)$, $u_4 = (-6, 3, -1, 0)$, $u_5 = (-2, -18, 4, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (1, 1, -2, -4)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ23◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2\sqrt{3} & 1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & -1/2 & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ23◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 2x_2x_1 + 2x_3x_2 - 4x_4x_2 - 2x_3^2 + 6x_4x_3 - 6x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ23◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-6, -1, -2, 2, -1)$ и $(-39, -20, -10, -5, -5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ23◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ24◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-6, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-16, 3, 1, 0)$, $u_4 = (15, -8, 4, 0)$, $u_5 = (11, -7, 3, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (-1, 2, -1, -3)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ24◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2\sqrt{3} & -1/4\sqrt{3} \\ -1/4\sqrt{3} & 1/2 & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ24◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_2x_1 + 2x_4x_1 + 5x_2^2 - 2x_3x_2 - 4x_4x_2 + 2x_3^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ24◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & -6 & 4 \\ -2 & 3 & -3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1, 0, -2, -1, 1)$ и $(-1, -9, 8, 4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ24◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ25◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1, 0)$, $u_4 = (11, -16, -3, 0)$, $u_5 = (-3, 3, 0, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, -2, 0, -2)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ25◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & -1/2\sqrt{3} & -1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & 1/2 & -3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ25◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_4x_1 + 5x_2^2 - 2x_3x_2 - 10x_4x_2 - 2x_4x_3$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ25◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & -6 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 - 6x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-4, -2, 2, -1, 1)$ и $(10, -1, -8, 4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ25◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ26◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-3, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (9, -5, -1, 0)$, $u_5 = (6, 4, 2, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (1, -1, 1, -1)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ26◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2\sqrt{3} & 1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & -1/2 & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ26◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 4x_2x_1 + 4x_3x_1 - 4x_4x_1 + 3x_2^2 + 8x_3x_2 - 6x_4x_2 + 3x_3^2 - 8x_4x_3 + 2x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ26◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(3, -1, 1, -1, 1)$ и $(-9, -5, -4, 4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ26◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ27◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-7, 1, 0, 0)$, $u_3 = (6, -4, 1, 0)$, $u_4 = (-4, -9, 4, 0)$, $u_5 = (10, 7, -4, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (-1, 0, 2, 0)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ27◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ27◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 2x_2x_1 - 4x_3x_1 + 2x_2^2 - 2x_3x_2 + 4x_4x_2 + 6x_3^2 + 8x_4x_3 + 7x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ27◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & -1 & -2 & 5 \\ -2 & 5 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(13, 3, -2, 3, -1)$ и $(11, 0, 5, 0, -5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ27◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ28◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (4, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-7, -7, 1, 0)$, $u_4 = (18, 16, -4, 0)$, $u_5 = (3, 3, 0, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, 1, -4, 1)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ28◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ28◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 2x_3x_1 + 4x_4x_1 + x_2^2 - 2x_4x_2 - 6x_4x_3 + 3x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ28◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -6 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(6, 4, -3, 1, 1)$ и $(-30, -25, 12, -4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ28◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ29◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-2, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-3, 5, 1, 0)$, $u_4 = (10, -2, 1, 0)$, $u_5 = (0, 7, 2, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (1, 2, -3, 2)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ29◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ29◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_2x_1 - 4x_3x_1 - 2x_4x_1 + 3x_2^2 + 6x_3x_2 + 2x_3^2 - 2x_4x_3 - 5x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ29◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -4 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & -6 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-1, -1, -2, 1, 1)$ и $(-2, -5, 8, -4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ29◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ30◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-13, 6, 1, 0)$, $u_4 = (-7, 9, 2, 0)$, $u_5 = (-1, -3, -1, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (-1, -2, -2, 3)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ30◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4\sqrt{3} \\ -1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ30◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 4x_2x_1 + 2x_3x_1 - 4x_4x_1 + 5x_2^2 + 4x_3x_2 - 10x_4x_2 + 2x_3^2 - 6x_4x_3 + 5x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ30◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5, -3, 1, 1, 1)$ и $(1, 3, -4, -4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ30◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ31◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0, 0)$, $u_3 = (5, 1, 1, 0)$, $u_4 = (-1, 7, -3, 0)$, $u_5 = (-9, 0, -3, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, -1, -1, 4)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ31◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & -1/2\sqrt{3} & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ31◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 5x_2^2 + 4x_3x_2 + 2x_4x_2 + 2x_4x_3 - x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ31◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2, 1, 2, 1, -1)$ и $(16, -25, -20, -10, -5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ31◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ32◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $u_3 = (0, -2, 1, 0)$, $u_4 = (3, -2, 0, 0)$, $u_5 = (-1, -3, 0, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (1, 0, 0, 5)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ32◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & 1/2\sqrt{3} & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ32◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 