РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТНОГО ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ НА ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

ЗАДАЧА 1. Найдите кратчайшее расстояние от точки на окружности единичного радиуса с центром в начале координат до точки на графике квадратного трёхчлена, пересекающем ось ординат при $y = -2$, а ось абсцисс — при $x = \pm 2$.

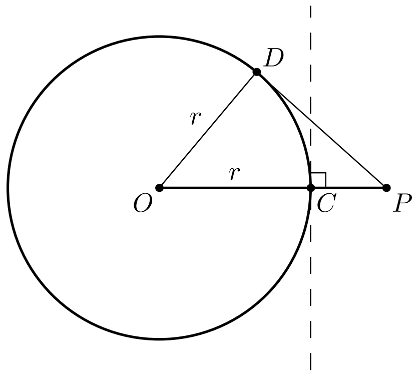


Рис. 1. $PC < PD$, при $D \notin OP$.

ОТВЕТ: $\sqrt{3} - 1$.

РЕШЕНИЕ. Квадратный трёхчлен с корнями ± 2 имеет вид $y = a(x+2)(x-2) = a(x^2-4)$. Поскольку $y(0) = -2$, парабола из условия задачи задаётся уравнением $y = (x^2-4)/2$.

Обозначим начало координат через O. Для произвольной точки P, лежащей вне единичного круга с центром в O, ближайшей к P точкой единичной окружности является точка C, в которой единичная окружность пересекается с прямой OP (см. рис. 1), причём[1] $|PC| = |OP| - 1$. Таким образом, задача сводится к отысканию минимального расстояния от начала координат O до точки P на параболе. Это можно сделать тремя стандартными способами.

Аналитический способ.

Обозначим через x абсциссу точки P. Тогда P имеет координаты $(x, (x^2-4)/2)$. Минимум $|OP|$ достигается в той же точке P, что и минимум $|OP|^2 = x^2 + (x^2-4)^2/4$. Функция $f(x) = x^2 + (x^2-4)^2/4$ всюду дифференцируемая и чётная. Производная

$$f'(x) = 2x + (x^2-4)\cdot x = x(x^2-2) = \left(x+\sqrt{2}\right)\cdot x\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)$$

обращается в нуль при $x = -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$, меняя знак с $-$ на $+$ в двух крайних точках и с $+$ на $-$ — в средней. Следовательно, f монотонно убывает на интервале $(-\infty, -\sqrt{2})$, достигая при $x = -\sqrt{2}$ своего минимального значения $f(\pm\sqrt{2}) = 3$, потом монотонно возрастает на интервале $(-\sqrt{2}, 0)$, достигая в нуле локального максимума, и далее, при $x \geqslant 0$ картина зеркально повторяется (см. рис. 2). Таким образом, минимальное расстояние от параболы до начала координат равно $\sqrt{3}$, а до единичной окружности с центром в начале координат — $\sqrt{3} - 1$.

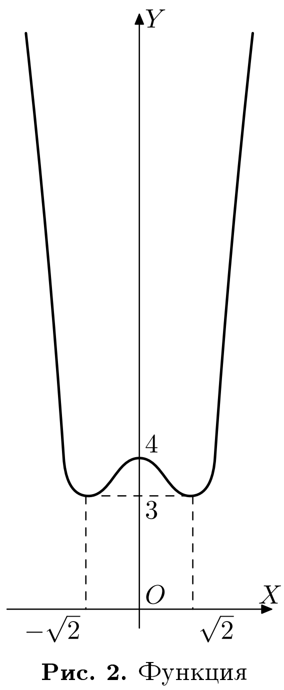


Рис. 2. Функция $f(x) = x^2 + (x^2-4)^2/4$.

Алгебраический способ.

