§5. Проективные квадрики.

Всюду в этой этой лекции мы предполагаем, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$.

5.1. Квадратичные и билинейные формы. Множество нулей $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ ненулевой однородной квадратичной формы $q \in S^2V^*$ называется *проективной квадрикой*. Напомним, что если выбрать в V базис $e_0, e_1, \dots, e_n$ с координатами $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, то всякую квадратичную форму q можно единственным способом записать в виде

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i x_j = x \cdot A \cdot {}^t x \;,$$

где $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ — вектор-строка, ${}^t x$ — столбец, полученный её транспонированием, а $A = (a_{ij})$ — *симметричная* матрица, которая называется *матрицей Грама* формы q в базисе $\{e_i\}$ и имеет в качестве a_{ij} (при $i \neq j$) половину коэффициента при $x_i x_j$ в приведённой записи q. Иначе говоря, существует единственная симметричная билинейная форма $\widetilde{q}(u, w)$ на $V \times V$, такая что $q(x) = \widetilde{q}(x, x)$. Эта симметричная билинейная форма называется *поляризацией* квадратичной формы q и выражается через q несколькими эквивалентными способами:

$$\widetilde{q}(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i y_j = \frac{1}{2} \sum_i y_i \frac{\partial q(x)}{\partial x_i} = x \cdot A \cdot {}^t y = \\ = \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big) = \frac{1}{4}\Big(q(x+y) - q(x-y)\Big) \;. \tag{5-1}$$

Если интерпретировать форму $\widetilde{q}$ как «скалярное произведение» на V (не обязательно анизотропное и даже, возможно, вырожденное), то матрица Грама будет не чем иным, как таблицей умножения базисных векторов: $a_{ij} = \widetilde{q}(e_i, e_j)$.

Упражнение 5.1. Проверьте, что в другом базисе $(e'_0, e'_1, \dots, e'_n) = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$ новая матрица Грама A' будет выражаться через A по формуле $A' = {}^t C \cdot A \cdot C$.

5.1.1. Определитель формы. Из упр. 5.1 вытекает, что при линейной замене координат *определитель Грама* $\det A$ умножается на *квадрат* определителя матрицы перехода:

$$\det(A') = \det(A) \cdot \det{}^2(C) \;.$$

Таким образом, класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля $\Bbbk$, не зависит от выбора базиса и является инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат. Мы будем называть этот класс *определителем* формы q и обозначать $\det(q)$. Если $\det q \neq 0$, квадрика $V(q)$ называется *невырожденной* (или *гладкой*), в противном случае — *вырожденной* (или *особой*).

5.1.2. Ранг формы. Ещё одним важным инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат является ранг её матрицы Грама. Он называется *рангом* формы q.

Упражнение 5.2. Убедитесь, что ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса.

5.1.3. Проективная эквивалентность квадрик. Две квадрики называются *изоморфными* (или *проективно эквивалентными*), если одна переводится в другую линейным проективным автоморфизмом объемлющего пространства. Поскольку пропорциональные уравнения задают одну и ту же квадрику, для проективной эквивалентности квадрик достаточно (но, вообще говоря, *не необходимо*), чтобы уравнение одной квадрики переводилось обратимой заменой координат в уравнение, пропорциональное уравнению другой квадрики.

Над алгебраически замкнутым полем всякая квадратичная форма в подходящем базисе записывается как $\sum x_i^2 = 0$, где число участвующих переменных равно рангу формы. Поэтому над алгебраически замкнутым полем любые две квадрики одинакового ранга эквивалентны. В частности, все невырожденные квадрики проективно эквивалентны друг другу. В (n° 5.3) мы увидим, что квадрики разного ранга не эквивалентны, поскольку имеют разные *пространства особых точек*.

Над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ две квадратичные формы тогда и только тогда переводятся друг в друга невырожденным линейным преобразованием, когда они имеют одинаковый ранг и сигнатуру. Поскольку уравнения $q = 0$ и $-q = 0$ задают одну и ту же квадрику, квадратичные формы одинакового ранга и равной или противоположной по знаку сигнатурой проективно эквивалентны. В (n° 5.7) мы увидим, что квадрики, в сигнатуре которых плюсов не меньше, чем минусов, и которые имеют разный ранг или разную сигнатуру, не эквивалентны, поскольку ранг, как и выше, однозначно определяет размерность пространства особых точек квадрики, а число минусов в сигнатуре (при заданном ранге) однозначно определяет *планарность квадрики* — максимум размерностей проективных подпространств, целиком лежащих на квадрике (и, как мы увидим, «заметающих» квадрику на подобие того, как однополостный гиперболоид заметается двумя семействами прямых).

