§4. Проективное пространство.

Векторное пространство V над произвольным полем $\Bbbk$ — это объект из мира алгебры. Векторы — это «то, что можно складывать и умножать на числа». Но со всяким векторным пространством связаны два геометрических пространства — *аффинное* и *проективное*. Эти пространства состоят из *точек* и в них можно рисовать *геометрические фигуры*.

4.1. n-мерное аффинное пространство $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ строится из n-мерного векторного пространства V и называется *аффинизацией* V. По определению, точками $\mathbb{A}(V)$ являются векторы из V. Точка, представляющая нулевой вектор, называется *началом координат* (или *центром аффинизации*) и обозначается через O. Все прочие точки можно представлять себе как концы ненулевых «радиус-векторов», отложенных от начала координат. Отметим, что 0-мерное пространство $\mathbb{A}^0 = \mathbb{A}\left(\{\overrightarrow{0}\}\right)$ состоит из одной точки.

Если выбрать в векторном пространстве V какой-нибудь базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и обозначить через $x_1, x_2, \dots, x_n$ двойственный базис в V^* (т. е. линейные функции $V \xrightarrow{x_i} \Bbbk$, вычисляющие координаты относительно выбранного базиса), то с каждым многочленом $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ можно связать *полиномиальную функцию* $\mathbb{A}(V) \xrightarrow{f} \Bbbk$, значение которой на радиус-векторе $v = \sum a_i e_i \in V$ равно результату подстановки в f вместо переменных x_i значений $x_i(v) = a_i$. Полиномиальные функции образуют векторное подпространство в пространстве всех функций $\mathbb{A}(V) \longrightarrow \Bbbk$. Легко видеть, что это пространство не зависит от выбора базиса, использованного для определения полиномиальных функций.

Мы будем обозначать через $S^d V^* \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ векторное подпространство всех *однородных* многочленов[1] степени d. Как векторное пространство, пространство всех многочленов представляет собой прямую сумму

$$\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \geqslant 0} S^d V^*\,, \text{ где } S^0 V^* = \Bbbk\,,$$

и $S^{d_1} V^* \cdot S^{d_2} V^* \subset S^{d_1 + d_2} V^*$. Поскольку линейная замена координат переводит однородную форму степени d в однородную форму степени d, пространство полиномиальных функций, получающихся из однородных многочленов степени d, тоже не зависит от выбора базиса, с помощью которого они определяются. Отметим, однако, следующее важное обстоятельство. Над конечным полем $\Bbbk$ всегда есть многочлены, имеющие разную степень, но задающие *одну и ту же* полиномиальную функцию на $\mathbb{A}(V)$. Например, многочлены x и x^p задают равные функции на аффинной прямой $\mathbb{A}_1$ над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

Упражнение 4.1. Пусть поле $\Bbbk = \mathbb{F}_q$ состоит из q элементов. Подсчитайте количество точек в пространстве $\mathbb{A}_n$ и количество всех отображений $\mathbb{A}_n \longrightarrow \Bbbk$ (отметим, что это множество конечно, тогда как множество многочленов бесконечно). Верно ли, что любая функция $\mathbb{A}_n \longrightarrow \Bbbk$ является полиномиальной?

Таким образом, над конечным полем нельзя говорить о «степени полиномиальной функции» и неправильно обозначать многочлен и связанную с ним полиномиальную функцию одной и той же буквой. Над бесконечным полем таких проблем нет, и многочлен $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ однозначно восстанавливается по соответствующей функции $\mathbb{A}_n \xrightarrow{f} \Bbbk$.

Упражнение 4.2. Покажите, что над бесконечным полем $\Bbbk$ различным многочленам всегда отвечают различные полиномиальные функции на аффинном пространстве.

[1] по старинной традиции такие многочлены называют *однородными формами* степени d; например, однородные многочлены второй и третьей степени называют *квадратичными формами* и *кубическими формами*

4.1.1. Аффинные алгебраические многообразия. Множество решений системы полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{4-1}$$

можно воспринимать как геометрическую фигуру в пространстве $\mathbb{A}_n$ (возможно пустую). Такие фигуры называются *аффинными алгебраическими многообразиями*.

Простейшим примером аффинного многообразия является *аффинная гиперплоскость* — фигура, задаваемая одним линейным уравнением

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n = c \tag{4-2}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in V^*$ — ненулевая линейная форма, а $c \in \Bbbk$ — произвольная константа. Такая гиперплоскость является сдвигом аффинного подпространства $\mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{A}(\mathrm{Ann}\,(\xi)) \subset \mathbb{A}(V)$, ассоциированного с *векторным* подпространством

$$\mathrm{Ann}\,(\xi) = \{v \in V \mid \xi(v) = 0\} \subset V\ , \tag{4-3}$$

которое задаётся *однородным* линейным уравнением $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n = 0$. Сдвиг происходит на произвольный вектор v, для которого $\xi(v) = c$. На алгебраическом языке это означает, что любое решение w неоднородного уравнения $\xi(w) = c$ имеет вид $v + u$, где u — решение однородного уравнения $\xi(u) = 0$. Векторное подпространство (4-3) называется направляющим подпространством аффинной гиперплоскости.

