ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА 1.

Письменную работу необходимо **сдать в среду, 28.01**, в начале лекции (будет лекция).
В работе должны быть ваша фамилия, номер варианта, и в каждой задаче в конце решения должен быть написан **ответ**. Числа $a, b < 10$ определяются из того, что
"ваш номер в списке"+"ваш номер группы"x10 $= 10\,a + b$.

Вариант $[ab]$.

1. Дана матрица оператора

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 1 \\ 2a & 2b & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Найти собственные вектора и собственные значения.

2. Найти собственные значения для оператора в векторном пространстве
над полем $\mathbb{C}$ с матрицей

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Будет ли оператор диагонализируем?

3. Пусть V есть пространство многочленов от x степени < 10 с вещественными коэффициентами. Оператор G переводит $f(x)$ в

$$Gf(x) \;=\; (ax+b)\frac{d\,f}{dx} - 6b\,f(x)\,.$$

Будет ли D обратимым? Будет ли D диагонализируем?
Каково максимальное по модулю собственное значение оператора D?

4. Пусть V пространство все дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ и W подпространство функций вида $f(x) = h(x)\,e^x$, где $h(x)$ многочлен степени меньше 25.
Проверьте, что W инвариантно относительно оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dx}$.
Укажите (какое-нибудь) b-мерное D-инвариантное подпространство U в W.

5. Вычислить определитель следующей матрицы для порядка $n = 10a + b$

$$P_n = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(объясняйте шаги вычисления).

6*. Вычислить определитель следующей матрицы для порядка $n = 10(a+b) + a$

$$Q_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 3 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

(да, это **5** в нижнем правом углу!).