Гомоморфизмы абелевых групп

A16◇1. Докажите, что $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A) \simeq A$ для любой абелевой группы A.

A16◇2. Найдите группы автоморфизмов (групповой закон — это композиция) следующих групп:
а) $\mathbb{Z}$; **б)** $\mathbb{Q}$; **в)** $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$; **г)** Свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^n$ ранга n.

A16◇3. Докажите, что
а) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})$; **б)** $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

A16◇4. Докажите, что подгруппа конечнопорожденной абелевой группы тоже конечно порождена.

A16◇5. Докажите, что всякий гомоморфизм конечнопорожденной абелевой группы *на* себя является автоморфизмом.

A16◇6. Докажите, что свободные абелевы группы $\mathbb{Z}^n$ и $\mathbb{Z}^m$ изоморфны тогда и только тогда, когда $m = n$.

A16◇7. Пусть A, B, C — конечнопорожденные абелевы группы, причем $A \oplus B \simeq C \oplus B$. Докажите, что $A \simeq C$.

A16◇8. Пусть порядок конечной абелевой группы A делится на m. Докажите, что в A есть подгруппа порядка m.

A16◇9. Пусть A, B — конечные абелевы группы, причем для любого натурального числа m количество элементов порядка m в A и B одинаково. Докажите, что $A \simeq B$.

A16◇10. Пусть A, B — конечнопорожденные абелевы группы, причем каждая из них изоморфна подгруппе другой. Докажите, что $A \simeq B$.

A16◇11. Докажите, что подгруппа B свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^n$ является свободной, причем ранг B не превосходит n.

A16◇12. Пользуясь основной теоремой о конечнопорожденных абелевых группах, найдите с точностью до изоморфизма все абелевы группы порядка
а) 2; **б)** 6; **в)** 8; **г)** 12; **д)** 16; **е)** 24; **ж)** 36; **з)** 48.

A16◇13. Есть ли в абелевой группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ подгруппы, изоморфные
а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$? **б)** $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? **в)** $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

A16◇14. Образующую группы $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ назовем a, а образующую группы $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ назовем b. Найдите разложение в прямую сумму циклических групп факторгруппы $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ по подгруппе, порожденной элементом $3a + 9b$.