

Нормирования и p -адические числа.

Задача 1^o.¹ Найдите p -адическое разложение для

a) $\frac{2}{3}$ в \mathbb{Q}_2 ; b) $-\frac{1}{6}$ в \mathbb{Q}_7 ; c) $\frac{1}{10}$ в \mathbb{Q}_{11} ; d) $\frac{1}{120}$ в \mathbb{Q}_5 .

e) Докажите, что p -адическое разложение числа $a \in \mathbb{Q}_p$ периодически начиная с некоторого места тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{Q}$.

Задача 2^o. a) Пусть $c \in \mathbb{Z}, p \nmid c$. Покажите, что в \mathbb{Q}_p последовательность c^{p^n} сходится и для ее предела γ имеет место: $\gamma \equiv c \pmod p$ и $\gamma^{p-1} = 1$. Выведите отсюда, что $t^{p-1} - 1$ целиком раскладывается на линейные множители в \mathbb{Q}_p .

b) Докажите, что при нечетном p корни из единицы, содержащиеся в \mathbb{Q}_p , — в точности корни степени $p - 1$, а корни из единицы, лежащие в \mathbb{Q}_2 , — это ± 1 .

Подсказка: рассмотрите гомоморфизм $\mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \mathbb{F}_p^\times$.

Задача 3. Покажите, что над \mathbb{Q}_p существуют расширения произвольной степени.

Задача 4 (мультипликативная группа поля \mathbb{Q}_p). Положим $U = \mathbb{Z}_p^\times, U_n = 1 + p^n \mathbb{Z}_p$.

a) Покажите, что $U = \varprojlim U/U_n$ и $U_n/U_{n+1} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

b) Докажите, что имеет место разложение $U = V \times U_1$, где $V = \{x \in U \mid x^{p-1} = 1\}$ — подгруппа корней степени $p - 1$ из единицы в \mathbb{Q}_p .

c) Пусть $x \in U_n - U_{n+1}$ и $n \geq 1$, если $p \neq 2$, и $n \geq 2$, если $p = 2$. Покажите, что $x^p \in U_{n+1} - U_{n+2}$.

d) Убедитесь, что при $p \neq 2$ группа U_1/U_n циклическая и выведите отсюда, что $U_1 \cong \mathbb{Z}_p$.

e) Докажите, что $U_1 \cong \{\pm 1\} \times U_2 \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}_2$ при $p = 2$.

f) Получите, что $\mathbb{Q}_p^\times \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ при $p \neq 2$ и $\mathbb{Q}_2^\times \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 5. a) Убедитесь, что поля \mathbb{Q}_p и \mathbb{Q}_q , не изоморфны, если $p \neq q$, а также, что \mathbb{Q}_p не изоморфно \mathbb{R} .

b) Докажите, что поле \mathbb{Q}_p не имеет автоморфизмов, отличных от тождественного.

Подсказка: покажите, что все автоморфизмы автоматические непрерывны.

Задача 6. a^o) Пусть $F(x_1, \dots, x_m) = a_1 x_1^m + \dots + a_m x_m^m \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_m], r = v_p(m), s = \max(v_p(a_1), \dots, v_p(a_m)), N = 2(r + s) + 1$. Докажите, что уравнение $F(x_1, \dots, x_m) = 0$ имеет ненулевое решение в \mathbb{Z}_p тогда и только тогда, когда сравнение $F \equiv 0 \pmod{p^N}$ имеет нетривиальное решение.

b*) Докажите, что уравнение $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ имеет нетривиальное решение в \mathbb{Z}_p при любом p . (Используя разложение на простые в кубических расширениях \mathbb{Q} , мы в дальнейшем убедимся, что это уравнение не имеет нетривиальных рациональных решений).

Подсказка: убедитесь сначала, что сравнение $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 \equiv 0 \pmod p$ имеет решение при всех p .