Искомое минимальное расстояние $|OP|$ равно наименьшему положительному значению параметра r, для которого имеет решение система

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ y = \dfrac{x^2-4}{2} \end{cases},$$

задающая точки пересечения параболы с окружностью радиуса r с центром в O (см. рис. 3). Подставляя в первое уравнение выражение y через x, доставляемое вторым уравнением, получаем биквадратное уравнение $x^4 - 4\,x^2 + 4\,(4 - r^2) = 0$. Оно имеет

[1]здесь и далее мы обозначаем через $|AB|$ расстояние между точками A и B

решение тогда и только тогда, когда имеется неотрицательное решение у квадратного уравнения $t^2 - 4\,t + 4\,(4 - r^2) = 0$ (получающегося заменой x^2 на t). Четверть дискриминанта этого уравнения равна $4 - 4\,(4 - r^2) = 4\,(r^2 - 3)$ и неотрицательна при $r \geqslant \sqrt{3}$. Поскольку при всех таких r решение $t = 2 + \sqrt{4\,(r^2 - 3)}$ неотрицательно, искомое минимальное $r = |OP| = \sqrt{3}$, а значит, минимальное расстояние от параболы до единичной окружности равно $\sqrt{3} - 1$.

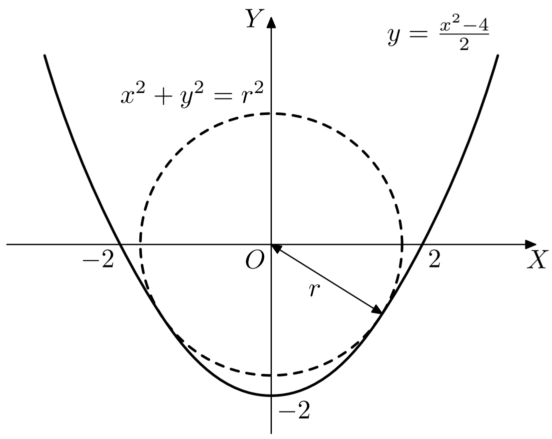


Рис. 3. «Надувающаяся» окружность.

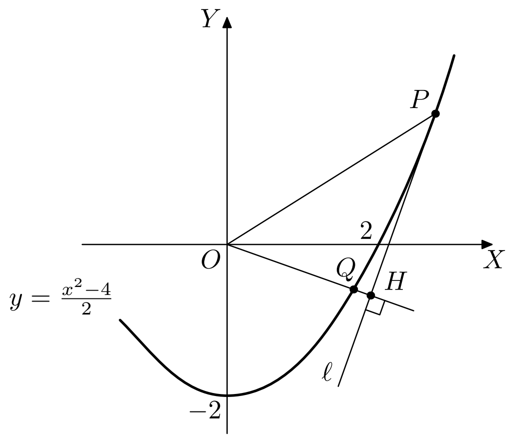


Рис. 4. $|OP| > |OH| > |OQ|$.

Геометрический способ.
Обозначим через ℓ касательную прямую к параболе, проходящую через точку P. Если OP не перпендикулярен ℓ, на параболе имеется точка Q, расположенная ближе к O, чем P (см. рис. 4, где в качестве Q взято пересечение параболы с перпендикуляром OH, опущенным на ℓ из O). Таким образом, минимум $|OP|$ может достигаться только в таких точках P, для которых $OP \perp \ell$. Найдём все такие P. Касательная ℓ к графику $y = (x^2 - 4)/2$ в точке P с координатами $(x, y(x)) = (x,\, (x^2 - 4)/2)$ параллельна вектору с координатами $(1, y'(x)) = (1, 2x)$. Этот вектор перпендикулярен OP тогда и только тогда, когда его скалярное произведение с вектором $\overrightarrow{OP}$ равно нулю, т. е. когда $1 \cdot x + 2x \cdot \frac{x^2-4}{2} = x(x^2 - 4) = 0$. Отсюда $x = 0$ или $x = \pm\sqrt{2}$. В первом случае $|OP| = 2$, в двух оставшихся $|OP| = \sqrt{3} < 2$. Итак, минимум $|OP|$, если существует, то равен $\sqrt{3}$. Доказать его существование можно, например, так: рис. 4 показывает, что для точек P с абсциссами вне $[-2, 2]$ расстояние $|OP|$ заведомо больше 2, а над отрезком $[-2, 2]$ функция $|OP|$, будучи непрерывной функцией от x, должна достигать своего минимума.

