Минимальные многочлены линейных операторов

A19◇1. Найдите минимальные многочлены операторов в трехмерном пространстве V, заданных следующими матрицами, и разложите V в прямую сумму инвариантных подпространств в соответствии с разложением минимального многочлена на взаимно простые множители:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A19◇2. Найдите минимальные многочлены операторов:

а) $x\frac{d}{dx}$ на пространстве многочленов от x степени не выше n; **б)** $\frac{d}{dx}$ на пространстве функций с базисом $\{\cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$; **в)** $f(x, y) \mapsto f(x+1, y+1)$ на пространстве многочленов степени не выше двух по x и y; **г)** $X \mapsto AX$ на пространстве $n \times m$-матриц, где A — некоторая $n \times n$-матрица (с известным минимальным многочленом).

A19◇3. Докажите, что минимальный многочлен $n \times n$-матрицы ранга 1 имеет степень 2 (если $n \geq 2$).

A19◇4. Докажите, что если степень минимального многочлена линейного оператора A равна размерности пространства, то всякий оператор, перестановочный с A, является многочленом от A.

A19◇5. Докажите, что если минимальный многочлен линейного оператора A в пространстве V является произведением взаимно простых многочленов $g_1(x)$ и $g_2(x)$, то V может быть разложено в прямую сумму двух инвариантных подпространств таких, что ограничения оператора A на эти подпространства имеют минимальные многочлены $g_1(x)$ и $g_2(x)$ соответственно.

A19◇6. Докажите, что для любого линейного оператора существует такое разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств, что минимальные многочлены его ограничений на эти подпространства являются степенями различных неприводимых многочленов.

A19◇7. Докажите, что если минимальный многочлен линейного оператора A (скажем, в $\mathbb{Q}$-векторном пространстве) является неприводимым многочленом степени k, то для любого $0 \neq v \in V$ векторы $v, Av, \dots, A^{k-1}v$ составляют базис V.

A19◇8. Линейный оператор называется полупростым, если для любого инвариантного подпространства имеется дополнительное инвариантное подпространство. Докажите, что оператор полупрост тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен не имеет кратных неприводимых множителей.

A19◇9. Докажите, что всякий линейный оператор A в комплексном векторном пространстве может быть представлен в виде суммы полупростого и нильпотентного операторов, являющихся многочленами от A.

A19◇10. Докажите, что всякий линейный оператор можно единственным образом представить в виде суммы перестановочных полупростого и нильпотентного операторов.