5.2. Квадрики на $\mathbb{P}_1$. Согласно теореме Лагранжа произвольная квадратичная форма от двух переменных (над любым полем, в котором $1+1 \neq 0$) в подходящем базисе задаётся либо уравнением $x_0^2 + \alpha\, x_1^2 = 0$ с $a \neq 0$, либо уравнением $x_0^2 = 0$. В первом случае определитель формы $\det(q)$ с точностью до умножения на квадраты равен a, и стало быть, форма невырождена. Во втором случае $\det(q) = 0$ и форма вырождена.

Вырожденная квадрика $x_0^2 = 0$ называется *двойной точкой*, поскольку её уравнение — это квадрат линейной формы, обращающейся в нуль в точке $(0 : 1)$.

Неособая квадрика $x_0^2 + \alpha\, x_1^2 = 0$ либо пуста, либо состоит из двух точек. Первое равносильно тому, что $-\alpha$ не является квадратом. Отметим, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ такого не бывает. Если же $-\alpha = \delta^2$, то $x_0^2 + \alpha\, x_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$ является произведением двух различных линейных форм, обращающихся в нуль в двух различных точках $(x_0 : x_1) = (\pm\delta : 1) \in \mathbb{P}_1$.

Поскольку $-\alpha$ с точностью до умножения на квадрат совпадает с $-\det(q)$, вид квадрики на $\mathbb{P}_1$ полностью задаётся её определителем $-\det q$ (рассматриваемым как класс по модулю умножения на ненулевые квадраты). А именно, если определитель нулевой, мы имеем двойную точку, если единичный — пару различных точек, в оставшемся случае (возможном лишь над незамкнутым полем) квадрика пуста.

5.2.1. СЛЕДСТВИЕ. *Для пересечения произвольной квадрики Q с произвольной прямой ℓ имеется ровно 4 возможности: или $\ell \subset Q$, или $\ell \cap Q$ есть двойная точка, или $\ell \cap Q$ состоит из 2 различных точек, или $\ell \cap Q = \varnothing$, причём над алгебраически замкнутым последний случай невозможен.* □

5.3. Корреляция и ядро. Напомним, что со всякой квадратичной формой q на V связан линейный *оператор корреляции* $\widehat{q} : V \longrightarrow V^*$, переводящий вектор $v \in V$ в линейную форму

$$\widehat{q}(v) \;:\; w \longmapsto \widetilde{q}(w, v) \;.$$

Матрица оператора корреляции, записанная в двойственных базисах $\{e_i\} \subset V$, $\{x_i\} \subset V^*$, совпадает с матрицей Грама A. В частности, q невырождена тогда и только тогда, когда $\widehat{q}$ изоморфизм. Пространство

$$\ker \widehat{q} = \{\, v \in V \mid \widetilde{q}(w, v) = 0 \;\; \forall\, w \in V \,\}$$

называется *ядром* квадратичной формы q. Поскольку $\dim \ker \widehat{q} = \dim V - \operatorname{rk} A$, мы ещё раз видим, что ранг формы является её инвариантом (не зависит от координат). Проективизация ядра называется *множеством особых точек* (или *вершинным пространством*) квадрики Q и обозначается

$$\operatorname{Sing} Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \widehat{q}) \subset \mathbb{P}(V) \;.$$

Обратите внимание, что $\operatorname{Sing} Q \subset Q$.

5.3.1. ТЕОРЕМА. *Пересечение $Q' = L \cap Q$ с любым дополнительным к $\operatorname{Sing} Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ представляет собой невырожденную квадрику в L, и Q является линейным соединением*[1] Q' *и* $\operatorname{Sing} Q$.

