Магистратура факультета математики ГУ-ВШЭ
Требования к поступающим

Поступающие в магистратуру факультета математики должны продемонстрировать знание следующих тем:

(1) элементы комбинаторики (сочетания, перестановки) и теории вероятностей (независимость, условные вероятности).
(2) Теория групп: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечнопорожденных абелевых групп. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные группы, группы симметрий, матричные группы, группы вычетов.
(3) Теория колец: кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.
(4) Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность.
(5) Теория полей: поля, характеристика, структура конечных полей.
(6) Топология: открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}^n$. Компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения, равномерная непрерывность, равномерная сходимость. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Накрытия, гомотопии, триангуляции, фундаментальная группа.
(7) Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов.
(8) Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, теорема о производной сложной функции, ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.
(9) Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега в $\mathbb{R}^n$. Теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.
(10) Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники).
(11) Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, интеграл Коши, теорема о вычетах, лемма Шварца.
(12) Дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности, решение уравнений методом разделения переменных, линейные уравнения первого и второго порядков, однородные уравнения.

Литература:

- Э.Б. Винберг, Курс алгебры, М: Факториал 1999
- А.Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль I, записки лекций `http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-1/m1_total.pdf`
- И.Р. Шафаревич, Основные понятия алгебры, Ижевск: РХД 1999
- И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971
- В.А. Зорич, Математический анализ, М: МЦНМО 2007
- А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976
- В.А. Васильев, Введение в топологию, М: Фазис 1997
- В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров, Геометрия, М: МЦНМО 1997
- Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ, Лань 2004
- В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Ижевск: РХД 2000

Образцы задач вступительного экзамена

1. Предположим, что группу можно представить в виде объединения двух подгрупп. Докажите, что одна из этих подгрупп совпадает со всей группой.

2. Найдите σ^{2010}, где σ — следующая перестановка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Сколько перестановок из n элементов могут быть представлены в виде произведения двух (несовпадающих) транспозиций?

4. Найдите порядок группы $GL_n(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов. Каков максимальный порядок элемента в этой группе?

5. Верно ли, что поле из четырех элементов изоморфно подполю поля из восьми элементов? Обоснуйте ответ.

6. Найдите все обратимые элементы

(1) в кольце многочленов над полем $\mathbb{C}$,

(2) в кольце целых гауссовых чисел, то есть чисел вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, а $i = \sqrt{-1}$.

7. Является ли идеал в (a) $\mathbb{C}[x]$, (b) $\mathbb{C}[[x]]$, (c) $\mathbb{Z}[[x]]$, порожденный элементом x, максимальным? Здесь $R[x]$ обозначает кольцо многочленов с коэффициентами в кольце R, а $R[[x]]$ — кольцо формальных степенных радов над R.

8. Пусть $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, где d — целое число, не являющееся полным квадратом. Докажите, что 2 не является простым элементом в R (т.е. неверно, что если ab делится на 2, то либо a, либо b делится на 2), однако, при $d \leq -3$, этот элемент неприводим в R (т.е. если $2 = ab$, то либо a, либо b обратим).

9. Докажите, что многочлен $x^3+27x^2+5x+97$ неприводим над целыми числами.

10. Конечно ли множество различных подполей в $\mathbb{C}$, изоморфных полю $\mathbb{R}$?

11. Можно ли правильный 14-угольник построить циркулем и линейкой?

12. Найдите кубический многочлен с целыми коэффициентами, корнями которого являются квадраты корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

13. Чему равно произведение попарных разностей корней степени n из 1?

14. Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ, а минимальный μ, где

(1) $\chi(\lambda) = (\lambda^6 - 1)$, $\mu(\lambda) = (\lambda^3 - 1)$;
(2) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$;
(3) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^5(\lambda - 2)^5$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$?

Если да, приведите пример такой матрицы. Если нет, докажите.

15. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.

16. Пусть A и B — подмножества в $\mathbb{R}$. Докажите, что подмножество $A \times B$ в $\mathbb{R}^2$ замкнуто тогда и только тогда, когда оба подмножества A и B замкнуты.