4.2. $\boldsymbol{n}$-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ строится из $(n+1)$-мерного векторного пространства V и называется *проективизацией* V. По определению, точками $\mathbb{P}(V)$ являются одномерные векторные подпространства в V, или, что то же самое, прямые в $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$, проходящие через начало координат.

Чтобы увидеть эти прямые как «обычные точки», следует поместить внутрь $\mathbb{A}(V)$ экран — не содержащую начала координат n-мерную аффинную гиперплоскость $U \subset \mathbb{A}(V)$, как на рис. 4◇1. Всякий такой экран называется *аффинной картой* на $\mathbb{P}(V)$. Ни одна аффинная карта U не покрывает $\mathbb{P}_n$ целиком: вне неё остаются все одномерные подпространства из направляющего векторного подпространства гиперплоскости U, которое обозначается через U_∞ и представляет собою параллельную копию гиперплоскости U, проходящую через O. Согласно нашему определению, одномерные векторные подпространства, лежащие в U_∞, образуют проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(U_\infty)$. Оно называется бесконечно удалённой гиперплоскостью аффинной карты U. Геометрически, точки бесконечно удалённой гиперплоскости — это всевозможные направления в аффинном пространстве U.

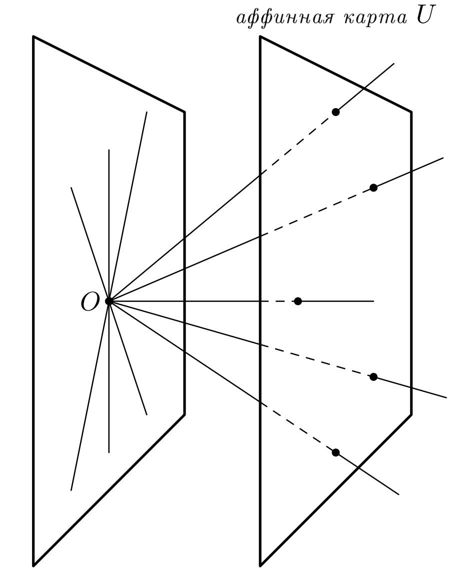

Рис. 4◇1. Проективный мир.

Таким образом, с каждой аффинной картой $U \subset \mathbb{P}_n$ связано разбиение проективного пространства $\mathbb{P}_n$ в дизъюнктное объединение аффинного пространства $\mathbb{A}^n = U$ и проективного пространства $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(U_\infty)$, которое, в свою очередь, можно разбить в дизъюнктное объединение $\mathbb{A}^{n-1}$ и $\mathbb{P}_{n-2}$ и т. д. Проделав эту процедуру n раз, мы придём к разбиению $\mathbb{P}_n$ в объединение непересекающихся аффинных пространств всех размерностей от 0 до n:

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \ \cdots\ = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0$$

Упражнение 4.3. Подсчитайте при помощи этого описания количество точек, из которого состоит пространство $\mathbb{P}_n$ над конечным полем из q элементов. Какое тождество с участием q получается из разбиения $\mathbb{P}_n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0$?

Отметим, что 0-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_0$, являющееся проективизацией одномерного векторного пространства, состоит из одной точки и совпадает с 0-мерным аффинным пространством.

4.2.1. Однородные координаты. Иначе точки проективного пространства $\mathbb{P}(V)$ можно воспринимать как *ненулевые* векторы пространства V, рассматриваемые с точностью до пропорциональности. Имеется каноническая сюрьективная проекция

$$V \smallsetminus \{0\} \xrightarrow{v \mapsto \Bbbk \cdot v} \mathbb{P}(V)$$

переводящая каждый ненулевой вектор в натянутое на него одномерное подпространство, и два вектора $v, w \in V$ тогда и только тогда попадают в одну и ту же точку $p \in \mathbb{P}(V)$, когда $v = \lambda w$ для $\lambda \in \Bbbk \smallsetminus \{0\}$. Если зафиксировать в объемлющем векторном пространстве V какой-нибудь базис $e_0, e_1, \ldots, e_n$ и записывать векторы строчками координат, то пропорциональность векторов $(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lambda \cdot (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ означает равенство отношений между их координатами $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = (y_0 : y_1 : \ldots : y_n)$. Таким образом, точки на $\mathbb{P}_n$ взаимно однозначно соответствуют наборам из n отношений $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ между $(n+1)$ координатами *ненулевых* векторов. Эти наборы отношений называется ***однородными координатами*** на $\mathbb{P}(V)$ относительно выбранного базиса $e_0, e_1, \ldots, e_n$ в V.