Доказательство. Запишем $V = U \oplus K$, где $K = \ker \widehat{q}$ и $L = \mathbb{P}(U)$. Если $u \in U$ лежит в ядре $\widehat{q}|_U$, то $q(u, u') = 0$ для всех $u' \in U$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ как $v = u' + u''$ с $u' \in U$, $u'' \in K$, будем иметь $\widetilde{q}(u, v) = \widetilde{q}(u, u'') + \widetilde{q}(u, u') = 0$ для всех $v \in V$, откуда $u \in \ker \widehat{q} \cap U = 0$. Таким образом, ограничение $q|_U$ невырождено. Всякая прямая $\ell = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(U \oplus K)$, пересекающая $\operatorname{Sing} Q = \mathbb{P}(K)$, либо целиком лежит в $\operatorname{Sing} Q$, либо пересекает $L = \mathbb{P}(U)$. Во втором случае $\dim(W \cap K) = \dim(W \cap U) = 1$ и в W имеется базис $\{p, u\}$ с $p \in K$, $u \in U$. Единственным ненулевым элементом матрицы Грама ограничения $q|_W$ в этом базисе может быть лишь $q(u)$, и если $q(u) \neq 0$, то $q|_W$ — это двойная точка p, а если $q(u) = 0$, что $u \in Q'$ и $q|_W \equiv 0$. Таким образом, каждая прямая, пересекающая $\operatorname{Sing} Q$, но не лежащая в $\operatorname{Sing} Q$ целиком, либо больше вообще нигде не пересекает квадрику, либо пересекает Q' и целиком лежит на квадрике Q. □

5.4. Касательное пространство. Прямая ℓ, проходящая через точку $p \in Q$, называется *касательной* к Q в p, если ℓ либо лежит на Q целиком, либо пересекает Q по двойной точке p. Объединение всех прямых, касающихся Q в точке p, называется *касательным пространством* к квадрике Q в точке $p \in Q$ и обозначается $T_p Q$.

5.4.1. ЛЕММА. *Прямая $\ell = (ab)$ касается квадрики Q, заданной уравнением $q(x) = 0$, в точке $a \in Q$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{q}(a, b) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\ell = \mathbb{P}(U)$. Матрица Грама ограничения $q|_U$ имеет в базисе $\{a, b\}$ вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{q}(a,b) \\ \widetilde{q}(b,a) & \widetilde{q}(b,b) \end{pmatrix},$$

и $\det q|_U = 0 \iff \widetilde{q}(a, b) = \widetilde{q}(b, a) = 0$. □

5.4.2. СЛЕДСТВИЕ. *Видимый из точки $b \notin Q$ контур квадрики*[1] *Q высекается из квадрики гиперплоскостью* $\operatorname{Ann} \widehat{q}(b) = \{x \mid \widetilde{q}(b, x) = 0\}$. □

5.4.3. СЛЕДСТВИЕ. *Следующие условия на точку $a \in Q \subset \mathbb{P}(V)$ попарно эквивалентны:*

$$p \in \operatorname{Sing} Q \iff T_p Q = \mathbb{P}(V) \text{ есть все пространство} \iff \frac{\partial q}{\partial x_i}(p) = 0 \text{ для всех } i\,. \quad \square$$

5.4.4. СЛЕДСТВИЕ. *Если точка $p \in Q$ неособа, то $T_p Q = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \widetilde{q}(p, x) = 0\}$ является гиперплоскостью коразмерности 1.* □

5.5. Полярное соответствие. Пространства $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными* проективными пространствами и (когда природа пространства V несущественна) обозначаются через $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^\times$. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом, поскольку классы пропорциональных линейных форм $\xi \in V^*$ — это то же самое, что подпространства $U \subset V$ коразмерности 1. Корреляция $\widehat{q}$, ассоциированная с невырожденной квадратичной формой q, индуцирует линейный проективный изоморфизм $\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\overline{q}} \mathbb{P}(V^*)$, который называется *полярным преобразованием* (или *поляритетом*) квадрики Q. Он переводит точку $p \in \mathbb{P}_n$ в гиперплоскость $L \subset \mathbb{P}_n$, заданную уравнением $\widetilde{q}(p, x) = 0$. Точка p и гиперплоскость L в этом случае называются *полюсом* и *полярой* друг друга относительно Q.

Упражнение 5.3. Покажите, что p лежит на поляре q, если и только если q лежит на поляре p.

Геометрически, поляра точки, не лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, высекающая видимый из этой точки контур квадрики, а поляра точки, лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, касающаяся квадрики в этой точке. Таким образом, всякую квадрику Q можно охарактеризовать как множество всех точек, лежащих на своих полярах.

Упражнение 5.4. Рассмотрим полярное преобразование евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно границы некоторого круга K. Циркулем и линейкой постройте поляру данной точки и полюс данной прямой (что особенно интересно в случае, когда точка лежит внутри круга, а прямая не пересекает круг).

[1] т. е. объединением всех прямых, пересекающих как Q', так и $\operatorname{Sing} Q$

[1] т. е. ГМТ касания с Q всевозможных касательных, опущенных на Q из b

Отметим, что над алгебраически незамкнутыми полями имеются (в том числе и непропорциональные друг другу) квадратичные формы q, задающие *пустые* квадрики Q. Тем не менее, соответствующие таким квадрикам полярные преобразования будут геометрически наблюдаемы и *различны* для непропорциональных форм.