Задача 7. Для многочлена $F(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_m]$ обозначим через c_n число решений сравнения $F(x_1, \dots, x_m) \equiv 0 \pmod{p^n}$ и рассмотрим ряд Пуанкаре $\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$.

a) Вычислите ряд Пуанкаре для $F(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_m x_m^2$, где $a_k \in \mathbb{Z}_p^\times$. Убедитесь, что $\phi(t)$ — рациональная функция.

b) Найдите ряд Пуанкаре для многочлена $F(x_1, \dots, x_m)$, обладающего свойством: для всякого решения сравнения $F(x_1, \dots, x_m) \equiv 0 \pmod p$ при некотором $i = 1, \dots, m$ имеем $\frac{\partial F}{\partial x_i} \not\equiv 0 \pmod p$.

c) Посчитайте ряд Пуанкаре для многочлена $F(x, y) = x^2 - y^3$.

¹Задачи со значком ^o очень рекомендуется научиться решать.

Имеется теорема Игусы о том, что ряд Пуанкаре всегда рационален. Известны различные ее доказательства, основывающиеся на разрешении особенностей алгебраических многообразий, p -адическом интегрировании, теории моделей.

Задача 8 (ряды в \mathbb{Q}_p). a°) Покажите, что степенной ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, $a_k, x \in \mathbb{Q}_p$ сходится

при $|x|_p < r$ и расходится при $|x|_p > r$, где $\frac{1}{r} = \limsup |a_n|_p^{1/n}$. Что может происходить со сходимостью на границе $|x|_p = r$?

b°) Убедитесь, что ряд $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$ сходится при $|x|_p < 1$ и расходится при $|x|_p \geq 1$.

c°) Найдите радиус сходимости ряда $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Сходится ли этот ряд на границе круга сходимости?

d°) Проверьте, что в \mathbb{Q}_p имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \log((1+x)(1+y)) &= \log(1+x) + \log(1+y), \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \\ \exp(\log(1+x)) &= 1+x, \quad \log(\exp(x)) = x. \end{aligned}$$

Выведите отсюда, что \exp и \log — взаимно обратные изоморфизмы некоторой окрестности 0 в аддитивной группе \mathbb{Z}_p и некоторой окрестности 1 в мультипликативной группе \mathbb{Z}_p^\times .

e^*) Исследуйте сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k$.

Задача 9 (непрерывные функции на \mathbb{Z}_p). Наша цель — дать следующую характеристику непрерывных функций $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ (теорема Малера): $f(x)$ — непрерывна тогда и только тогда, когда существует последовательность $b_i \in \mathbb{Q}_p, b_i \rightarrow 0$ такая, что $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \binom{x}{i}$ для всех $x \in \mathbb{Z}_p$ (здесь $\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$).

a°) Пусть $b_i \in \mathbb{Q}_p$ — последовательность p -адических чисел, $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = 0$. Убедитесь, что функция $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \binom{x}{i}$ является непрерывной функцией на \mathbb{Z}_p .

b°) Докажите, что для любой последовательности $a_i \in \mathbb{Q}_p$ найдется единственная последовательность b_n такая, что $a_n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} b_i$ (на самом деле слагаемые с $i > n$ равны 0).

c°) Положим $a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, b(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$. Покажите, что $b(t) = \frac{1}{1+t} a\left(\frac{t}{t+1}\right)$.

d°) Предположим, что функция $n \mapsto a_n$ продолжается до непрерывной функции на \mathbb{Z}_p . Пусть $v_p(a_n - a_{n'}) \geq k$, если $v_p(n - n') \geq r$, и $s \in \mathbb{N}$ такое, что $p^s a_n \in \mathbb{Z}_p$ при всех n . Покажите, что $v_p(b_i) \geq k$ при $i > N(k) = (s+k+1)p^r$. Получите отсюда теорему Малера.

Подсказка: представьте $a(t)$ в виде $P(t)(1-t^{p^r})^{-1} + p^k \alpha(t), P(t) = \sum_{n=0}^{p^r-1} a_n t^n, \alpha(t) \in \mathbb{Z}_p[[t]]$, воспользуйтесь дальше тем, что $(1+t)^{p^r} - t^{p^r} \equiv 1 \pmod{p}$.