4.2.2. Пример: проективная прямая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ представляет собою множество одномерных подпространств координатного векторного пространства $\Bbbk^2$. Если обозначить координаты в $\Bbbk^2$ через (x_0, x_1), то каждая точка $p \in \mathbb{P}_1$ будет задаваться отношением своих координат $(p_0 : p_1)$. Отношения $(0 : 1)$ и $(1 : 0)$, отвечающие координатным осям, тоже допускаются. Проективная прямая покрывается двумя аффинными картами U_0 и U_1 (см. рис. 4◇2). Карта U_0 — это аффинная прямая с уравнением $x_0 = 1$. Она покрывает все точки $\mathbb{P}_1$ кроме вертикальной координатной оси $(0 : 1)$, которая является единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_0. Остальные точки $(p_0 : p_1)$, видимые в карте U_1, имеют $p_0 \neq 0$ и могут быть записаны виде $(p_0 : p_1) = (1 : t(p))$, где функция $t = x_1/x_0 = x_1|_{U_0}$ является ограничением на U_0 координатной линейной формы x_1 и может использоваться как внутренняя координата в карте U_0. Аналогично, карта U_1 задаётся в $\Bbbk^2$ уравнением $x_1 = 1$ и состоит из точек $(p_0 : p_1) = (s(p) : 1)$, у которых $p_1 \neq 0$. Функция $s = x_0/x_1 = x_0|_{U_1}$, являющаяся ограничением на U_1 координатной формы x_0, может использоваться как внутренняя координата в карте U_1. Единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_1 является горизонтальная координатная ось $(1 : 0)$. Если точка $p = (p_0 : p_1) \in \mathbb{P}_1$ видна в обеих картах, то её координаты $s = p_0/p_1$ и $t = p_1/p_0$ в этих картах связаны соотношением $s = 1/t$ (которое также очевидно из подобия прямоугольных треугольников на рис. 4◇2). Таким образом, $\mathbb{P}_1$ можно воспринимать как результат склейки двух аффинных координатных прямых $\mathbb{A}^1$ (одна —с координатой s, другая — с координатой t) по дополнению до начала координат по следующему правилу: точка с координатой s на одной прямой приклеивается к точке с координатой $t = 1/s$ на другой и наоборот.

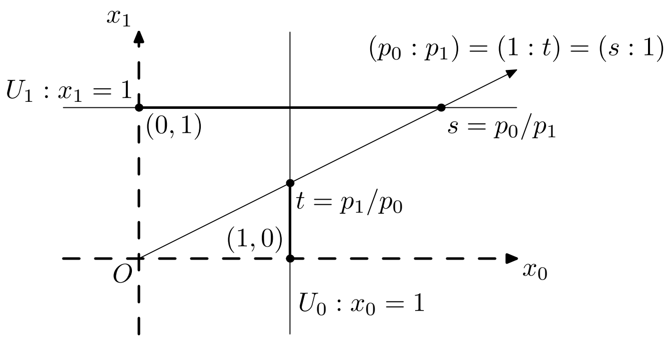

Рис. 4◇2.

Если основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$, то в результате такой склейки мы получим окружность диаметра 1, картами на которой служат две диаметрально противоположные касательные прямые (см. рис. 4◇3), а отображение окружности на каждую из карт задаётся центральным проектированием из диаметрально противоположного к точке касания «полюса» окружности. Тем самым, вещественная проективная прямая как топологическое пространство гомеоморфна окружности.

Совершенно аналогичным образом при $\Bbbk = \mathbb{C}$ в результате склейки двух экземпляров комплексной аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ по правилу $s \leftrightarrow t = 1/s$ мы получим сферу диаметра 1, для которой наши карты являются диаметрально противоположными касательными плоскостями, а сопоставление точке сферы точки на карте задаётся центральной проекцией из диаметрально противоположного к точке касания «полюса» сферы, как на рис. 4◇4) (если ориентации касательных плоскостей выбраны согласованным образом, как на рис. 4◇4, комплексные числа s и t будут иметь противоположные аргументы и, как показывает рис. 4◇3, — обратные модули).

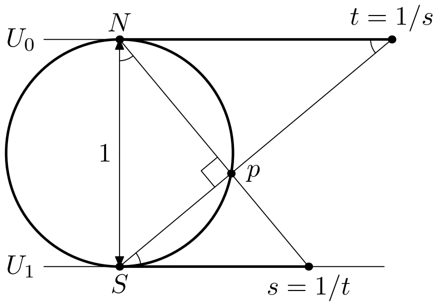

Рис. 4◇3. $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$.

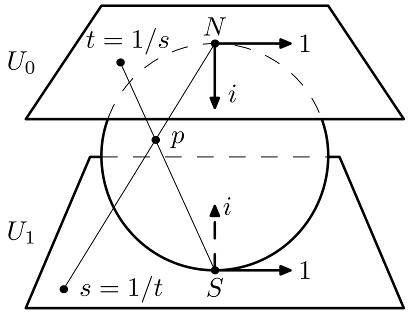

Рис. 4◇4. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$.