5.5.1. ЛЕММА. *Два поляритета совпадают, если и только если задающие их квадратичные формы пропорциональны.*

Доказательство. Это сразу следует из леммы n° 4.5.1. □

На языке поляритетов пустота квадрики означает, что никакая точка не лежит на своей поляре.

Упражнение 5.5. Опишите геометрически полярное преобразование евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно «мнимой» окружности $x^2 + y^2 = -1$.

5.6. Пространство квадрик. Итак, поляритеты на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathbb{P}_{\frac{n(n+3)}{2}} = \mathbb{P}(S^2V^*)$ классов пропорциональных симметрических квадратных матриц. Допуская (над незамкнутым полем) некоторую вольность речи, мы будем называть это пространство *пространством квадрик*.

5.6.1. СЛЕДСТВИЕ. *Над алгебраически замкнутым полем две квадрики совпадают тогда и только тогда, когда их уравнения пропорциональны.*

Доказательство. Пусть $Q = Q'$. Поскольку при ограничении на любое дополнительное к $\operatorname{Sing} Q = \operatorname{Sing} Q'$ подпространство уравнения обеих квадрик не поменяются, можно считать обе квадрики невырожденными, а тогда всё следует из леммы n° 5.5.1. □

5.6.2. Пространство коник. Квадрики на $\mathbb{P}_2$ называются *проективными кониками*. Коники образуют пятимерное проективное пространство $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Над алгебраически замкнутым полем имеются ровно три проективно неэквивалентных коники: коника ранга 1, или *двойная прямая*, задаётся в подходящем базисе уравнением $x_0^2 = 0$, и все её точки являются особыми; коника ранга 2, или *распавшаяся коника*, задаётся в подходящем базисе уравнением $x_0^2+x_1^2 = 0$ и представляет собой пару прямых $x_0 = \pm i\, x_1$, пересекающихся в особой точке $(0:0:1)$; наконец, коника ранга 3, или *неособая коника*, задаётся в подходящем базисе уравнением $x_0^2+x_1^2+x_2^2 = 0$.

5.6.3. Пример: Коника Веронезе. Удобной моделью неособой коники в $\mathbb{P}_2$ является *коника Веронезе* C_2, которая представляет собою образ образ квадратичного *отображения Веронезе*, действующего из проективизации пространства линейных форм на двумерном векторном пространстве U в проективизацию пространства квадратичных форм на U и переводящего линейную форму $\xi \in U^*$ в её квадрат $\xi^2 \in S^2U^*$:

$$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U^*) \xhookrightarrow{\xi \mapsto \xi^2} \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*) \qquad (\dim U = 2\,).$$

На геометрическом языке отображение Веронезе является биекцией между точками $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(U)$ (нулями линейных форм) и вырожденными квадриками на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(U)$, которые есть ни что иное, как двойные точки, т.е. нули квадратов линейных форм. Такие квадрики составляют в пространстве $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*)$ всех квадрик на $\mathbb{P}_1(U)$ неособую конику $C_2 = \{\, q \in S^2U^* \mid \det q = 0\,\}$. Если зафиксировать в U^* базис (x_0, x_1), а в S^2U^* — базис $\{x_0^2,\, 2\,x_0x_1,\, x_1^2\}$, и представлять линейные формы $\xi(x) = t_0x_0 + t_1x_1$ и квадратичные формы $q(x) = q_0\,x_0^2 + 2\,q_1\,x_0x_1 + q_2\,x_1^2$ однородными координатами $(t_0 : t_1)$ и $(q_0 : q_1 : q_2)$ соответственно, то коника Веронезе C_2 запишется в этих координатах дискриминантным уравнением

$$q_0q_2 - q_1^2 = 0\ ,$$

а отображение Веронезе даст её рациональную параметризацию

$$(t_0 : t_1) \longmapsto (q_0 : q_1 : q_2) = (t_0^2 : t_0t_1 : t_1^2)\ . \tag{5-2}$$

Упражнение 5.6. Сравните эту параметризацию с геометрической параметризацией из (4-6).

