Комплексные и вещественные структуры.

А13◇1. Как связаны собственные числа $\mathbb{R}$-линейного оператора $V \xrightarrow{g} V$ на вещественном векторном пространстве с собственными числами его комплексификации $V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{g_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$? Опишите действие g на вещественной линейной оболочке векторов $v_1, v_2 \in V$, таких что $v_1 + iv_2 \in V_{\mathbb{C}}$ собственный для $g_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

А13◇2. Как связаны n собственных чисел $\mathbb{C}$-линейного оператора $W \xrightarrow{f} W$ на n-мерном комплексном векторном пространстве с $2n$ собственными числами индуцированного $\mathbb{R}$-линейного оператора $W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{f} W_{\mathbb{R}}$ на овеществлённом пространстве?

А13◇3. Установите взаимно однозначное соответствие между структурами комплексного векторного пространства на заданном вещественном векторном пространстве V, для которых V является овеществлением, и $\mathbb{R}$-линейными операторами $V \xrightarrow{I} V$ с $I^2 = -E$. Постройте для каждого такого оператора I канонический изоморфизм между комплексным векторным пространством V_I (с комплексной структурой, задаваемой I) и комплексным собственным подпространством $W_i \subset V_{\mathbb{C}}$ комплексифицированного оператора[1] $V_{\mathbb{C}} \xrightarrow{I_{\mathbb{C}}} V_{\mathbb{C}}$, отвечающим собственному значению i.

А13◇4. Для данного n-мерного комплексного пространства W постройте взаимно однозначное соответствие между вещественными подпространствами $V \subset W_{\mathbb{R}}$, для которых $W = V_{\mathbb{C}}$, и вещественно линейными операторами $W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sigma} W_{\mathbb{R}}$, такими что $\sigma^2 = E$ и $\sigma(zw) = \overline{z}\sigma(w)$ $\forall\, z \in \mathbb{C}$ и $\forall\, w \in W$.

А13◇5. Постройте на пространстве $M = \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{C})$ три инволюции $*$, $\vee$ и σ, такие что

а) $(A,B)_{\text{н}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(A \cdot B^*)$ даёт эрмитово скалярное произведение с $(A,A)_{\text{н}} = \frac{1}{2}\sum |a_{ij}^2|$;

б) $(A,B) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(A \cdot B^{\vee})$ является невырожденной симметричной комплексно-билинейной формой, поляризующей квадратичную форму $(A,A) = \det A$;

в) $M \xrightarrow{\sigma} M$ задаёт на M вещественную структуру, и $(A,B)_{\text{н}} = (A, B^{\sigma})$.

Явно опишите действие каждой из инволюций на данную комплексную 2×2-матрицу[2] B. Убедитесь, что вещественными относительно σ являются матрицы вида

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\,,$$

и что ограничения форм (A,B) и $(A,B)_{\text{н}}$ на пространство таких матриц матриц задают на нём одинаковые евклидовы скалярные произведения, в которых квадратом длины матрицы является $\sum x_i^2$.

А13◇6. Укажите какой-нибудь ортогональный базис формы det с квадратами $(+1, -1, -1, -1)$.

А13◇7. Проверьте, что, сопоставляя паре матриц $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ линейное преобразование пространства M, заданное правилом $g_1 \times g_2\,(A) = g_1 A g_2^{-1}$, мы получим гомоморфизм

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_{\det}(\mathbb{C})\,. \tag{1}$$

из группы $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$ в группу изометрий с определителем 1 квадратичной формы det. Для данных $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ явно напишите 4×4-матрицу, которая будет у преобразования $g_1 \times g_2$ в базисе из предыдущей задачи. Найдите ядро и образ гомоморфизма, а также полный

[1] обратите внимание, что *a posteriori* отсюда получаются соотношения $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V = 2\,\dim_{\mathbb{C}} V_I$

[2] обратите внимание, что по построению инволюция $\vee$ $\mathbb{C}$-линейна, а обе инволюции $*$, σ $\mathbb{C}$-антилинейны

ответы: $\sigma : \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \overline{b}_{22} & -\overline{b}_{21} \\ -\overline{b}_{12} & \overline{b}_{11} \end{pmatrix}$, $\vee : \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix}$

прообраз подгруппы $\mathrm{SO}_{(1,3)} = \mathrm{SO}_{\det}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SO}_{\det}(\mathbb{C})$, состоящей из вещественных изометрий вещественной симметричной билинейной формы сигнатуры $(1,3)$.