Отметим, что проективно-геометрический взгляд на окружность как на прямую, к которой «добавили бесконечно удалённую точку» хорошо согласуется с представлениями о бесконечности, принятыми в математическом анализе: если мы занимаемся анализом на аффинной прямой с координатой t, то стремлению t к бесконечности отвечает стремление точки $s = 1/t$ к нулю; при $st \neq 0$ величины t и $s = 1/t$ являются координатами одной и той же точки $p = (p_0 : p_1) = (s : 1) = (1 : t) \in \mathbb{P}_1$ и эта точка стремится при $t \to \infty$ к точке $(0 : 1) \in \mathbb{P}_1$, которая не видна в карте с координатой t и является началом координат в карте с координатой s (и эта картинка одинаково осмысленна как над $\mathbb{R}$, так и над $\mathbb{C}$).

Упражнение 4.4. Проверьте, что вещественные проективные пространства $\mathbb{RP}_2$ и $\mathbb{RP}_3$ гомеоморфны, соответственно, ленте Мёбиуса с заклеенной кругом границей[1], и группе $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ собственных изометрий трёхмерного евклидова пространства.

4.2.3. Связь между однородными и локальными аффинными координатами. Всякая не проходящая через начало координат гиперплоскость в аффинном пространстве $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ может быть задана линейным уравнением вида

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 1 \tag{4-4}$$

с единичной правой частью. При этом линейная форма $\alpha(x) = a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \in V^*$ однозначно определяется гиперплоскостью. Иначе говоря, уравнения (4-4) устанавливают взаимно однозначное соответствие между аффинными картами на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и ненулевыми линейными формами $\alpha \in V^*$. Аффинную карту, заданную уравнением (4-4) мы будем обозначать через U_α. Бесконечно удалённая гиперплоскость такой карты представляет собою проективизацию векторного подпространства, задаваемого однородным уравнением $\alpha(v) = 0$.

Любые n линейных форм $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in V^*$, дополняющие форму α до базиса пространства V^*, могут использоваться в качестве *локальных* аффинных координат внутри карты U_α. Чтобы вычислить их значения в точке $p \in \mathbb{P}_n$ с однородными координатами $(p_0 : p_1 : \ \dots\ : p_n)$, следует сначала выбрать в одномерном подпространстве, отвечающем точке p, вектор[2] $v = p/\alpha(p) \in U_\alpha$, а затем вычислить значения n линейных форм ξ_ν на этом векторе. Получающийся таким образом набор из n чисел

$$\left(\frac{\xi_1(p)}{\alpha(p)}, \frac{\xi_2(p)}{\alpha(p)}, \dots, \frac{\xi_n(p)}{\alpha(p)}\right)$$

однозначно характеризует точку p и называется *локальными аффинными координатами* точки p. Подчеркнём, что локальные координаты определены только в пределах карты U_α и зависят как от карты U_α, так и от выбора линейных форм ξ_i, дополняющих α до базиса в V^*.

4.2.4. Пример: стандартное аффинное покрытие $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$ состоит из $(n+1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в $\mathbb{A}^{n+1}$ уравнениями $\{x_\nu = 1\}$. Для каждого $\nu = 0, 1, \dots, n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на U_ν берутся n форм

$$t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = \frac{x_i}{x_\nu} \quad \text{с} \quad 0 \leqslant i \leqslant n\,,\ i \neq \nu\,.$$

[1] напомним, что границей ленты Мёбиуса, так же как и границей круга, является окружность

[2] обратите внимание, что условие $\alpha(p) \neq 0$ равносильно тому, что точка p видна в карте U_α

Пространство $\mathbb{P}_n$ можно представлять себе как результат склейки $(n+1)$ различных копий $U_0, U_1, \dots, U_n$ аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ по их фактическим пересечениям внутри $\mathbb{P}_n$. В однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ состоит из всех таких x, у которых обе координаты x_μ и x_ν не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на U_μ и U_ν это подмножество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$, если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1/t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)}/t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$.

4.3. Проективные алгебраические многообразия. Зафиксируем в $(n+1)$-мерном пространстве V какой-нибудь базис и будем представлять точки точки проективного пространства $\mathbb{P}(V)$ однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ в этом базисе. В отличие от аффинной геометрии, в проективной геометрии никакой отличный от константы многочлен $f \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ не задаёт на $\mathbb{P}_n$ никакой функции — в результате подстановки в f двух пропорциональных наборов значений координат, отвечающих одной и ту же точке на $\mathbb{P}_n$, мы скорее всего получим разные значения. Тем не менее, для любого *однородного* многочлена $f \in S^d(V^*)$ множество решений уравнения $f(x) = 0$ является корректно определенной геометрической фигурой в $\mathbb{P}_n$, поскольку

$$f(v) = 0 \iff f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0 .$$

Подмножество в $\mathbb{P}_n$, на котором обращается в нуль однородный многочлен f степени d, обозначается $V(f)$ и называется *проективной гиперповерхностью* степени d. Пересечения гиперповерхностей называются *проективными алгебраическими многообразиями*. С алгебраической точки зрения проективное многообразие представляет собою множество решений системы однородных полиномиальных уравнений, причём решения эти рассматриваются с точностью до пропорциональности.

