АЛГЕБРА – модуль 3:
<u>Листок 9.</u>

Матричные вычисления

Будем представлять матрицу $2n \times 2n$ состоящей из 4-х клеток $n \times n$ и записывать такую матрицу в виде

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

9.1.[до 23.01] Докажите, что для любой $n \times n$ матрицы S

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & B \\ SA + C & SB + D \end{bmatrix}.$$

Сформулируйте и докажите аналогичное свойство относительно столбцов.

9.2.[до 23.01] Проверьте, что

$$\det \begin{bmatrix} \alpha E & \beta E \\ C & D \end{bmatrix} = |\,\alpha D - \beta C|\,, \text{ где } \alpha\,, \beta \in \boldsymbol{k}\,,$$

(через $|X|$ мы обозначаем определитель матрицы X размера $n \times n$).
Можно ли заменить α или β на матрицу ?

9.3.[до 23.01] Верно ли что

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}?$$

Если нет, то как подправить формулу?

9.4. Верно ли что

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = |AC^{-1}DC - BC| \quad ?$$

Вычисление собственных векторов.

Найти собственные значения и базис из собственных векторов для каждого собственного подпространства. Дана матрица оператора в некотором (первоначальном) базисе.

9.5.[до 23.01] $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 9.6.[до 23.01] $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 9.7.[до 23.01] $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9.8. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ 9.9. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ 9.10. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Собственые векторы, инвариантные подпространства.

9.11.[до 23.01] Пусть $\det A \neq 0$.
Докажите, что подпространство A^{-1}-инвариантно $\iff$ оно A-инвариантно.

9.12.[до 23.01] Пусть λ собственное значение A. Покажите, что λ^2 будет собственным значением A^2. Пусть λ^2 есть собственное значение A^2. Покажите, что либо λ, либо $-\lambda$ будет собственным значением A.

9.13.[до 23.01] Найдите все инвариантные подпространства для оператора d/dx.

9.14. Докажите, что каждое подпространство инвариантное относительно диагонализируемого оператора натянуто на его собственные вектора.

9.15*. Пусть A, B линейные операторы в векторном (конечномерном)пространстве V над $\mathbb{C}$ и $[A,\, B] = B$. Покажите, что операторы A и B имеют общий собственный вектор.

9.16*. Пусть A диагонализируемый оператор в векторном пространстве над полем из q элементов. При этом $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ собственные значения A и $k_1, \ldots, k_m$ их кратности. Найдите число одномерных инвариантных подпространств для A.

Симплектические матрицы.

Далее $I := \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}$. Матрицу M называют *симплектической*, если $M^\intercal I M = I$. Множество всех вещественных симплектических матриц размера $2n \times 2n$ обозначают через $\mathrm{Sp}\,(2n)$. Заметьте, что $\mathrm{Sp}\,(2n)$ является группой (относительно умножения матриц).

9.17.[до 23.01] Проверьте, что

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ принадлежит } \mathrm{Sp}\,(2n) \qquad \iff \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} D^\intercal & -B^\intercal \\ -C^\intercal & A^\intercal \end{bmatrix}.$$

(Указание. Рассмотрите случай, когда $n = 1$.)

9.18*. Пусть $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}\,(2n)$. Покажите, что комплексная матрица $C\boldsymbol{i}+D$ невырождена.

9.19. Проверьте, что матрицы $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}\,(2n)$, для которых $(A\boldsymbol{i} + B)(C\boldsymbol{i} + D)^{-1} = \boldsymbol{i}$, образуют подгруппу в $\mathrm{Sp}\,(2n)$.

9.20*. Пусть $M \in \mathrm{Sp}\,(2n)$. Покажите, что $\det M = +1$.