

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ГУ-ВШЭ ПО МАТЕМАТИКЕ 2010

1. Сколькими способами можно покрасить грани куба в три цвета так, чтобы покрашены были только три грани, а остальные остались непокрашенными? Разные грани можно красить в один и тот же цвет. Раскраски, отличающиеся вращением куба, считаются совпадающими.

2. Рассмотрим подмножество A векторного пространства \mathbb{R}^n . Скажем, что точка $a \in A$ принадлежит *ядру* множества A , если для всякого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ найдется число $\varepsilon > 0$ со следующим свойством: $a + \lambda x \in A$ для любого числа $\lambda \in (0, \varepsilon)$. а) Предположим, что множество A совпадает со своим ядром и выпукло. Докажите, что тогда оно открыто. б) Верно ли то же утверждение для произвольного, не обязательно выпуклого множества?

3. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \left[\frac{2^n}{3} \right].$$

Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x .

4. Пусть G — конечная группа нечетного порядка. Докажите, что если элемент $x \in G$ сопряжен элементу x^{-1} , то x совпадает с единичным элементом группы G .

5. Пусть V — комплексное векторное пространство, состоящее из всех матриц размера 2×2 . Найдите собственные значения линейного оператора $L_A : V \rightarrow V$, действующего по формуле $L_A(X) = AX - XA$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$