4.3.1. Пример: гладкая коника. Посмотрим как выглядит кривая, заданная в $\mathbb{P}_2$ над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$ однородным уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \tag{4-5}$$

в различных аффинных картах (см. рис. 4◇5).

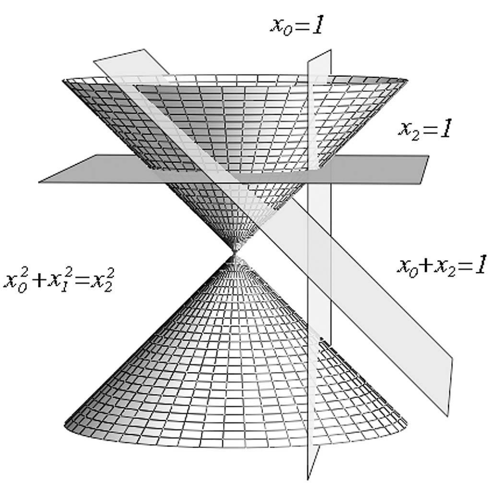

Рис. 4◇5. Конус.

В стандартной карте U_{x_0}, где $x_0 = 1$, в локальных координатах $t_1 = x_1|_{U_{x_0}} = x_1/x_0$ и $t_2 = x_2|_{U_{x_0}} = x_2/x_0$ уравнение (4-5) превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_1^2 = 1$.

В стандартной карте U_{x_2}, где $x_2 = 1$, с локальными аффинными координатами $t_0 = x_0|_{U_{x_2}} = x_0/x_2$, $t_1 = x_1|_{U_{x_2}} = x_1/x_2$ мы получим уравнение окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$.

В карте $U_{x_0+x_2}$, где $x_0 + x_2 = 1$, в локальных аффинных координатах $t = x_1|_{U_{x_0+x_2}} = x_0/(x_0 + x_2)$, $u = (x_2 - x_0)|_{U_{x_0+x_2}} = (x_2 - x_0)/(x_0 + x_2)$ мы получим уравнение параболы $t^2 = u$ (надо перенести x_1^2 в (4-5) слева направо и поделить обе части на $(x_2 - x_0)^2$).

Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой (4-5) в различных картах. Вид кривой в карте $U \subset \mathbb{P}_2$ определяется тем, как располагается бесконечно удалённая прямая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U_\infty) \subset \mathbb{P}_2$ этой карты по отношению к проективной кривой (4-5): эллипс, парабола и гипербола возникают, соответственно, когда эта прямая не пересекается с кривой, касается её и пересекается с нею в двух различных точках (см. рис. 4◇6).

4.3.2. Проективное замыкание аффинного алгебраического многообразия. Любое аффинное многообразие $X \subset \mathbb{A}^n$ может рассматриваться как изображение некоторого проективного многообразия в стандартной аффинной карте $U_0 = \mathbb{A}^n$. Для этого к координатам $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства $\mathbb{A}_n$ следует добавить $(n+1)$-ю координату x_0 и сделать каждое из уравнений $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, которыми задаётся многообразие X в $\mathbb{A}^n$, однородным уравнением на $(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ той же степени, что и f_i, умножив каждый входящий в f_i моном $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$

на недостающую до однородности степень $x_0^{\deg f_\nu - \sum m_i}$. Проективное многообразие $\overline{X} \subset \mathbb{P}_n$, заданное полученными однородными уравнениями, называется *проективным замыканием* аффинного многообразия X. В стандартной карте U_0, где $x_0 = 1$, оно совпадает с исходным многообразием X, а его бесконечно удалённые по отношению к U_0 точки $\overline{X} \smallsetminus X = \overline{X} \cap \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,(x_0))$ суть *асимптотические направления* многообразия X.

Например, проективным замыканием аффинной кривой $x_1 = x_2^3$ является проективная кривая

$$x_0^2 x_1 = x_2^3\,,$$

которая в другой стандартной аффинной карте U_1, где $x_1 = 1$, превращается в полукубическую параболу $x_0^2 = x_2^3$, имеющую *каспидальную особенность*[1] в начале координат.

