

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ГУ-ВШЭ
ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ПИСЬМЕННОГО ВСТУПИТЕЛЬНОГО
ЭКЗАМЕНА В МАГИСТРАТУРУ

(продолжительность экзамена 5 часов)

1. Существует ли гладкая функция $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y?$$

2. Найдите все конечные группы с тремя классами сопряженности.

3. В самолете 100 мест. Первой в салон заходит сумасшедшая старушка, и занимает произвольное место (возможно, что и свое) случайным образом с равными вероятностями. Каждый последующий пассажир действует следующим образом: если его место свободно, то он садится на свое место, а если оно занято, то он занимает любое из свободных мест случайным образом (с равными вероятностями). Какова вероятность того, что последний пассажир займет свое место?

4. Пусть V_n — векторное пространство

- (1) многочленов степени $\leq n$,
- (2) тригонометрических многочленов степени $\leq n$ (то есть пространство, порожденное функциями $1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx$).

Найдите характеристический многочлен оператора дифференцирования

(a) $\frac{d}{dx} : V_2 \rightarrow V_2,$

(b) $\frac{d}{dx} : V_n \rightarrow V_n.$

5. Обозначим через \mathbb{Q}^2 множество точек на плоскости \mathbb{R}^2 , обе координаты которых рациональны. Является ли подмножество $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ в \mathbb{R}^2 (a) открытым, (b) замкнутым, (c) связным? Объясните ответ.

6. Существует ли такая голоморфная в единичном круге функция f , что $f(0) = 1/2$, $f(1/2) = 7/8$ и $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$?

7. Пусть r_1, r_2, r_3, r_4 — корни некоторого многочлена четвертой степени над рациональными числами. Известно, что $r_1 + r_2$ рационально, и что $r_1 + r_2 \neq r_3 + r_4$. Докажите, что $r_1 r_2$ рационально.