A13◇8. Проверьте, что формулы $g(A) = gAg^t$ и $g(A) = gAg^{-1}$ задают действия группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ det-ортогональными преобразованиями на 3-мерных подпространствах в M, которые состоят, соответственно, из симметрических[3] и из бесследных матриц матриц. Выбрав в этих подпространствах удобные ортонормальные базисы, напишите явно 3×3 матрицы, которыми действует на эти базисы данная матрица $g \in \mathrm{SL}_2$. Как устроены ядра и образы возникающих гомоморфизмов $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$?

A13◇9. Проверьте, что базисные бесследные косоэрмитовы матрицы[4]

$$\boldsymbol{i} = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{2}$$

удовлетворяют *соотношениям Гамильтона*:

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1\,; \quad \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}\,; \quad \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}\,; \quad \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}\,. \tag{3}$$

Как ограничиваются на 4-мерное вещественное подпространство, порождённое матрицами $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, эрмитова форма $(A,B)_{\mathrm{H}}$ и $\mathbb{C}$-билинейная форма (A,B)? Чему соответствуют на языке 2×2 матриц норма кватерниона и кватернионное сопряжение?

A13◇10. Опишите центр $Z(\mathbb{H}) = \{c \in \mathbb{H} \mid qc = cq \;\; \forall\, q \in \mathbb{H}\}$ тела $\mathbb{H}$.

A13◇11. Верно ли, что для любого $q \in \mathbb{H}$ с $q^2 = -1$ множество кватернионов вида $\alpha + q\beta$ с $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ образуют в $\mathbb{H}$ подполе, изоморфное $\mathbb{C}$?

A13◇12. Всякий ли не чисто вещественный кватернион является корнем некоторого квадратного уравнения с вещественными коэффициентами и отрицательным дискриминантом?

A13◇13 (чисто мнимые кватернионы). Обозначим через $I = \{q \in \mathbb{H} \mid q^* = -q\}$ пространство *чисто мнимых* кватернионов. Покажите, что

а) $\{q \in \mathbb{H} \mid q^2 \in \mathbb{R}_{\leqslant 0}\} = I$, а $\{q \in \mathbb{H} \mid q^2 = -1\}$ образует двумерную сферу $S^2 \subset I \simeq \mathbb{R}^3$.

б) формула $(p,q) \stackrel{\text{def}}{=} (pq^* + qp^*)/2$ корректно определяет на I евклидово скалярное произведение[5]. Всякий ли ортонормальный относительно этого произведения базис пространства I удовлетворяет соотношениям Гамильтона (3)?

в) I замкнуто относительно коммутаторов $[x,y] \stackrel{\text{def}}{=} xy - yx$, причём $[x,y]$ ортогонален к x и y, а $|[x,y]|$ есть площадь натянутого на x и y параллелограмма?

A13◇14. Покажите, что единичная сфера $S^3 = \{\alpha \in \mathbb{H} \mid |\alpha| = 1\}$ в пространстве всех кватернионов $\mathbb{H} \subset \mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{C})$ совпадает с группой унитарных матриц $\mathrm{SU}_2 \subset \mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{C})$, и для каждого $\alpha \in U$ $\mathbb{R}$-линейное отображение $\varphi_\alpha : \mathbb{H} \xrightarrow{q \mapsto \alpha^* q \alpha} \mathbb{H}$ является автоморфизмом тела $\mathbb{H}$ и собственной евклидовой изометрией пространства I, так что возникает гомоморфизм групп

$$\mathrm{SU}_2 \xrightarrow{a \mapsto \varphi_\alpha|_I} \mathrm{SO}_{\det}(I) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})\,.$$

Опишите ядро и образ этого гомоморфизма, а также напишите для данной комплексной 2×2 матрицы $a \in \mathrm{SU}_2$ отвечающую ей вещественную 3×3 матрицу $\varphi_\alpha \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, которой записывается оператор φ_α в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ из (2).

---

[3]действие на симметричных матрицах — это линейная замена переменных в квадратичных формах; это действие очевидно сохраняет *конику Веронезе*, образованную квадратами линейных форм — ненулевыми квадратичными формами с нулевым дискриминантом

[4]матрицы σ_i (получающиеся умножением $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ на $-i$) называются *матрицами Паули* и составляют вместе с матрицей $\sigma_0 = E$ базис пространства эрмитово самосопряжённых матриц, особенно любимый физиками

[5]т. е. принимающую *вещественные* значения положительно определённую симметричную вещественно билинейную форму