5.6.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Невырожденная коника пересекает произвольную кривую, заданную однородным уравнением степени d, не более, чем по $2\,d$ точкам, либо целиком содержится в этой кривой в качестве компоненты.*

Доказательство. Запараметризуем неособую конику однородными полиномами степени 2 от параметра $t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$ (например, как в (5-2) или в (4-6)). Коника будет пересекать кривую с уравнением $f(q) = 0$ при значениях параметра t, удовлетворяющих уравнению $f(q(t)) = 0$, левая часть которого либо тождественно равна нулю, либо однородна степени $2\,d$. В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае имеется не более $2\,d$ точек пересечения. □

5.6.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Каждые 5 точек в $\mathbb{P}_2$ лежат на некоторой конике. Если никакие 4 из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие 3 не коллинеарны, то она ещё и невырождена.*

Доказательство. Поскольку при фиксированном p уравнение $q(p) = 0$ линейно по q, коники, проходящие через $p \in \mathbb{P}_2$ образуют гиперплоскость в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поскольку любые 5 гиперплоскостей в $\mathbb{P}_5$ имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, то коника содержит проходящую через них прямую, и потому распадается на эту прямую и прямую, проходящую через две другие точки. Если никакие три из точек не коллинеарны, всякая проходящая через них коника автоматически неособа и единственна по n° 5.6.4. □

5.6.6. Пространство квадратичных поверхностей. Рассмотрим трёхмерное проективное пространство $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, где $\dim V = 4$. Пространство квадратичных поверхностей в нём: $\mathbb{P}(S^2V^*)$ имеет размерность 9.

Упражнение 5.7. Покажите, что любые 9 точек, а также любые 3 прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике.

Особые квадрики в $\mathbb{P}_3$ (над алгебраически замкнутым полем) суть: *двойная плоскость* $x_0^2 = 0$ (ранг 1), *распавшаяся квадрика* $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2), представляющая собой пару пересекающихся плоскостей[2] $x_0 = \pm i\, x_1$, и *простой конус*[1] $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (ранг 3). Заметьте, что ни на одной из них нет трёх попарно скрещивающихся прямых, так что квадрика, проходящая через три попарно скрещивающиеся прямые в соответствии с упр. 5.7, автоматически неособа.

5.6.7. Пример: Квадрика Сегре. Удобной геометрической моделью неособой квадратичной поверхности является детерминантная *квадрика Сегре*, устроенная следующим образом. Рассмотрим два двумерных векторных пространства U_-, U_+ и 4-мерное пространство $W = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$ всех линейных отображений. Точки пространства $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W)$ суть ненулевые линейные отображения $U_- \xrightarrow{F} U_+$, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, или что то же самое, отображения $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U_-) \xrightarrow{\widetilde{F}} \mathbb{P}(U_+) = \mathbb{P}_1$. Отображения ранга 1 (стягивающие всю $\mathbb{P}(U_-)$ в одну точку) образуют в пространстве $\mathbb{P}(W)$ детерминантную квадрику Сегре

$$Q_s = \left\{ F = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \;\Big|\; \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\} . \tag{5-3}$$

Всякий оператор F ранга 1 имеет одномерное ядро и одномерный образ, а стало быть, определяет единственные с точностью до пропорциональности вектор $v \in U_+$ и ковектор $\xi \in U_-^*$, такие что $\mathrm{im}\,(F)$ натянут на v, $\ker(F) = \mathrm{Ann}\,(\xi)$, а сам оператор при этом переводит вектор $u \in U_-$ в $\xi(u) \cdot v \in U_+$. Такой оператор обозначается $\xi \otimes v$.

Упражнение 5.8. Проверьте, что в координатах оператор $\xi \otimes v$, отвечающий форме $\xi = (\xi_0 : \xi_1) \in U_-^*$ и вектору $v = (t_0 : t_1) \in U_+$, имеет матрицу

$$\xi \otimes v = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 t_0 & \xi_1 t_0 \\ \xi_0 t_1 & \xi_1 t_1 \end{pmatrix} \tag{5-4}$$

Упражнение 5.9. Убедитесь, что любая $m \times n$-матрица (a_{ij}) ранга 1 получается умножением столбца высоты n справа на строку ширины m, т. е. имеет $a_{ij} = \xi_i \eta_j$ для подходящих (ξ_i) и (η_j).

