АЛГЕБРА – модуль 3:
Листок 10.

Евклидовы векторные пространства.

Далее V – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением,
то есть **евклидово векторное пространство**, быть может бесконечномерное.

10.1.[до 11.02] Пусть $e_1, \dots, e_k$ ортонормированная система векторов в V.
Предположим $x \in V$ и положим $\alpha_i = (x, e_i)$.
Докажите, что выполнено *неравенство Бесселя*:

$$\sum_i |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2 .$$

10.2.[до 11.02] Предположим, что $e_1, \dots, e_n$ ортонормированный базис V. Пусть $x, y \in V$.
Докажите, что выполнено *равенство Парсеваля*:

$$(x, y) = \sum_i (x, e_i)(y, e_i).$$

10.3. Пусть $e_1, \dots, e_k$ ортонормированная система векторов в V.
Докажите, что следующие условия эквивалентны:
- (a) система $e_1, \dots, e_k$ базис V;
- (b) для любого $x \in V$ выполнено равенство

$$\|x\|^2 = \sum_i |(x, e_i)|^2 ;$$

- (c) для любых $x, y \in V$ выполнено равенство Парсеваля.

10.4.[до 11.02] Пусть v ненулевой вектор в V.
Для любого $x \in V$ положим

$$y = x - 2\frac{(x, v)}{(v, v)}\, v$$

Докажите, что $\|x\| = \|y\|$ и вектор $x + y$ ортогонален $x - y$.
Нарисуйте картинку, начав с "общих" x и v на плоскости.

10.5*. Пусть $\dim V = n$. Предположим, что попарные углы между векторами $v_1, \dots, v_m$ – тупые (то есть больше $\frac{1}{2}\pi$ и меньше π). Верно ли что m не может быть сколь угодно большим (при фиксированном n). Каково максимальное возможное m?

Ортогональные системы и ортогонализация.

10.6.[до 11.02] Дана система элементов $v_0 = 1$, $v_1 = x$, $\dots$, $v_4 = x^4$ в евклидовом векторном пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(x) g(x)\, dx$$

Найти ортогональную систему $e_0, \dots, e_4$ применив процесс ортогонализации к $v_0, \dots, v_4$.
Выписать матрицу перехода v_* от к e_*.

10.7.[до 11.02] Дана система векторов

$$v_1 = (+1, +1, +1, +1), \qquad v_3 = (+1, +1, -1, -1)$$
$$v_2 = (+1, +1, +1, -1), \qquad v_4 = (+1, -1, -1, -1)$$

в евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ со скалярным произведением $(a, b) = \sum_i a_i b_i$. Найти ортогональную систему $e_1, \ldots, e_4$ применив процесс ортогонализации к $v_1, \ldots, v_4$. Чему равен объем параллелотопа, натянутого на $v_1, \ldots, v_4$?

10.8. Матрица Грама (скалярных произведений) векторов $v_1, \ldots, v_4$ равна

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу перехода от системы v_* к полученной из нее процессом ортогонализации системе e_*.

Ортогоналы

10.9.[до 11.02] Пусть U_1, U_2 подпространства в V. Докажите, что

$$U_1^\perp \cap U_2^\perp = (U_1 + U_2)^\perp .$$

10.10. Пусть U_1, U_2 подпространства в конечномерном V. Докажите, что

$$U_1^\perp + U_2^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp .$$

Рассмотрим пространство V квадратных матриц размера $n \times n$ со скалярным произведением $(A \mid B) = \operatorname{tr} A^\intercal B$ (напомним, что след это сумма диагональных элементов матрицы).

10.11. Найдите ортогонал к подпространству симметрических матриц.
Найдите ортогонал к подпространству верхних треугольных матриц.

10.12*. Докажите, что если все корни характеристического многочлена вещественны, то $\|A\|$ равна корню квадратному из суммы квадратов собственных значений A (взятых с учетом кратностей).