Разложения абелевых групп в прямые суммы циклических

A17◇1. Образующую группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ назовем a, а образующую группы $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ назовем b. Изоморфны ли группы

а) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/\langle 2b \rangle$ и $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/\langle a + 2b \rangle$? **б)** $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$?

A17◇2. Сколько подгрупп порядков

а) 2 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12?

б) 2,4 и 6 в группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

A17◇3. Найдите все разложения группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ в прямую сумму двух циклических подгрупп.

A17◇4. Докажите, что конечная подгруппа мультипликативной группы $\mathbb{C}^*$ является циклической.

A17◇5. Пусть A — свободная абелева группа с базисом $e_1, \ldots, e_n$, и $x = m_1e_1 + \ldots + m_ne_n \in A$ — ненулевой элемент. Докажите, что циклическая подгруппа A, порожденная x, выделяется прямым слагаемым в A тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель чисел $m_1, \ldots, m_n$ равен 1.

A17◇6. Пусть A — свободная абелева группа с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Докажите, что элементы $y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$ $(j = 1, \ldots, n)$ составляют базис группы A тогда и только тогда, когда $\det(a_{ij}) = 1$.

A17◇7. Пусть A — свободная абелева группа с базисом $e_1, \ldots, e_n$, а B — ее подгруппа с образующими $y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$ $(j = 1, \ldots, n)$. Докажите, что факторгруппа A/B конечна тогда и только тогда, когда $\det(a_{ij}) \neq 0$, и при этом порядок $|A/B| = |\det(a_{ij})|$.

A17◇8. Разложите в прямую сумму циклических групп факторгруппу A/B, где A — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, а B — ее подгруппа, порожденная y_1, y_2, y_3:

а) $y_1 = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ y_2 = 21x_1 + 8x_2 + 9x_3,\ y_3 = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3$;

б) $y_1 = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3,\ y_2 = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3,\ y_3 = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3$;

в) $y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3,\ y_2 = 11x_1 + 8x_2 + 5x_3,\ y_3 = 17x_1 + 5x_2 + 8x_3$;

г) $y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 7x_3,\ y_2 = 8x_1 + 7x_2 + 11x_3,\ y_3 = 6x_1 + 5x_2 + 11x_3$.

A17◇9. В факторгруппе свободной абелевой группы A с базисом x_1, x_2, x_3 по подгруппе B, порожденной $x_1 + x_2 + 4x_3$ и $2x_1 - x_2 + 2x_3$, найдите порядок элемента $\overline{x_1 + 2x_3}$.

A17◇10. В факторгруппе свободной абелевой группы A с базисом x_1, x_2, x_3 по подгруппе B, порожденной $2x_1 + x_2 - 50x_3$ и $4x_1 + 5x_2 + 60x_3$, найдите порядок элемента $\overline{32x_1 + 31x_2}$.