ЗАДАЧА 2. Найдите наименьшее $n \geqslant 2008$, для которого имеет решение следующая система из n уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 1 = x_1 x_2 \\ x_2 - 1 = x_2 x_3 \\ x_3 - 1 = x_3 x_4 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n - 1 = x_n x_1 \ . \end{cases}$$

ОТВЕТ: $n = 2010$ (наименьшее $n \geqslant 2008$, кратное трём).

РЕШЕНИЕ. Заметим, что если решение $(x_1, \ldots , x_n)$ существует, то все числа x_i отличны от нуля и от единицы, что мы и будем далее предполагать. Есть два подхода к решению этой задачи.

Первый способ: исключение переменных путём комбинирования уравнений.
Перепишем первое уравнение в виде $-1 = x_1(x_2 - 1)$ и подставим в него выражение для $x_2 - 1$, доставляемое вторым уравнением. Получим соотношение

$$x_1 x_2 x_3 = -1 \,. \tag{1}$$

Аналогично из второго и третьего уравнения следует соотношение

$$x_2 x_3 x_4 = -1 \,, \tag{2}$$

и вообще, для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ мы выведем из k-того и $(k+1)$-го уравнений, что

$$x_k x_{k+1} x_{k+2} = -1 \,, \tag{3}$$

где при $k = n - 1$ надо положить $k + 1 = n$, $k + 2 = 1$, а при $k = n$ взять $k + 1 = 1$, $k + 2 = 2$. Сравнивая уравнения (1) и (2), мы видим, что $x_1 = x_4$. Аналогично, для каждых двух последовательных значений k из уравнений (3) вытекает равенство $x_k = x_{k+3}$, которое при $k = (n-2), (n-1), n$ выглядит, соответственно, как $x_{n-2} = x_1$, $x_{n-1} = x_2$ и $x_n = x_3$.

Таким образом, если n не делится на 3, то все неизвестные равны между собой, и система сводится к одному уравнению $x_1 - 1 = x_1^2$, которое не имеет корней. Если же n делится на 3, то каждое неизвестное x_k будет равно x_1, x_2 или x_3, в зависимости от остатка, который имеет k от деления на 3 (x_1 и x_2 получатся, когда этот остаток равен 1 и 2 соответственно), а исходная система сведётся к системе

$$\begin{cases} x_1 - 1 = x_1 x_2 \\ x_2 - 1 = x_2 x_3 \\ x_3 - 1 = x_3 x_1 \,, \end{cases}$$

решение которой легко подобрать: например, беря $x_1 = 2$, из первого уравнения находим $x_2 = 1/2$, из (1) получаем $x_3 = -1$ и, подставляя в систему, убеждаемся, что это решение. Итак, система решается в точности при n кратных трём.

Второй способ: рекурсия.
Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x_2 = 1 - \dfrac{1}{x_1} \\ x_3 = 1 - \dfrac{1}{x_2} \\ \quad \cdots\cdots \\ x_n = 1 - \dfrac{1}{x_{n-1}} \\ x_1 = 1 - \dfrac{1}{x_n} \,, \end{cases}$$

и положим $f(x) = 1 - \frac{1}{x} = (x-1)/x$. Тогда система равносильна условиям

$$\begin{cases} x_i = f(x_{i-1}) = f(f(x_{i-2})) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{i-1 \text{ раз применить } f}(x_1)\ldots)) \text{ для каждого } i = 2, 3, \ldots, n \\ x_1 = f(x_n) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ раз применить } f}(x_1)\ldots)) \,. \end{cases} \tag{4}$$