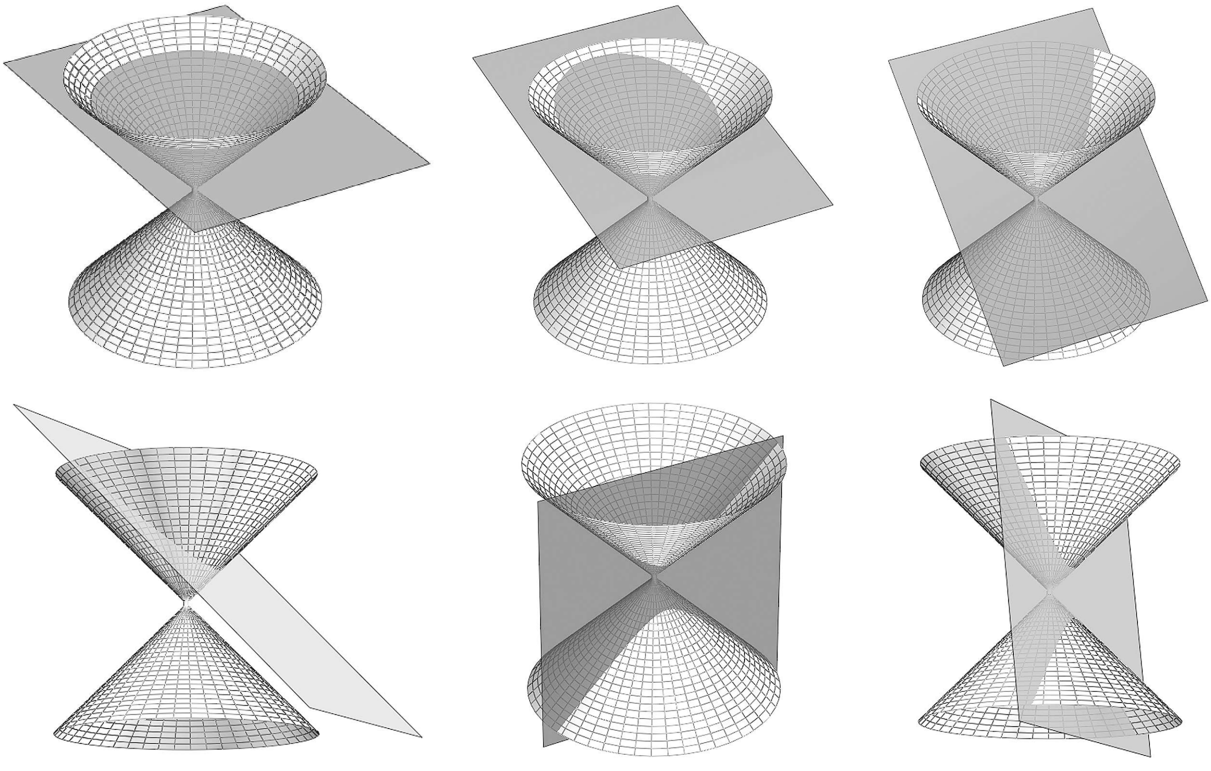

Рис. 4◇6. Аффинные коники.

4.4. Проективные подпространства. Проективное алгебраическое многообразие, задаваемое системой *линейных* однородных уравнений называется *проективным подпространством*. Любое такое подмногообразие имеет вид $L = \mathbb{P}(W)$ для подходящего векторного пространства $W \subset V$, и при этом $\dim(L) = \dim(W) - 1$. В частности, любые два проективных подпространства $L_1 = \mathbb{P}(W_1)$ и $L_2 = \mathbb{P}(W_2)$, размерности которых удовлетворяют неравенству $\dim L_1 + \dim L_2 \geqslant n$, имеют в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ непустое пересечение $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, поскольку размерность пересечения подлежащих им векторных подпространств строго положительна:

$$\dim(W_1 \cap W_2) \geqslant \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(V) = \dim(L_1) + 1 + \dim(L_2) + 1 - (n+1) \geqslant 1\,.$$

Например, любые две проективные прямые в $\mathbb{P}_2$ имеют непустое пересечение[2].

Два проективных подпространства L_1 и L_2 в $\mathbb{P}_n$ называются *дополнительными* друг к другу, если $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ и $\dim L_1 + \dim L_2 = n - 1$. Например, любые две скрещивающиеся прямые в 3-мерном пространстве дополнительны.

[1] т. е. «остриё» или «точку возврата»

[2] в терминах $\mathbb{A}^3$ это значит, что любые две плоскости, содержащие начало координат, пересекаются по прямой

Упражнение 4.5. Покажите, что $\mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}(W)$ являются дополнительными в $\mathbb{P}(V)$, если и только если $V = U \oplus W$.