5.6.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение Сегре, заданное правилом*

$$s : \mathbb{P}(U_-^*) \times \mathbb{P}(U_+) \xhookrightarrow{(\xi,v)\mapsto \xi\otimes v} \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U_-, U_+)) ,$$

[2] или линейное соединение особой прямой и пары точек, составляющих неособую квадрику на дополнительной прямой

[1] т. е. линейное соединение одной особой точки с невырожденной коникой в дополнительной плоскости

биективно отображает $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$ на Q_S и переводит два семейства координатных прямых $\mathbb{P}_1\times v$ и $\xi\times\mathbb{P}_1$ в два семейства прямых на на Q_S. В каждом из этих семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются. Каждая точка Q_S является точкой пересечения пары прямых из различных семейств. Никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Доказательство. Биективность следует из предыдущего обсуждения и упр. 5.9. Чтобы проверить утверждение про прямые, заметим, что всякая 2×2-матрица ранга 1 имеет пропорциональные строки и столбцы, и матрицы с фиксированными отношениями

$$([\text{строка }1]:[\text{строка }2])=(t_0:t_1)\quad\text{или}\quad([\text{столбец }1]:[\text{столбец }2])=(\xi_0:\xi_1)$$

составляют двумерные векторные подпространства в W (т. е. прямые на Q_S), которые как раз и являются образами прямых $\mathbb{P}_1\times v$ и $\xi\times\mathbb{P}_1$. Из биективности отображения Сегре следует, что все соотношения инцидентности между этими прямыми такие же, как на $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$. Чтобы показать, что никаких других прямых на Q_S нет, заметим, что всякая прямая, лежащая на Q_S и проходящая через $p\in Q_S$ содержится в конике $Q_S\cap T_xQ_S$. Но поскольку через p уже проходит пара прямых из координатных семейств, эта коника и будет объединением этих двух прямых. □

Упражнение 5.10. Покажите, что операторы $\xi\otimes v$ с $\xi\in U_-^*$, $u\in U_+$ линейно порождают пространство $\mathrm{Hom}(U_-,U_+)$ и убедитесь в равносильности следующих трёх свойств оператора $F\in\mathrm{Hom}(U_-,U_+)$: (1) $F\in T_{\xi\otimes v}Q_S$; (2) $F(\mathrm{Ann}\,(\xi))\subset\Bbbk\cdot v$; (3) $F=\xi\otimes w+\eta\otimes v$ для некоторых $\eta\in U_-^*$, $w\in U_+$.

Упражнение 5.11. Покажите, что действие проективного изоморфизма $\overline{F}:\mathbb{P}(U_-)\longrightarrow\mathbb{P}(U_+)$ ассоциированного с невырожденным оператором $F\in\mathrm{Hom}(U_-,U_+)$, на произвольную точку $p\in\mathbb{P}(U_-)$ допускает следующее чисто геометрическое описание: проведём в $\mathbb{P}_3=\mathbb{P}\left(\mathrm{Hom}(U_-,U_+)\right)$ плоскость π через точку F и отвечающую точке $p=\mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,(\xi))$ прямолинейную образующую $L'=\xi\times\mathbb{P}(U_+)$ на квадрике Сегре $Q_S\subset\mathbb{P}_3$. Плоскость π пересечёт квадрику Сегре по распавшейся конике, состоящей из образующей L' и ещё одной образующей $L''=\mathbb{P}(U_-^*)\times v$, лежащей в другом семействе и отвечающей некоторой точке $v\in\mathbb{P}(U_-)$. Тогда $\overline{F}(p)=v$.

5.6.9. СЛЕДСТВИЕ. *Существует единственная (и автоматически неособая) квадрика, проходящая через 3 данные попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$. Она заметается всеми прямыми, пересекающими каждую из трёх заданных.*

Доказательство. Всякая квадрика, проходящая через три скрещивающихся прямые, является неособой квадрикой Сегре, заметаемой двумя семействами прямолинейных образующих. Все три данных прямых должны лежать в одном из них. Но тогда прямые другого семейства пересекают каждую из них, и наоборот, всякая прямая пересекающая каждую из них, должна лежать на квадрике (ибо пересекает её по трём точкам) и быть в другом семействе. □

Упражнение 5.12. Сколько прямых пересекают 4 данные попарно скрещивающиеся прямые в пространствах а) $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ б) $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$ в*) $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ г*) $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ (найдите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых[2]).

