Дополнительные задачи про операторы на пространствах со скалярным произведением

A12$\frac{1}{2}$◇1. Существует ли пространство V с билинейной формой β и подпространство $L \subset V$, дополнительное к ядру корреляции $V \xrightarrow{v\mapsto\beta(v,*)} V^*$, такие что ограничение $\beta|_L$ вырождено, если форма β **а)** (косо) симметрична? **б)** произвольна?

A12$\frac{1}{2}$◇2. Всякая ли унитарная матрица является произведением ортогональной вещественной и симметричной комплексной матрицы?

A12$\frac{1}{2}$◇3 (параметризация Кэли). Докажите, что $K \longmapsto (E-K)(E+K)^{-1}$ является биекцией между вещественными кососимметричными матрицами и ортогональными матрицами без собственного значения -1.

A12$\frac{1}{2}$◇4. Верно ли, что $K \longmapsto e^K$ является биекцией между:
а) вещественными кососимметричными и ортогональными матрицами?
б) комплексными косоэрмитовыми и унитарными матрицами?

A12$\frac{1}{2}$◇5. Докажите, что группы $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ и U_n компактны. Связны ли они?

A12$\frac{1}{2}$◇6. Всякую ли квадратную матрицу можно представить в виде произведения двух симметрических матриц, одна из которых невырождена?

A12$\frac{1}{2}$◇7. На пространстве гладких периодических функций $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ с периодом $T > 0$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_0^T f(x)g(x)\,dx$ вычислите операторы, сопряженные к операторам дифференцирования и умножения на функцию, а также оператор, сопряжённый к произвольному линейному дифференциальному оператору

$$L = a_k(x)\frac{d^k}{dx^k} + a_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

(с гладкими T-периодическими коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_k$). Является ли самосопряжённым оператор $\sin^2\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{4\pi x}{T}\right)\frac{d}{dx}$?

A12$\frac{1}{2}$◇8. Как изменится ответ предыдущей задачи для пространства гладких функций на $[0,1]$, обращающихся на концах отрезка в нуль вместе со всеми производными? Является ли самосопряжённым оператор $L = x^2(x-1)^2\frac{d^2}{dx^2} + 2x(x-1)\frac{d}{dx}$?

A12$\frac{1}{2}$◇9. На пространстве $\mathbb{R}[x]$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$ найдите оператор сопряженный к интегральному оператору $f(t) \longmapsto \int\limits_{-1}^1 K(s,t)f(t)\,dt$ с произвольно заданным полиномиальным ядром $K[x,y] \in \mathbb{R}[x,y]$.

A12$\frac{1}{2}$◇10. Верно ли, что полагая в предыдущей задаче $K(x,y) = xy$, мы получим самосопряженный оператор для которого многочлены Лежандра $P_n(x) = \frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}$ образуют ортогональный базис из собственных векторов?

A12$\frac{1}{2}$◇11. Верно ли, что над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ всякая невырожденная квадратичная форма от двух переменных принимает все значения из $\mathbb{F}_p$, а каждая форма от $\geqslant 3$ переменных обладает ненулевым изотропным вектором?

A12$\frac{1}{2}$◇12. Перечислите все анизотропные формы над полем $\mathbb{F}_p$, и покажите, что любая квадратичная форма невырожденной линейной заменой координат может быть приведена к к виду $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m-1}^2 + \varepsilon \cdot x_m^2$, где ε равен либо 1, либо какому-нибудь произвольным образом зафиксированному не квадрату.