4.4.1. ЛЕММА. *Если подпространства $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}(V)$ дополнительны, то любая точка $p \in \mathbb{P}(V) \setminus (L_1 \cup L_2)$ лежит на единственной прямой, пересекающей каждое из них.*

Доказательство. Поскольку $V = U_1 \oplus U_2$, где $\mathbb{P}(U_i) = L_i$, любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение $v = u_1 + u_2$ с $u_i \in U_i$. Если $v \notin U_1 \cup U_2$, то и u_1 и u_2 ненулевые и порождают единственное 2-мерное подпространство, содержащее v и имеющее ненулевое пересечение с обеими U_i. □

4.4.2. Проектирование. Для любой пары дополнительных подпространств $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n$ *проекция на L_2 с центром в L_1*: $\pi_{L_2}^{L_1} : (\mathbb{P}_n \setminus L_1) \longrightarrow L_2$ переводит все точки $q \in L_2$ в себя, а каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \setminus (L_1 \sqcup L_2)$ — в точку пересечения $\ell \cap L_2$, где ℓ — это единственная прямая, проходящая через p и пересекающая L_1 и L_2, как в n° 4.4.1. В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ таких, что L_1 имеет координаты $(x_0 : x_1 : \ldots : x_m)$ и L_2 имеет координаты $(x_{m+1} : x_{m+2} : \ldots : x_n)$, проекция $\pi_{L_2}^{L_1}$ просто удаляет первые $(m+1)$ координат x_ν с $0 \leqslant \nu \leqslant m$.

4.4.3. Пример: проектирование коники на прямую. Рассмотрим проекцию $\pi_L^p : Q \longrightarrow L$ коники Q, заданной уравнением $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2$, на прямую ℓ, заданную уравнением $x_1 = 0$, из точки $p = (1:1:0) \in Q$. В стандартной аффинной карте U_0, где $x_0 = 1$, эта проекция выглядит как на рис. 4◇7. Она взаимно однозначна, поскольку $\forall t \in \ell$ прямая (pt) пересекает Q ещё ровно в одной отличной от p точке $q = q(t)$, а касательная прямая, пересекающая ℓ в бесконечно удалённой точке $(0:0:1)$, ставит в соответствие этой точке саму точку $p \in Q$. Более того, отношения $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in Q$ и $t = (\alpha : 0 : \beta) \in \ell$ являются *рациональными* алгебраическими функциями друг друга[1]:

$$\begin{aligned} (\alpha : \beta) &= (q_0 - q_1 : q_2)\,, \\ (q_0 : q_1 : q_2) &= (\,(\beta^2 + \alpha^2) : (\beta^2 - \alpha^2) : 2\alpha\beta\,)\,. \end{aligned} \tag{4-6}$$

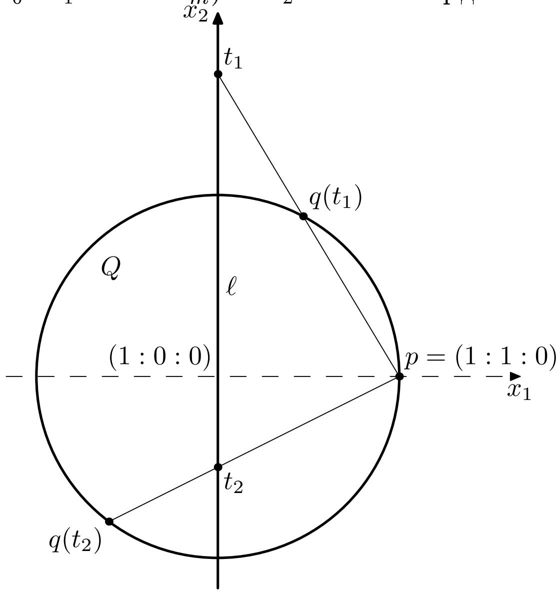

Рис. 4◇7. Проектирование коники.

Таким образом, проектирование коники Q из лежащей на ней точки $p \in Q$ на не проходящую через эту точку прямую $\ell \not\ni p$ устанавливает *бирациональную биекцию* между ℓ и Q и задаёт рациональную параметризацию коники однородными многочленами степени 2.

Упражнение 4.6. Проверьте формулы (4-6) и обратите внимание, что вторая из них дает полный список пифагоровых троек[2] $(q_0 : q_1 : q_2)$, когда $(\alpha : \beta)$ пробегает $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

4.5. Линейные проективные преобразования. Любой линейный изоморфизм векторных пространств $F : U \xrightarrow{\sim} W$ порождает биекцию $\overline{F} : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$, которая называется *проективным линейным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

Упражнение 4.7. Рассмотрим на $\mathbb{P}_2$ две прямые ℓ_1, ℓ_2 и точку $p \notin \ell_1 \cup \ell_2$. Докажите, что центральная проекция $\gamma_p : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ одной прямой на другую из точки p является проективным изоморфизмом.