5.7. Линейные подпространства на невырожденной квадрике. Факт наличия двух семейств прямолинейных образующих, заметающих невырожденную квадрику в $\mathbb{P}_3$, распространяется в старшие размерности следующим образом. Рассмотрим невырожденную квадрику

$$Q_{n-1}=V(q)\subset\mathbb{P}_n=\mathbb{P}(V)$$

и лежащее на ней линейное подпространство $L=\mathbb{P}(W)$. Условие $L\subset Q_{n-1}$ означает, что подпространство $W\subset V$ изотропно для формы q, т. е. что $q|_W\equiv 0$, или что $\widehat{q}(W)\subset\mathrm{Ann}\,(W)$. Поскольку форма q невырождена, её корреляция $\widehat{q}:V\longrightarrow V^*$ инъективна. Стало быть,

$$\dim W=\dim\widehat{q}(W)\leqslant\dim\mathrm{Ann}\,(W)=\dim V-\dim W\ ,$$

откуда $\dim(W)\leqslant\dim(V)/2=(n+1)/2$. Обозначая целую часть числа $*$ через $[\,*]$, получаем:

$$\dim L=\dim W-1\leqslant[(n-1)/2]\ ,\tag{5-5}$$

[2] УКАЗАНИЕ: примените «метод геометрических мест»: рассмотрите все прямые, пересекающие некоторые три из заданных четырёх, и выясните, какие из них пересекают оставшуюся четвёртую прямую.

Иными словами, на невырожденной квадрике в $Q_{n-1} \subset \mathbb{P}_n$ не может лежать проективных подпространств размерности большей, чем половина размерности квадрики.

Как мы видели в лекции, посвящённой ортогональной геометрии билинейных форм над произвольным полем, всякое изотропное подпространство W формы Q содержится в некотором максимальном гиперболическом подпространстве H, размерность которого является инвариантом формы q относительно линейных замен координат. Более того, группа изометрий $\mathrm{O}_q(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ формы q транзитивно действует и на изотропных и на гиперболических подпространствах заданной размерности, переводя квадрику $Q = V(q)$ в себя. Таким образом, размерность максимального проективного пространства, целиком лежащего на квадрике, равна

$$\dim L_{\max} = \frac{1}{2} \dim H - 1 \,, \tag{5-6}$$

где $\dim H$ — размерность гиперболической составляющей формы q, задающей квадрику, и через каждую точку квадрики можно провести лежащее на квадрике проективное подпространство такой размерности. Число (5-6) называется *планарностью* квадрики Q. Планарность, очевидно, не зависит от выбора координат, и квадрики различной планарности заведомо не эквивалентны.

В частности, над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ две невырожденные квадрики, заданные квадратичными формами, в сигнатуре которых плюсов не меньше, чем минусов, проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда их сигнатуры одинаковы, и планарность такой квадрики на единицу меньше числа минусов в сигнатуре.

5.7.1. Семейства линейных образующих. Чтобы прояснить геометрию взаимного расположения проективных подпространств, лежащих на квадрике Q, вспомним, что всякое такое подпространство $L \subset Q$, проходящее через заданную точку $p \in Q$, содержится в пересечении $Q \cap T_pQ$ квадрики с касательной гиперплоскостью в точке p.

5.7.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Сечение неособой квадрики $Q = V(q) \subset \mathbb{P}_n$ произвольной гиперплоскостью $\Pi = \mathbb{P}(W)$ либо является неособой квадрикой в Π, либо имеет единственную особую точку $p \in \Pi \cap Q$. Второе равносильно тому, что $\Pi = T_pQ$ касается квадрики в точке p, и в этом случае пересечение $Q \cap T_pQ$ является линейным соединением точки p с невырожденной квадрикой Q' в $(n-2)$-мерном дополнительным к $\{p\}$ проективном подпространстве $\mathbb{P}_{n-2} \subset T_pQ$. Планарность квадрики Q' на единицу меньше, чем у Q, и максимальные проективные подпространства, лежащие на Q и проходящие через точку p, являются линейными соединениями точки p со всевозможными максимальными проективными подпространствами, лежащими на квадрике Q'.*

Доказательство. Первое утверждение следует из оценки:

$$\dim\ker(\widehat{q}|_W) = \dim\big(W \cap \widehat{q}^{-1}(\mathrm{Ann}\,W)\big) \leqslant \dim \widehat{q}^{-1}(\mathrm{Ann}\,W) = \dim \mathrm{Ann}\,W = \dim V - \dim W = 1$$

и замечания, что если ядро ограничения $\widehat{q}|_W$ не нулевое, а одномерное с базисом p, то ему отвечает точка $p \in Q \cap \Pi$ с $\mathrm{Ann}\,(\widehat{q}(p)) = W$, откуда $T_pQ = \Pi$. Наоборот, если $\Pi = T_pQ = \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,\widehat{q}(p))$, то вектор $p \in \mathrm{Ann}\,\widehat{q}(p)$ лежит в ядре ограничения $\widehat{q}$ на $\mathrm{Ann}\,\widehat{q}$, и согласно предыдущей оценке это ядро исчерпывается линейной оболочкой p, т. е. p является единственной особой точкой квадрики $Q \cap T_pQ$. Всё остальное вытекает из теоремы (n° 5.3.1). □