Заметим теперь, что

$$f(f(x)) = 1 - \frac{1}{1 - 1/x} = 1 - \frac{x}{x-1} = -\frac{1}{x-1} ,$$
$$f(f(f(x))) = 1 - \frac{1}{f(f(x))} = 1 + (x-1) = x .$$

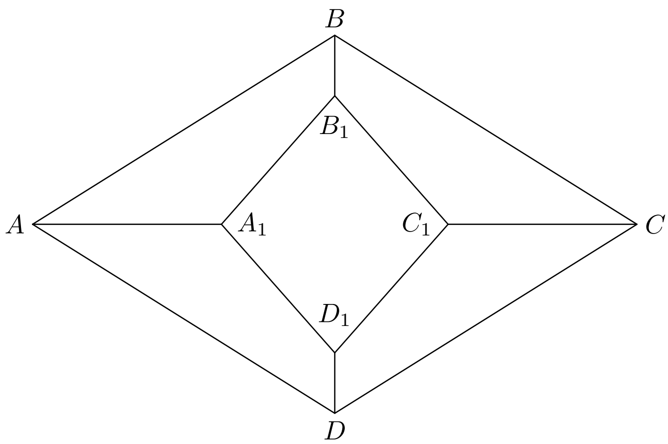
Поэтому

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{n \text{ раз применить } f}(x)\dots)) = \begin{cases} x & , \text{ если } n = 3k , \\ f(x) = (x-1)/x & , \text{ если } n = 3k+1 , \\ f(f(x)) = 1/(1-x) & , \text{ если } n = 3k+2 . \end{cases} \qquad (5)$$

Тем самым, при $n = 3k+1$ и $n = 3k+2$ последнее условие в (4) принимает вид $(x_1 - 1)/x_1 = x_1$ или $1/(1-x_1) = x_1$, и при $x_1 \neq 0, 1$ оба они равносильны уравнению $x_1^2 - x_1 + 1 = 0$, у которого нет действительных корней. Значит, исходная система в этом случае не имеет решений. При $n = 3k$ последнее уравнение в (4) тривиально ($x_1 = x_1$), и любое $x_1 \neq 0, 1$ достраивается по формулам (4)–(5) до решения исходной системы, в котором

$$x_i = \begin{cases} x_1 & , \text{ если } i = 3k+1 , \\ (x_1 - 1)/x_1 & , \text{ если } i = 3k+2 , \\ 1/(1-x_1) & , \text{ если } i = 3k . \end{cases}$$

ЗАДАЧА 3. Существует ли многогранник, который можно параллельно спроектировать на плоскость так, чтобы проекции вершин и рёбер образовали представленную на рисунке фигуру?



На чертеже изображены все вершины и все рёбра, никаких наложений не происходит, $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — ромбы с общим центром, A_1 и C_1 лежат на прямой AC, B_1 и D_1 лежат на прямой BD, $AC > BD$, $A_1C_1 < B_1D_1$. Приведите пример такого многогранника и такой проекции или докажите, что их не существует.

ОТВЕТ: Нет, такого многогранника не существует.

РЕШЕНИЕ. Допустим, что такой многогранник существует и обозначим штрихованными буквами A', A_1', B', B_1', … его вершины, проектирующиеся в одноимённые вершины A, A_1, B,