17. Пусть C — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что существует такая последовательность $x_n \in C$, что любую точку множества C можно получить в качестве частичного предела этой последовательности.

18. Отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *собственным*, если прообраз относительно f всякого компактного множества компактен. Докажите, что любой комплексный многочлен f, рассматриваемый как отображение плоскости комплексных чисел в себя, является собственным отображением.

19. Пусть пространство X получается из двумерного тора склеиванием двух точек в одну. Найдите фундаментальную группу пространства X.

20. Пусть A — множество в $\mathbb{R}^3$, являющееся объединением оси z, единичной окружности в плоскости x, y и точки $(3, 3, 0)$. Докажите, что фундаментальная группа множества $\mathbb{R}^3 - A$ содержит подгруппу, изоморфную группе $\mathbb{Z}$.

21. Вычислите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ с точностью до 0,01. Дайте строгое обоснование того, что ответ получен с заданной точностью.

22. Докажите, что

$$\limsup_{n\to\infty} \sin(nx) = 1.$$

для почти всех x по мере Лебега.

23. Докажите, что всякую непрерывно дифференцируемую функцию на числовой прямой можно представить в виде разности двух непрерывных строго возрастающих функций.

24. Существует ли множество $A \subset [0,1]$, являющееся конечным объединением отрезков и такое, что

$$\int_A f(x)dx = \int_{[0,1]-A} f(x)dx$$

для всякой функции f вида $f(x) = ax^2 + bx + c$?

25. Пусть A и B — матрицы $n \times n$. Найдите смешанную производную $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ матрично-значной функции $f(x,y) = \exp(xA + yB)$ при $x = y = 0$. (Производные функций со значениями в матрицах определяются точно так же, как производные числовых функций).

26. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема почти всюду (в смысле меры Лебега), и почти всюду $f'(x) = 1$. Следует ли отсюда, что $f(1) - f(0) = 1$? Если да, докажите. Если нет, приведите контрпример.

27. Существуют ли гладкие функции f_1, f_2, $f_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$, такие, что множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$$

гомеоморфно вещественной проективной плоскости, и при этом в каждой точке множества X дифференциалы функций f_1, f_2, f_3 линейно независимы?

28. Пусть $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно определенная квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Вычислите интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-q(x_1, \ldots, x_n))\, dx_1 \ldots dx_n.$$

29. Рассмотрим функцию f, голоморфную в единичном диске $|z| \leq 1$. Докажите, что

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{|z|=1} f(z) \log(z) dz,$$

где в левой части интегрирование ведется по прямолинейному отрезку $[0,1]$, а в правой — по единичной окружности с направлением обхода против часовой стрелки (делается только один обход, начинающийся в 1). Выбирается ветвь логарифма, действительная на действительной прямой.

30. Известно, что все корни комплексного многочлена имеют положительную мнимую часть. Докажите, что все корни его производной тоже имеют положительную мнимую часть.

31. Пусть $f \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен степени ≥ 2. Докажите, что сумма вычетов 1-формы $dz/f(z)$ по всем комплексным нулям многочлена f равна нулю. Верно ли это утверждение, если f имеет степень 1?

32. Вычислите интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} dx.$$

33. Найдите число невырожденных коник на проективной плоскости, касающихся пяти данных прямых. Предполагается, что никакие три из пяти данных прямых не имеют общей точки.

34. Сколько существует 9-значных чисел, сумма цифр которых нечетна?

35. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11?$$

36. Баскетболист Косоруков собирается выполнить серию из 100 бросков по кольцу. При первом броске он всегда попадает, при втором — всегда промахивается, а при каждом последующем броске вероятность попадания равна проценту попаданий при всех предыдущих бросках из этой серии. Какова вероятность того, что он попадет ровно 50 раз?

37. Можно ли на плоскости расположить окружность и параболу таким образом, чтобы их пересечение состояло ровно из двух точек, причем в одной окружность касалась бы параболы, а в другой — нет?

38. Найдите производную решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} + \theta x = te^{-t}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ по параметру θ при $\theta = 0$.