5.7.3. Пример: гладкие квадрики над алгебраически замкнутым полем. Над алгебраически замкнутым полем уравнение гладкой квадрики $Q_{n-1} \subset \mathbb{P}_n$ приводится к виду

$$\begin{cases} x_0x_1 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = 0 & \text{(если } n \text{ нечётно, т. е. сама квадрика чётномерна),} \\ x_0x_1 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1} = x_n^2 & \text{(если } n \text{ чётно, т. е. сама квадрика нечётномерна).} \end{cases} \tag{5-7}$$

Тем самым, любая чётномерная квадрика гиперболична и заметается лежащими на ней проективными подпространствами половинной (по отношению к размерности квадрики) размерности. Нечётномерная квадратичная форма является ортогональной суммой гиперболической и одномерной анизотропной, и стало быть, невырожденная квадрика $Q_{n-1} \subset \mathbb{P}_n$ при чётном n заметается проективными подпространствами размерности $n/2 - 1$.

Так, на нульмерной и одномерной гладких квадриках $Q_0 \subset \mathbb{P}_1$ и $Q_1 \subset \mathbb{P}_2$ существуют только 0-мерные подпространства. Следующие две квадрики — двумерная $Q_2 \subset \mathbb{P}_3$ и трёхмерная $Q_3 \subset \mathbb{P}_4$ — не содержат плоскостей, но каждая точка $p \in Q_3$ лежит на паре прямых, проходящих через p и две точки неособой квадрики $Q_0 \subset T_0Q_2 \setminus \{p\}$, а через каждую точку $p \in Q_3$ проходит одномерное семейство прямых, естественно запараметризованное точками гладкой коники $Q_1 \subset T_pQ_4 \setminus \{p\}$. Далее, гладкая четырёхмерная квадрика $Q_4 \subset \mathbb{P}_5$ не содержит 3-мерных подпространств, но через любую точку $p \in Q_4$ проходят два одномерных семейства плоскостей, естественно запараметризованных двумя семействами прямых на квадрике Сегре $Q_2 = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \subset T_pQ_4 \setminus \{p\}$ (т. е. двумя проективными прямыми).

5.7.4. Пример: гладкие вещественные квадрики. Условимся записывать уравнение невырожденной квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ квадратичной формой q, в сигнатуре (p, m) которой число плюсов p не меньше числа минусов m, и будем обозначать такую квадрику $Q_{n-1,m-1}$, а задающую её форму — через $q_{n+1,m}$. Таким образом, $Q_{k,\ell}$ обозначает гладкую k-мерную вещественную квадрику планарности ℓ, а $q_{r,h}$ означает невырожденную квадратичную форму на r-мерном пространстве с положительно определённой анизотропной составляющей и гиперболической составляющей размерности $2h$.

Как мы видели всякая гладкая вещественная квадрика проективно эквивалентная одной из квадрик $Q_{k,\ell} = V\left(q_{k+2,\ell+1}\right)$, которые, в свою очередь, попарно неэквивалентны друг другу, поскольку при равной размерности имеют разную планарность. Квадрики $Q_{n-1,-1} \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ планарности -1 задаются анизотропным уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \,,$$

и потому пусты. Квадрики $Q_{n-1,0} \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ планарности 0 называются *эллиптическими* (или *эллипсоидами*). Они задаются уравнением сигнатуры $(n, 1)$

$$x_0^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \,,$$

и не содержат внутри себя никаких проективных подпространств положительной размерности. Квадрики более высокой планарности $\ell \geqslant 1$ называются *гиперболическими* (или *гиперболоидами*). Они задаются уравнением сигнатуры $(n-\ell, \ell+1)$, где $\ell \leqslant [(n-1)/2]$, и заметаются ℓ-мерными проективными подпространствами так, что семейство ℓ-мерных подпространств, проходящих через заданную точку $p \in Q_{n-1,\ell} \subset \mathbb{P}_n$ естественно запараметризовано семейством всех $(\ell-1)$-мерных подпространств, лежащих на квадрике $Q_{n-3,\ell-1} \subset \mathbb{P}_{n-2} \subset T_pQ_{n-1,\ell} \smallsetminus \{p\}$, которая имеет на 2 меньшую размерность и на 1 меньшую планарность. Например, через каждую точку квадрики Сегре $Q_{2,1} \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ проходит ровно две прямые, соответствующие двум точкам непустой гладкой квадрики $Q_{0,0} \subset \mathbb{P}_1$.