2x_3x_1 + 4x_4x_1 - x_2^2 - 2x_4x_2 - 2x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ32◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & -5 & -6 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 6 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2, -1, -1, -1, 1)$ и $(-14, -5, 4, 4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ32◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ33◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-4, 6, 1, 0)$, $u_4 = (-20, -4, -4, 0)$, $u_5 = (5, 7, 3, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (-1, 1, 1, -5)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ33◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & -1/2\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ33◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 2x_2x_1 + 2x_2^2 - 2x_3x_2 - 4x_4x_2 + 2x_3^2 + 7x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ33◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-3, -5, -1, 0, 1)$ и $(15, 11, 4, 0, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ33◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ34◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-5, -4, 1, 0)$, $u_4 = (4, 3, -1, 0)$, $u_5 = (14, 4, 0, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, 2, 2, -4)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ34◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/2\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ34◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + 2x_2^2 + 8x_3x_2 - 6x_4x_2 + 7x_3^2 - 14x_4x_3 + 3x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ34◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & -3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 14x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(20, -3, -4, 1, 1)$ и $(-50, 3, 16, -4, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ34◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ35◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-2, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-1, -1, 1, 0)$, $u_4 = (3, -3, 1, 0)$, $u_5 = (13, 3, 3, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (1, -2, -4, -3)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ35◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2\sqrt{3} & 1/4\sqrt{3} \\ 1/4\sqrt{3} & -1/2 & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ35◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 4x_2x_1 + 4x_3x_1 - 4x_4x_1 + 3x_2^2 + 6x_3x_2 - 12x_4x_2 + 2x_3^2 - 14x_4x_3 - 2x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ35◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -6 & -3 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & -6 & 5 \\ 2 & -3 & -6 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 9x_5 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(9, -3, 1, 5, -1)$ и $(36, 0, 5, 10, -5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ35◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ36◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-2, 1, 0, 0)$, $u_3 = (2, 8, 1, 0)$, $u_4 = (19, -13, -4, 0)$, $u_5 = (18, -15, -4, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (-1, -1, -3, -2)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ36◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2\sqrt{3} & -1/4\sqrt{3} \\ -1/4\sqrt{3} & 1/2 & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т.е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ36◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 2x_4x_1 + 5x_2^2 - 8x_4x_2 + 6x_3^2 + 10x_4x_3 + 8x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ36◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -9 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 4x_4 - 9x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-5, 1, 4, 2, 1)$ и $(32, -13, -16, -8, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ36◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ37◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-6, 6, 1, 0)$, $u_4 = (10, -6, -4, 0)$, $u_5 = (15, -7, -3, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, 0, -2, -1)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ37◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2\sqrt{3} & 1/2 \\ 1/2 & 1/4\sqrt{3} & -3/4 \\ -1/2\sqrt{3} & 1/4 & -1/4\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ37◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 2x_4x_1 + 5x_2^2 - 4x_3x_2 - 2x_4x_2 + 7x_3^2 + 4x_4x_3 - 3x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ37◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-2, -3, -3, -2, 1)$ и $(20, 3, 12, 8, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ37◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ38◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-5, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-16, 2, 1, 0)$, $u_4 = (3, 1, -1, 0)$, $u_5 = (0, 4, -2, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (1, 1, -1, 0)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ38◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2\sqrt{3} & -1/2 \\ -1/2 & 1/4\sqrt{3} & 3/4 \\ 1/2\sqrt{3} & 1/4 & 1/4\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ38◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + 3x_2^2 - 10x_3x_2 - 12x_4x_2 + 2x_3^2 + 4x_4x_3 - x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ38◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5, 1, -3, 2, 1)$ и $(10, -13, 12, -8, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ38◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ39◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (3, -5, 1, 0)$, $u_4 = (7, 4, -1, 0)$, $u_5 = (-19, -16, 4, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (-1, 2, 0, 1)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ39◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/2\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ39◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 - 2x_2x_1 + 4x_3x_1 + 2x_4x_1 + 2x_2^2 - 8x_3x_2 - 4x_4x_2 + 9x_3^2 + 12x_4x_3 + 5x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ39◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-5, 0, -6, 2, -1)$ и $(-19, -15, 0, -5, -5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ39◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ40◊1. Найдите в линейной оболочке векторов $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (3, 1, 0, 0)$, $u_3 = (-3, 1, 1, 0)$, $u_4 = (-23, 5, 4, 0)$, $u_5 = (1, 3, 1, 0)$ евклидова пространства \mathbb{R}^4 вектор u , ближайший к вектору $v = (0, -2, 1, 2)$, и определите угол и расстояние между u и v .

ОГ40◊2. Оператор, действующий на евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(где $p/q\sqrt{d}$ означает $\frac{p}{q} \cdot \sqrt{d}$, т. е. все иррациональности стоят в числителях). Является ли он поворотом? Является ли он композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота? В любом из этих случаев найдите ось и угол этого поворота.

ОГ40◊3. Напишите матрицу перехода от стандартного базиса \mathbb{R}^4 к ортогональному базису квадратичной формы $x_1^2 + 4x_3x_1 + x_2^2 + 2x_3x_2 + 4x_4x_2 + 4x_3^2 + 6x_4x_3 + 2x_4^2$. Какова размерность максимального изотропного подпространства этой формы?

ОГ40◊4. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & 3 & -7 & 7 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(7, 1, 1, 2, 1)$ и $(-25, -13, -4, -8, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ40◊5. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?