$B_1, \ldots$ на чертеже из условия задачи. Поскольку прямые AB и A_1B_1 на чертеже не параллельны, проектирующиеся в них пространственные прямые $A'B'$ и $A_1'B_1'$ также не параллельны, ибо при параллельной проекции параллельные прямые не могут переходить в пересекающиеся. Так как прямые $A'B'$ и $A_1'B_1'$ лежат в одной плоскости (а именно, в плоскости грани $A'B'B_1'A_1'$), они пересекаются в некоторой точке X', которая спроектируется в точку $X = AB \cap A_1B_1$ пересечения прямых AB и A_1B_1 (см. рис. 5). По той же причине в пространстве есть ещё три точки пересечения $Y' = B'C' \cap B_1'C_1'$, $Z' = C'D' \cap C_1'D_1'$, $T' = D'A' \cap D_1'A_1'$, проектирующиеся в точки $Y = BC \cap B_1C_1$, $Z = CD \cap C_1D_1$, $T = DA \cap D_1A_1$ на нашем чертеже:

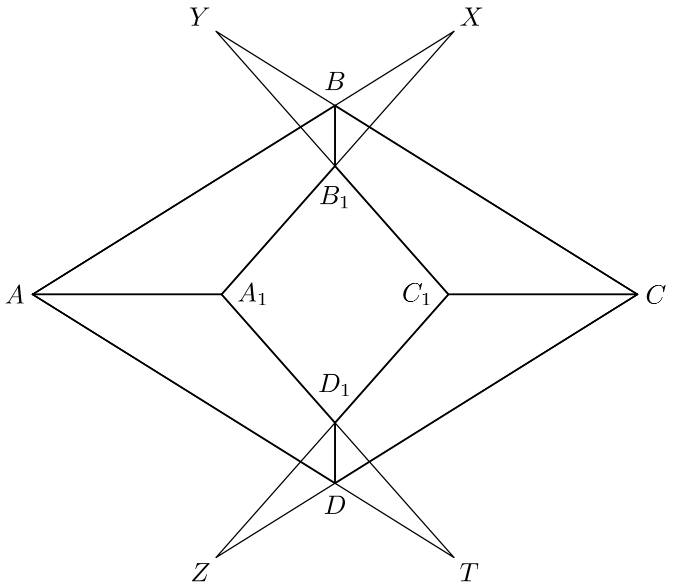


Рис. 5. Решение задачи 3.

Точки X, Y, Z, T получаются из любой одной из них отражениями относительно осей AC и BD, а значит, образуют прямоугольник. В частности, они не лежат на одной прямой. С другой стороны, точки X', Y', Z', T' лежат в пересечении плоскостей граней $A'B'C'D'$ и $A_1'B_1'C_1'D_1'$. Поэтому эти плоскости не параллельны, а значит, пересекаются по некоторой прямой, которая должна спроектироваться в прямую, проходящую через точки X, Y, Z, T. Противоречие.

ЗАДАЧА 4. Известно, что 26-значное число 21 982 145 917 308 330 487 013 369 является 13-ой степенью некоторого натурального числа m. Найдите это m.

ОТВЕТ: $m = 89$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим 26-значное число из условия задачи через $N = m^{13}$. Заметим, что $m < 100$, т.к. 100^{13} является 27-значным числом. Поскольку

$$80^{13} = 8^{13} \cdot 10^{13} = \left(2^{13}\right)^3 \cdot 10^{13} = 8192^3 \cdot 10^{13} < \left(10^4\right)^3 \cdot 10^{13} = 10^{25} , \tag{6}$$

число 80^{13} не более, чем 25-значно, а значит, $m > 80$.

Найдем последнюю цифру числа m. Так как N нечетно, m также нечетно, так что последняя цифра у m нечетна. Она не равна ни 1, ни 5, т.к. любая степень числа, кончающегося на 1 или на 5, кончается, соответственно, также на 1 или 5. Если m оканчивается на 3 или на 7, то m^2 оканчивается на 9, а $m^4 = (m^2)^2$ — на 1. Поэтому $m^{12} = (m^4)^3$ оканчивается на 1, а $N = m^{12} \cdot m$ — на ту же цифру (3 или 7), что и m; но это не так.

