Евклидова геометрия

А11◇1. Найдите в $\mathbb{R}^n$ ГМТ равноудаленных от заданных точек $p_0, p_1, \dots, p_k$, не лежащих в одной $(k-1)$-мерной плоскости. Вокруг всякого ли k-мерного симплекса можно описать $(k-1)$-мерную сферу и если можно, то сколько?

А11◇2 (куб). В стандартном n-мерном кубе $C_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leqslant 1\}$ найдите:

а) количество вершин, рёбер, 2-мерных граней, … , $(n-1)$-мерных граней
б) количество 1-мерных осей и $(n-1)$-мерных гиперплоскостей симметрии
в) количество диагоналей, ортогональных заданной диагонали
г) длину диагонали и ее предел при $n \to \infty$
д) радиус описанного шара и его предел при $n \to \infty$
е) всевозможные углы между диагоналями и рёбрами, а также их пределы при $n \to \infty$
ж) углы между диагоналями и всевозможными m-мерными гранями
з) в каком отношении делят диагональ ортогональные проекции всех вершин

А11◇3 (симплекс). В стандартном n-мерном симплексе $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i > 0\,,\ \sum x_i = 1\}$ найдите: **а)** количество вершин, рёбер, 2-мерных граней, … , $(n-1)$-мерных граней
б) расстояние между противоположными m и $(n-m-1)$-мерными гранями.
в*) углы между любыми парами граней **г*)** радиусы вписанного и описанного шаров

А11◇4. Найдите $\min \displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(x)\,dx$ по всем $P \in \mathbb{R}[x]$ с $\deg P \leqslant k$ и старшим коэффициентом 1.

А11◇5. Найдите ближайший к $\sin x$ кубический многочлен в пространстве гладких функций на $[0,\pi]$ со скалярным произведением $(P,Q) = \displaystyle\int_0^{\pi} P(x)Q(x)\,dx$.

А11◇6. Покажите, что $\operatorname{tr}(AB^t)$ является евклидовым скалярным произведением на пространстве вещественных квадратных матриц, и найдите ортогональное дополнение к:
а) бесследным; **б)** симметричным; **в)** верхнетреугольным; **г)** кососимметричным матрицам.

Матрица Грама произвольной системы векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ — это квадратная матрица G_v, составленная из всевозможных попарных произведений (v_i, v_j).

А11◇7. Наборов векторов v_i, выражается через набор векторов w_j по формуле $(v_1, v_2, \dots, v_n) = (w_1, w_2, \dots, w_m) \cdot C_{w,v}$, где $C_{w,v}$ — некоторая $n \times m$-матрица. Выразите G_v через G_w.

А11◇8 (неравенство Коши – Буняковского – Шварца). Покажите, что $\det G_v \geqslant 0$ для любого набора векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$, и равенство равносильно тому, что набор линейно зависим. Выведите отсюда, что для любой пары векторов $(v_1, v_2)^2 \leqslant (v_1, v_1)(v_2, v_2)$ и равенство равносильно тому, что векторы пропорциональны.

А11◇9. Выразите объем параллелепипеда, натянутого на векторы v_i через $\det G_v$.

А11◇10. Выразите расстояние от конца вектора v до гиперплоскости, порожденной векторами $e_1, e_2, \dots, e_k$ через $\det G_{v,e_1,\cdots,e_k}$ и $\det G_{e_1,e_2\cdots,e_k}$.

А11◇11. Обозначим через $\Pi_k^n = \Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1} + \dots + \Pi_k^{n-1}$ количество кубиков в n-мерной ступенчатой пирамиде высоты k, образованной k ступенчатыми $(n-1)$-мерными пирамидами убывающей высоты, поставленными в стопку вдоль n-той координатной оси (например, 2-мерная пирамида высоты k — это $\Pi_k^2 = \Pi_1^1 + \Pi_2^1 + \dots + \Pi_k^1 = k$ 

). Выразите Π_k^n через n, k и найдите отношение объёма параллелепипеда к объему натянутого на его вершину и все соседние с ней вершины симплекса.