Задача 10. a°) Покажите, что кольцо \mathbb{Z}_2 гомеоморфно Канторову множеству (которое получается выкидыванием из отрезка $[0, 1]$ всех точек, в троичном разложении которых встречается цифра 1).

b°) Докажите, что все кольца \mathbb{Z}_p гомеоморфны.

Задача 11 $^\circ$. Покажите, что для всех $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ имеет место равенство $|x| \cdot \prod_p |x|_p = 1$, где произведение берется по всем простым числам p (эта формула имеет обобщение на случай произвольных конечных расширений \mathbb{Q}).

Задача 12. а) Докажите, что нормирование $\| \cdot \|$ поля F неархимедово тогда и только тогда, когда $\|n\| \leq 1$ для любого натурального числа n .

б) Покажите, что всякое нормирование поля характеристики p неархимедово.

Задача 13. Докажите, что два нормирования $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_2$ поля F задают одну и ту же топологию (сходимость) на F в том и только в том случае, когда существует положительное вещественное α , для которого $\| \cdot \|_1 = \| \cdot \|_2^\alpha$.

Задача 14°. а) Пусть k — поле, $E = k(t)$. Для $u = t^m \frac{f(t)}{g(t)} \in E$, $f(0) \neq 0$, $g(0) \neq 0$ определим $\|u\| = \rho^m$, где $\rho \in \mathbb{R}$, $0 < \rho < 1$ — некоторое фиксированное вещественное число. Покажите, что $\| \cdot \|$ — норма на E и пополнение E по этой норме изоморфно полю рядов Лорана $k((t))$, т. е. состоит из элементов вида $\sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k$, $a_k \in k$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) Опишите все нормирования поля $\mathbb{F}_q(t)$.

Подсказка: кроме нормирования, введенного в пункте а), имеется нормирование, соответствующее „точке на бесконечности“ в \mathbb{P}^1 : для $u = \frac{f(t)}{g(t)} \in \mathbb{F}_q(t)$ это $\rho^{\deg g - \deg f}$.

Задача 15 (Теорема Гельфанда—Торнхейма). а) Пусть F — нормированное поле, содержащее \mathbb{C} , при этом нормирование $| \cdot |$ на F продолжает обычное нормирование на \mathbb{C} . Пусть $x_0 \in F \setminus \mathbb{C}$. Положим $f(z) = (x_0 - z)^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow F$. Убедитесь, что функция $z \mapsto |f(z)|$ непрерывна, ограничена и достигает наибольшего значения M на некотором замкнутом множестве $D \subset \mathbb{C}$.

б) В обозначениях предыдущего пункта предположим, что $0 \in D$. Пусть ω — примитивный корень степени n из 1, $r \in \mathbb{R}$, $|r/x_0| < 1$. Положим $S(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_0 - \omega^k r}$. Убедитесь, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |S(n)| = |1/x_0| = M$.

с) Докажите, что для любого комплексного числа λ такого, что $|\lambda| = 1$, имеет место $\left| \frac{1}{x_0 - \lambda r} \right| = M$. Выведите отсюда, что $F = \mathbb{C}$.

Подсказка: рассмотрите маленький интервал, содержащий λ , и корни из 1, лежащие в нем.

д) Покажите, что любое поле F с архимедовым нормированием изоморфно подполю \mathbb{C} так, что при изоморфизме нормирование на F переходит в стандартное нормирование на \mathbb{C} .

Задача 16*. Пусть K — поле с неархимедовым нормированием $\| \cdot \|$. Положим $\mathcal{O}_K = \{x \in K \mid \|x\| \leq 1\}$, $\mathfrak{m}_K = \{x \in K \mid \|x\| < 1\}$, $k = \mathcal{O}_K / \mathfrak{m}_K$. Докажите, что K локально компактно (т. е. существует компактная окрестность 0) тогда и только тогда, когда K — полно, нормирование $\| \cdot \|$ дискретно (т. е. образ K в \mathbb{R} при этом нормировании — дискретная подгруппа \mathbb{Z}), а поле вычетов k конечно.