Таким образом, m оканчивается на 9 и может равняться только 89 или 99. Если $m = 99$, то $N = 99^{13}$ должно делится на 9, что неверно, т. к. сумма цифр числа N не делится на 9. Остается единственная возможность: $m = 89$.

Отметим, что кроме использованных нами соображений, можно было бы применить и множество других, столь же простых: например, вместо оценки (6) можно было бы вычислить остаток от деления числа N на 9 и/или[2] на 11, и т. д. и т. п.

ЗАДАЧА 5. Последовательные стороны выпуклого четырехугольника (при обходе по часовой стрелке) равны 7, 4, 2 и 3. Может ли его площадь быть равна 13? Приведите пример такого четырехугольника или докажите, что его не существует.

ОТВЕТ: Нет такого четырехугольника не существует.

РЕШЕНИЕ. Допустим, что четырёхугольник $ABCD$ с $AB = 7$, $BC = 4$, $CD = 2$, $DA = 3$ и площадью 13 существует. Симметрично отразив треугольник CDA относительно срединного перпендикуляра к диагонали AC, мы получим новый четырёхугольник $EBFD$ той же площади со сторонами $EB = AB = 7$, $BF = BC = 4$, $FD = AD = 3$, $DE = DC = 2$ (см. рис. 6).

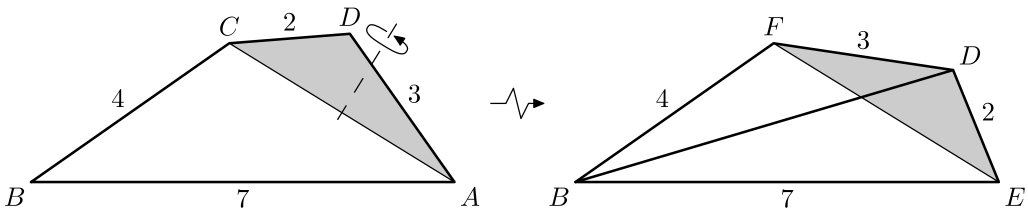


Рис. 6. Переворачивание треугольника CDA.

Если четырёхугольник $EBFD$ выпуклый (как на рис. 6), его площадь равна сумме площадей треугольников DEB и DFB, причём

$$S_{DEB} = \frac{1}{2}\,|DE| \cdot |EB| \cdot \sin\angle DEB \leqslant \frac{|DE| \cdot |EB|}{2} = 7\,,$$
$$S_{DFB} = \frac{1}{2}\,|DF| \cdot |FB| \cdot \sin\angle DFB \leqslant \frac{|DF| \cdot |FB|}{2} = 6\,,$$

и равенства равносильны тому, что треугольники — прямоугольные. Поскольку в нашем случае должны выполняться равенства, диагональ BD является общей гипотенузой прямоугольных треугольников DEB и DFB, что противоречит теореме Пифагора: из первого треугольника $|BD|^2 = 53$, тогда как из второго $|BD|^2 = 25$. Невыпуклым четырёхугольник $EBFD$ также быть не может, поскольку в этом случае он бы целиком лежал внутри какого-нибудь одного из треугольников DEB, DFB, и его площадь подавно была бы меньше 13.

Отметим, что требование выпуклости исходного четырёхугольника $ABCD$ излишне и не влияет на ответ: предыдущее рассуждение годится и для невыпуклого четырёхугольника. Составители варианта наложили это условие для избежания казуистических разбирательств в решениях, основанных на той или иной оценке площади «в лоб». Поскольку эти решения довольно громоздки, мы не будем их здесь приводить.

[2]напомним, что остаток от деления числа на 9 такой же, как у суммы цифр этого числа, а остаток от деления на 11 — такой же, как у разности между суммой цифр, стоящих в нечётных разрядах (единицы, сотни, …), и суммой цифр, стоящих в чётных разрядах (десятки, тысячи, …); заметим, что числа имеющие заданные остатки от деления на 9 и на 11, «идут» по числовой прямой с шагом 99