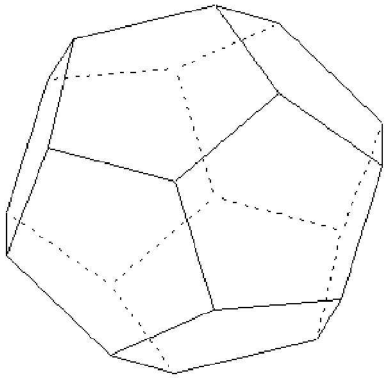
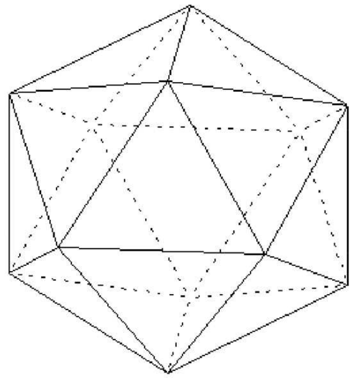
Группы.



додекаэдр



икосаэдр

A3◇1 (группы фигур). Множество всех отображений пространственной фигуры $\mathfrak{F}$ в себя, возникающих при действии на $\mathfrak{F}$ любых (соотв. собственных[1]) движений пространства, называется *полной* (соотв. *собственной*) *группой фигуры* $\mathfrak{F}$. Сколько элементов в собственной и в полной группах:

а) диэдра[2] **б)** тетраэдра **в)** куба **г)** октаэдра **д)** додекаэдра **е)** икосаэдра

A3◇2. Изготовьте[3] модели (на выбор): **а)** куба или октаэдра; **б)** додекаэдра или икосаэдра.

A3◇3. Явно перечислите все движения[4], из которых состоят группы фигур из зад. A3◇1

A3◇4. Какие перестановки четырёх **а)** вершин тетраэдра **б)** диагоналей куба можно получить собственными движениями этих фигур?

A3◇5. Изоморфны ли группы: **а)** $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{D}_3$ **б)** $\mathfrak{S}_4$ и несобственная группа тетраэдра **в)** собственная группа тетраэдра и $\mathfrak{A}_4$; **г)** собственные группы куба, октаэдра и $\mathfrak{S}_4$; **д*)** собственные группы икосаэдра, додекаэдра и $\mathfrak{A}_5$; **е*)** несобственная группа додекаэдра и $\mathfrak{S}_5$.

A3◇6. Сколько элементов $\mathfrak{S}_4$ неподвижны при сопряжении перестановкой $(1\,2)(3\,4)$?

A3◇7. Постройте сюрьективный гомоморфизм $\mathfrak{S}_4 \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_3$ и опишите его ядро.

A3◇8. Существует ли сюрьективный гомоморфизм $\mathfrak{S}_4 \twoheadrightarrow \mathfrak{D}_2$?

A3◇9. Пусть[5] $X = \mathbb{R} \smallsetminus \{0,1\}$. Напишите шесть дробно линейных преобразований[6] $X \longrightarrow X$, образующих группу, изоморфную группе треугольника $\mathfrak{D}_3$.

A3◇10. Порождается ли $\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{S}_3$ двумя отражениями и каковы соотношения между ними?

A3◇11*. Тот же вопрос про произвольную группу диэдра $\mathfrak{D}_n$.

A3◇12*. Тот же вопрос про симметрическую группу $\mathfrak{S}_4$ и три отражения (12), (23) и (34).

A3◇13*. Тот же вопрос про симметрическую группу $\mathfrak{S}_n$ и $(n-1)$ отражений отражения (12), (23), … , $((n-1)n)$.

A3◇14*. Покажите, что все знакопеременные группы $\mathfrak{A}_n$ с $n \geqslant 5$ просты.

---

[1] т. е. сохраняющих ориентацию; например, симметрии относительно плоскости будут в этом случае запрещены

[2] *диэдром* называется правильный плоский n-угольник M_n (допускаются $n \geqslant 2$); легко видеть, что собственная группа M_n совпадает с полной; она называется *группой диэдра* и обозначается $\mathfrak{D}_n$; группа $\mathfrak{D}_2$ двуугольника $M_2 = \circ$ иногда ещё называется *четвертной группой Клейна* и обозначается $\mathfrak{V}_4$

[3] проще всего из бумаги, но не запрещается и из чего-нибудь поосновательнее

[4] например, для икосаэдра ответ мог бы начинаться так: тождественное, $6 \cdot 4$ поворотов на углы, кратные 72° вокруг осей, проходящих через пары противоположных вершин, 15 поворотов на 180° вокруг осей, проходящих через середины противоположных рёбер, …

[5] хотя тем, кто знает, что это такое, правильнее считать, что $X = \mathbb{RP}_1 \smallsetminus \{0,1,\infty\}$

[6] т. е. отображений вида $x \longmapsto (ax+b)/(cx+d)$