4.5.1. ЛЕММА. *Пусть $\dim U = \dim W = (n+1)$. Для любых двух наборов $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1} \in \mathbb{P}(U)$ и $q_0, q_1, \ldots, q_{n+1} \in \mathbb{P}(W)$ из $(n+2)$ точек, в каждом из которых никакие $(n+1)$ точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм $F : U \xrightarrow{\sim} W$, такой что $\overline{F}(p_i) = q_i$ при всех i.*

Доказательство. Зафиксируем некоторые векторы u_i и w_i, представляющие точки p_i и q_i. Поскольку никакие $(n+1)$ точек каждого из наборов $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ не лежат в $(n-1)$-мерной проективной гиперплоскости, линейная оболочка любых $n+1$ векторов в каждом из наборов $\{u_i\}$, $\{w_i\}$ имеет размерность

[1] причина того, что q рационально выражается через t заключается в том, что для отыскания пересечения прямой (q,p) с Q требуется решить квадратное уравнение, один из корней которого (а именно, p) известен, так что для отыскания второго корня не требуется извлекать квадратный корень

[2] т. е. целых решений уравнения Пифагора $q_0^2 + q_1^2 = q_2^2$

$(n+1)$. В частности, векторы $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ и $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ годятся в качестве базисов в U и W. Пусть вектор u_{n+1} имеет в базисе $\{u_i\}$ координаты $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, а вектор w_{n+1} в базисе $\{w_i\}$ — координаты $(y_0, y_1, \dots, y_n)$. Отметим, что все числа x_i отличны от нуля — иначе вектор u_{n+1} лежал бы в одной гиперплоскости с n базисными векторами, дополнительными к тому базисному вектору, координата вдоль которого обнулилась. Условие $\overline{F}(p_i) = q_i$ означает, что $F(u_i) = \lambda_i w_i$ для некоторых ненулевых констант $\lambda_i \in \Bbbk$. Раскладывая векторы u_{n+1} и w_{n+1} по базисам, мы видим, что равенство $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$ равносильно равенствам $y_i = \lambda_{n+1}\lambda_i \cdot x_i$ для всех $0 \leqslant i \leqslant n$. Из этих равенств все константы $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, определяющие действие оператора на базис, выражаются через λ_{n+1} и заданные числа x_i, y_i как $\lambda_i = \lambda_{n+1}^{-1} \cdot (y_i/x_i)$. Таким образом, оператор F существует и определяется однозначно с точностью до постоянного множителя λ_{n+1}^{-1}, который может быть выбран любым. □

4.5.2. СЛЕДСТВИЕ. *Два линейных оператора тогда и только тогда задают одинаковые проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны.* □

4.5.3. Линейная проективная группа. Все линейные изоморфизмы $V \longrightarrow V$ образуют так называемую *полную линейную группу* пространства V, которая обозначается $\mathrm{GL}(V)$. Она действует на $\mathbb{P}(V)$, и ядро этого действия согласно n° 4.5.1 совпадает с подгруппой гомотетий $H \subset \mathrm{GL}(V)$, а образ состоит из всех линейных проективных автоморфизмов пространства $\mathbb{P}(V)$. Последние составляют так называемую *проективную линейную группу* пространства V, которая обозначается $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/H$. Фиксировав базис $\{e_0, e_1, \dots, e_n\} \subset V$, можно отождествить $\mathrm{GL}(V)$ с группой невырожденных квадратных матриц $\mathrm{GL}_{n+1}(\Bbbk) \subset \mathrm{Mat}_{n+1}(\Bbbk)$. При этом отождествлении подгруппа гомотетий переходит в подгруппу скалярных матриц $\{\lambda E\}$, и $\mathrm{PGL}(V)$ отождествляется с группой невырожденных квадратных матриц с точностью до пропорциональности

$$\mathrm{PGL}_{n+1}(\Bbbk) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{GL}_{n+1}(\Bbbk)/\{\text{скалярные диагональные матрицы } \lambda E\}\,.$$

4.5.4. Пример: дробно-линейные преобразования прямой. Группа $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$ состоит из классов пропорциональности матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc \neq 0$. Каждая такая матрица действует на $\mathbb{P}_1$ проективным изоморфизмом $\overline{A} : (x_0 : x_1) \longmapsto (\,(ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1)\,)$, который в стандартной аффинной карте $U_0 \simeq \mathbb{A}^1$ с локальной координатой $t = x_1/x_0$ может быть переписан как дробно рациональное преобразование

$$t \longmapsto \frac{dt + c}{bt + a} \tag{4-7}$$

Упражнение 4.8. Для произвольных трёх различных точек p, q, r явно напишите то единственное дробно-линейное преобразование (4-7), для которого $\overline{A}(p) = 1$, $\overline{A}(q) = 0$, и $\overline{A}(r) = \infty$.

Образ точки s при дробно линейном преобразовании из упр. 4.8 называется *двойным отношением* точек p, q, r, s и обозначается

$$[p, q, r, s] = \frac{s - q}{s - r} \cdot \frac{p - r}{p - q}$$

Упражнение 4.9. Покажите, что две четвёрки точек на $\mathbb{P}_1$ тогда и только тогда переводятся одна в другую некоторым дробно линейным преобразованием, когда их двойные отношения равны.