Дополнительные задачи про группы.

А$3\frac{1}{2}$◇1. Пусть на множестве G задана ассоциативная[1] операция умножения, для которой существует левая единица[2] $e \in G$, и ко всякому $g \in G$ имеется левый обратный элемент[3]. Покажите, что левый обратный автоматически будет и правым обратным, что он единственен (для заданного g), что e также единственен и является заодно и правой единицей.

А$3\frac{1}{2}$◇2. Верно ли, что всякая группа простого порядка циклическая?

А$3\frac{1}{2}$◇3. Верно ли, что всякая подгруппа циклической группы циклическая?

А$3\frac{1}{2}$◇4. Верно ли, что в группе чётного порядка всегда существует элемент порядка 2?

А$3\frac{1}{2}$◇5. Приведите пару примеров бесконечных групп, в которых каждый элемент имеет конечный порядок.

А$3\frac{1}{2}$◇6. Верно ли, что в знакопеременной группе $\mathfrak{A}_n$ всякий элемент является произведением двух инволюций[4]?

А$3\frac{1}{2}$◇7 (m-транзитивность). Скажем, что группа преобразований $G \subset \mathrm{Aut}\,(X)$ действует на множестве X *m-транзитивно*, если для любых двух упорядоченных наборов из m точек $x_1, x_2, \dots, x_m$ и $y_1, y_2, \dots, y_m$ существует $g \in G$, переводящее x_i в y_i при всех i. Является ли действие знакопеременной группы $\mathfrak{A}_n$ на $X = \{1,\,2,\,\dots\,,\,n\}$

а) $(n-1)$-транзитивным? **б)** $(n-2)$-транзитивным?

А$3\frac{1}{2}$◇8. Пусть конечная группа преобразований $G \subset \mathrm{Aut}\,(X)$ 1-транзитивно действует на множестве X, содержащем более одного элемента. Верно ли, что всегда найдется $g \in G$, действующий на X без неподвижных точек?

А$3\frac{1}{2}$◇9. Пусть группа преобразований $G \subset \mathrm{Aut}\,(X)$ 2-транзитивно действует на множестве X. Докажите, что стабилизатор любой точки не может строго содержаться ни в какой большей подгруппе, отличной от G (т. е. не существует подгруппы H такой что $\mathrm{Stab}(x) \subsetneq H \subsetneq G$).

А$3\frac{1}{2}$◇10. Верно ли, что любая конечная группа движений оставляет на месте некоторую точку? Опишите все конечные группы движений **а)** плоскости **б*)** трёхмерного пространства

А$3\frac{1}{2}$◇11. Покажите, что подгруппа $H \subset G$ нормальна тогда и только тогда, когда для любых двух левых смежных классов g_1H и g_2H множество всевозможных произведений

$$g_1H \cdot g_2H = \{f_1f_2 \mid f_1 \in g_1H\,,\ f_2 \in g_2H\}$$

также образует левый смежный класс.

А$3\frac{1}{2}$◇12. Пусть[5] $K \lhd H$ и $H \lhd G$. Верно ли, что $K \lhd G$?

А$3\frac{1}{2}$◇13. Пусть $H \lhd G$, а подгруппа $K \subset G$ содержит H. Верно ли, что $K \lhd G$?

А$3\frac{1}{2}$◇14*. Обозначим через p наименьший простой делитель порядка группы G. Докажите, что всякая подгруппа индекса p нормальна[6].

А$3\frac{1}{2}$◇15. Опишите все подгруппы в группах $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{A}_n$ при $n \leqslant 5$.

А$3\frac{1}{2}$◇16. Верно ли, что любой автоморфизм группы **а)** $\mathfrak{S}_3$ **б)** $\mathfrak{S}_4$ **в*)** $\mathfrak{S}_5$ является внутренним?

А$3\frac{1}{2}$◇17*. Постройте автоморфизм группы $\mathfrak{S}_6$, не являющийся внутренним.

---

[1] т. е. удовлетворяющая *сочетательному закону*: $f(gh) = (fg)h \ \forall\, f, g, h \in G$

[2] такая что $\forall\, g \in G \ \ eg = g$

[3] такой $g' \in G$, что $g'g = e$

[4] элемент g группы G называется *инволюцией*, если $g^2 = e$

[5] напомню, что $H \lhd G$ означает: «H является нормальной погруппой в G»

[6] если общий случай вызывает затруднения, решите эту задачу для $p = 2$