РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТНОГО ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ НА ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ

ЗАДАЧА 1. Сколькими способами можно в клетках квадрата 3×3 расставить числа от 1 до 9 (каждое занимает одну клетку и встречается один раз) так, чтобы сумма чисел на каждой из двух диагоналей равнялась 8?

ОТВЕТ: 192.

РЕШЕНИЕ. Наибольшее из чисел, стоящих в углах квадрата, не меньше 4. В противоположном углу стоит число, не меньшее 1. Следовательно, в центре – число, не большее 3. Но тогда максимальное число в углу – по крайней мере 5, и мы получаем, что в центре 1 или 2. Если в центре 2, то обе суммы чисел в противоположных углах должны равняться 6, но из оставшихся чисел такую сумму дают только 1 и 5. Следовательно, в центре квадрата стоит 1, а суммы чисел в противоположных углах равны 7, то есть по одной диагонали в углах стоят 2 и 5, а по другой – 3 и 4. Таким образом, в левый верхний угол мы можем поставить одно из четырех чисел, после этого в правый верхний – одно из двух, остальные углы заполняются однозначно. Оставшиеся четыре числа произвольно расставляем в оставшихся четырех клетках. Число способов равно $4\times 2\times 4! = 8\times 24 = 192$.

ЗАДАЧА 2. Для каждой точки с координатами (p,q) рассмотрим квадратный трехчлен x^2+px+q. Покрасим точку зеленым цветом, если соответствующий квадратный трехчлен имеет два корня, один из которых принадлежит отрезку $[-2,-1]$, а другой — отрезку $[1,2]$. Изобразите на плоскости множество зеленых точек и найдите его площадь.

ОТВЕТ: четырехугольник с вершинами $(-1,-2)$, $(0,-1)$, $(1,-2)$ и $(0,-4)$; площадь равна 3.

РЕШЕНИЕ. Множество зеленых точек — это образ квадрата $1\leqslant t_1\leqslant 2$, $-2\leqslant t_2\leqslant -1$ при отображении $(t_1,t_2)\longmapsto (p,q)=(-(t_1+t_2),t_1t_2)$; поскольку t_1+t_2 меняется в пределах $[-1,1]$ и при фиксированной сумме $t_1+t_2=-p$ произведение $q=t_1t_2$ пробегает множество значений функции $f(s)=-s(s+p)$ (при $s\in[1\,,\,2-p]$ для $p\geqslant 0$ и при $s\in[1-p\,,\,2]$ для $p\leqslant 0$), мы получаем четырехугольник с вершинами $(0,-4)$, $(-2,-2)$, $(0,-1)$ и $(1,-2)$. Его площадь, очевидно, равна 3.

ЗАДАЧА 3. В треугольнике ABC расстояние от вершины C до точки пересечения высот равно радиусу описанной окружности. Какой может быть величина угла C?

ОТВЕТ: $C=\pi/3$, $2\pi/3$.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим случай остроугольного треугольника ABC. Пусть B' — основание высоты, опущенной на сторону AC, а A' — на сторону CB. При этом сами высоты пересекаются в точке O. Прямоугольные треугольники $BB'C$ и $AA'C$ подобны, поэтому $A'C/AC=B'C/BC$. Следовательно, треугольник $A'B'C$ подобен исходному треугольнику с коэффициентом подобия $A'C/AC$. С другой стороны, диаметр окружности, описанной вокруг треугольника $A'B'C$, равен $OC=R$. Следовательно, коэффициент подобия равен $1/2$, и рассматривая прямоугольный треугольник $AA'C$ получаем, что угол $C=\pi/3$. Случай тупоугольного треугольника рассматривается аналогично.

Набросок другого решения.
Зафиксируем отрезок AB и окружность γ, описанную около треугольника ABC. Когда точка C пробегает эту окружность, точка пересечения высот треугольника ABC пробегает окружность γ', симметричную γ относительно прямой AB (это легко доказать, рассматривая вписанные углы), причем точка пересечения высот получается из C сдвигом на вектор, соединяющий центры окружностей γ и γ'. Поэтому длина этого вектора равна радиусу γ, то есть угол C равен $\pi/3$ или $2\pi/3$.

ЗАДАЧА 4. Пусть S_1 – сфера радиуса 7, а S_2 – сфера радиуса 1, расположенные в пространстве так, что расстояние между их центрами равно 10. Прямая l касается первой сферы в точке K_1, а второй – в точке K_2.

Какую максимальную и какую минимальную длину может иметь отрезок K_1K_2?

ОТВЕТ: минимальная длина общей касательной равна 6, а максимальная - 8.

РЕШЕНИЕ. *Первый способ: степень точки.*
Пусть плоскость, касающаяся первой сферы в точке K_1 пересекает вторую сферу по окружности C; тогда $|K_1K_2|^2$ (степень точки K_1 относительно C) равна $|K_1P| \cdot |K_1Q|$, где P, Q суть точки пересечения с окружностью C плоскости π, проходящей через K_1 и центры сфер; таким образом, $|K_1K_2|^2$ есть степень точки K_1 относительно большой окружности, высекаемой плоскостью π на второй сфере, т. е. $|K_1K_2|^2 = |K_1O_2|^2 - 4$, где O_2 — центр второй сферы; итак, минимальное и максимальное значение $|K_1K_2|^2$ равны (по теореме косинусов) $10^2 - (7+1)^2 = 36$ и $10^2 - (7-1)^2 = 64$.

Второй способ: векторы.
Рассмотрим векторы $a = O_1K_1$, $b = K_1K_2$, $c = K_2O_2$, $d = O_1O_2$. Ясно, что $a + b + c = d$. Следовательно, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a, c)$. Но (a, c) принимает максимальное значение, равное 7, когда векторы a и c коллинеарны и сонаправлены, а минимальное значение, равное -7, когда они коллинеарны, но смотрят в разные стороны. Следовательно, минимальное значение b^2 равно $10^2 - (7+1)^2 = 36$, а максимальное – равно $10^2 - (7-1)^2 = 64$.

ЗАДАЧА 5. Найдите все целочисленные решения системы уравнений

$$\begin{cases} a^4 - b^4 - c^4 = a^2b^2c^2 \\ \qquad\qquad a^3 = b^2 + c^2. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $a = 0, b = 0, c = 0$; $a = 1, b = 0, c = \pm 1$; $a = 1, b = \pm 1, c = 0$.

РЕШЕНИЕ. Предположим,что $cb \neq 0$. Тогда из второго равенства следует, что $a > 1$. Одновременно, из первого равенства следует, что $a^2 > b^2$, $a^2 > c^2$. Противоречие, так как $a^3 = aa^2 \geqslant 2a^2 > c^2 + b^2$. В силу симметрии можно считать, что $b = 0$. Тогда $a = 1$, $c = \pm 1$ или $a = 0$, $c = 0$.