Прямые произведения конечных групп

A15◇1. Докажите, что группы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ не разлагаются в прямую сумму ненулевых подгрупп.

A15◇2. Разлагаются ли в прямое произведение неединичных подгрупп группы
а) $\mathfrak{S}_3$ (симметрическая)? **б)** $\mathfrak{A}_4$ (знакопеременная)? **в)** $\mathfrak{S}_4$? **г)** Группа кватернионов $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$?

A15◇3. Разложите в прямую сумму группы:
а) $\mathbb{Z}_6$ **б)** $\mathbb{Z}_{12}$ **в)** $\mathbb{Z}_{60}$.

A15◇4. Докажите, что прямая сумма циклических групп $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ является циклической тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель m и n равен 1.

A15◇5. Докажите, что мультипликативная группа комплексных чисел является прямым произведением группы положительных вещественных чисел и группы всех комплексных чисел, по модулю равных 1.

A15◇6. Докажите, что при $n \geq 3$ мультипликативная группа кольца вычетов $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ является прямым произведением подгруппы $\{\pm 1\}$ и циклической группы порядка 2^{n-2}.

A15◇7. Докажите, что если в конечной абелевой группе подгруппы $A_1, A_2, \ldots, A_k$ имеют конечные попарно взаимно простые порядки, то их сумма является прямой.

A15◇8. Пусть D — подгруппа прямого произведения $A \times B$ групп A и B взаимно простых порядков. Докажите, что $D \simeq (D \cap A) \times (D \cap B)$.

A15◇9. Пусть k — наибольший порядок элементов конечной абелевой группы G. Докажите, что порядок любого элемента группы G делит k. Верно ли это утверждение без предположения об абелевости группы?

A15◇10. Найдите все прямые разложения мультипликативной группы, состоящей из чисел вида $\pm 2^n$.

A15◇11. Пусть A — конечная абелева группа. Найдите все прямые разложения группы $\mathbb{Z} \oplus A$, в которых одно из слагаемых является бесконечной циклической группой.

A15◇12. Докажите, что если факторгруппа A/B абелевой группы A по подгруппе B является свободной абелевой группой C, то $A = B \oplus C$.

A15◇13. На множестве гомоморфизмов из абелевой группы A в абелеву группу B определим операцию сложения по правилу $(\alpha + \beta)(x) := \alpha(x) + \beta(x)$. Докажите, что гомоморфизмы из A в B образуют абелеву группу $\mathrm{Hom}(A, B)$.

A15◇14. Найдите группы гомоморфизмов:
а) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$;
б) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/18\mathbb{Z})$;
в) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$;
г) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$;
д) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/30\mathbb{Z})$.