Элементы комбинаторики.

A1◇1. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить переставляя буквы в словах **а)** шнурок; **б)** курок; **в)** колобок; **г)** $\underbrace{\text{аа...а}}_{a}\underbrace{\text{бб...б}}_{b}$;

д) $\underbrace{\text{б}_1\text{б}_1\ldots\text{б}_1}_{k_1}\underbrace{\text{б}_2\text{б}_2\ldots\text{б}_2}_{k_2}\cdots\cdots\underbrace{\text{б}_m\text{б}_m\ldots\text{б}_m}_{k_m}$;.

A1◇2. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в выражениях
а) $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^2$; **б)** $(a+b+c)^3$; **в)** $(a+b)^n$; **г)** $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n$.

A1◇3. Сколько имеется различных одночленов степени **а)** d **б)** $\leqslant d$ от n переменных?

Мультиномиальные коэффициенты. Пусть $n=n_1+n_2+\cdots+n_\nu$ (все n_i — целые неотрицательные). Числа

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_\nu}\overset{\text{def}}{=}\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\cdots\cdot n_\nu!}$$

называются *мультиномиальными коэффициентами*. При $\nu=2$ обозначение для *биномиального коэффициента*[1] $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ обычно сокращают до $\binom{n}{k}$ или C_n^k. По определению, $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ при всех $n\geqslant 0$.

A1◇4. Цело ли число $1000!/(100!^{10})$?

A1◇5. Верно ли, что для простого p коэффициент $\binom{p}{k}$ либо равен 1 либо делится на p?

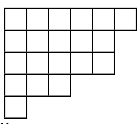
A1◇6. Вычислите суммы: **а)** $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$; **б)** $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$;
в) $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{k+n}{k}$; **г)** $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}$; **д)** $\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+\cdots+(n+1)\binom{n}{n}$
е) $\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots$; **ж)** $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$.

A1◇7. Имеются 4 попарно отличающихся друг от друга чашки, 4 совершенно одинаковых стакана, 10 совершенно одинаковых кусков сахара и 7 попарно разноцветных соломинок. Сколькими способами можно разложить: **а)** соломинки по чашкам **б)** сахар по чашкам
в) сахар по стаканам **г)** соломинки по стаканам

A1◇8. Как изменятся ответы в предыдущей задаче, если потребовать, чтобы после раскладывания пустых ёмкостей не оставалось?

A1◇9. Фиксируем натуральные m и n. Сколько решений имеет уравнение $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$
а) в натуральных числах? **б)** в целых неотрицательных числах?

A1◇10. Сколько разных отображений имеется из множества $M=\{1,2,\ldots,m\}$ в множество $N=\{1,2,\ldots,n\}$: **а)** произвольных **б)** взаимно однозначных **в)** строго возрастающих
г) инъективных **д)** неубывающих **е)** сюрьективных неубывающих **ж)** сюрьективных

A1◇11. Фигурка типа  (выровненные по левому краю горизонтальные клетчатые полосы невозрастающей сверху вниз длины) называется *диаграммой Юнга*. Общее число клеток в диаграмме называется её *весом*. Сколько существует диаграмм Юнга
а) веса 6; **б)** веса 7, состоящих из не более, чем 3 строк;
в) без ограничений на вес, но из не более, чем p строк, и не более, чем q столбцов.

A1◇12. Сколько бус можно сделать из 5 красных, 7 синих и 11 белых одинаковых бусин?

A1◇13. Правильный проволочный плоский n-угольник раскрашивают n цветами (каждую сторону в свой цвет). Сколько различных игрушек получится?

A1◇14. Грани **а)** кубика **б)** тетраэдра раскрашивают в 6 фиксированных разных цветов (разные грани — в разные цвета). Сколько разных игрушек получится?

A1◇15. Сколько разных безделушек получится, если в предыдущей задаче склеивать крашеные **а)** кубики **б)** тетраэдры в пары, приклеивая грань одного к грани другого?

[1]в некоторых кругах его также называют *числом сочетаний из n по k*