ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А.В. Колесников

Содержание

1. Понятие случайного процесса. Винеровский процесс. Основные свойства. 1
2. Теорема о непрерывной модификации процесса. Теорема о существовании винеровского процесса. Марковские моменты. 4
3. Сильное марковское свойство винеровского процесса. Распределение максимума. Принцип отражения. Уравнение теплопроводности. 7
4. Уравнение теплопроводности (продолжение). Пуассоновский процесс. 11
5. Стохастическое интегрирование. 15
6. Мартингалы. Неравенство Колмогорова. Стохастический интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ито. 18
7. Геометрическое броуновское движение. Волатильность. Опционы. Формула Блэка-Шоулза. 23
8. Процесс Орнштейна-Уленбека. Его свойства. Стохастические дифференциальные уравнения. Теорема существования и единственности решений для стохастических ДУ. Формула Фейнмана-Каца. 25
Список литературы 28

1. Понятие случайного процесса. Винеровский процесс. Основные свойства.

Основные понятия.

Предположим, что нам дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и некоторое множество индексов T. Будем называть отображение $\xi : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ *случайным процессом* (или *стохастическим процессом*), если при каждом фиксированном $t \in T$ отображение $\xi(\omega, t)$ является случайной величиной (т.е., измеримым отображением Ω в $\mathbb{R}$). Иногда вместо $\xi(t, \omega)$ мы будем писать $\xi_t(\omega)$ или просто ξ_t.

Множество T может иметь различную природу, но, как правило, T будет представлять собой отрезок $[0, T_0]$ и интерпретироваться как время. Если $T = \mathbb{N}$, то мы получаем последовательность с.в.

Зафиксировав конечный набор индексов $(t_1, \cdots, t_n)$, получаем случайный вектор $(\xi_{t_1}, \cdots, \xi_{t_n})$. Всевозможные распределения $(\xi_{t_1}, \cdots, \xi_{t_n})$ называются *конечномерными распределениями* случайного процесса ξ_t.

При фиксировании $\omega \in \Omega$ мы получим *траекторию* случайного процесса. Если $T = [0, T_0]$, то траектория является функцией на отрезке $[0, T_0]$. Часто весьма плодотворной является такая точка зрения: точка $\omega \in \Omega$ отображается в функцию $t \to \xi_t(\omega)$. Т.е., $\xi_t(\omega)$ является *случайной функцией.* При строгом подходе, надо, разумеется, уточнять, с каким пространством функций мы имеем дело и какой σ-алгеброй оно наделено.

Два случайных процесса ξ_t, η_t называются эквивалентными (стохастически эквивалентными), если $P(\xi_t \neq \eta_t) = 0$ для всех $t \in T$. Следующий простой пример ([2]) показывает, что траектории эквивалентных случайных процессов могут существенно отличаться.

Пример 1.1. *Пусть* $\tau = \tau(\omega)$ *— непрерывная с.в., принимающая значения в отрезке* $[0, 1]$, $t \in [0, 1]$. *Определим два процесса* $\xi_t(\omega)$, $\eta_t(\omega)$*:*

$$\xi_t \equiv 0,$$

$$\eta_t = 1, \text{ если } t = \tau, \ \eta_t = 0, \text{ если } t \neq \tau.$$

Очевидно, ξ и η стохастически эквивалентны, но траектории ξ непрерывны, а траектории η — нет.

Винеровский процесс.

Перейдем к описанию основной (непрерывной) модели всей теории случайных процессов — винеровского процесса или броуновского движения.

Определение 1.2. *Случайный процесс W_t, $t \in [0,T]$ называется винеровским процессом (броуновским движением), если он обладает следующими свойствами:*

1) *Случайный вектор $(W_{t_1}, \cdots, W_{t_n})$, $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le T$ имеет гауссовское распределение и $W_0 = 0$ п.н.*
2) $$\mathbb{E}W_t = 0, \ \mathbb{E}\big(W_t W_s\big) = t \wedge s$$
3) *Траектории $t \to W_t(\omega)$ непрерывна для всех $\omega \in \Omega$.*

Замечание 1.3. *Винеровский процесс является* **гауссовским** *процессом (т.е., процессом с гауссовскими конечномерными распределениями) с непрерывными траекториями.*

Вопрос о существовании винеровского процесса мы обсудим ниже. Сформулируем сначала важное эквивалентное определение.

Теорема 1.4. *Винеровский процесс является процессом с независимыми приращениями, т.е. случайные величины*

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \quad 0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le T$$

независимы. Кроме этого, выполено свойство

$$\mathbb{E}W_t = 0, \quad D(W_t - W_s) = t - s, \quad s \le t. \tag{1}$$

Обратно, гауссовский процесс с непрерывными траекториями и независимыми приращениями является винеровским, если выполнено свойство (1) и $W_0 = 0$.

Доказательство. Пусть W_t — винеровский процесс, $s \le t$. Очевидно,

$$D(W_t - W_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s)^2 - \big(\mathbb{E}(W_t - W_s)\big)^2 = \mathbb{E}(W_t^2 - 2W_tW_s + W_s^2) = t - 2s + s = t - s.$$

Если $t_i < t_{i+1} \le t_j < t_{j+1}$, то

$$\mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \mathbb{E}\big(W_{t_{i+1}}W_{t_{j+1}} - W_{t_{i+1}}W_{t_j} - W_{t_i}W_{t_{j+1}} + W_{t_i}W_{t_j}\big) = t_{i+1} - t_{i+1} - t_i + t_i = 0.$$

Получаем, что приращения некоррелированы. В силу гауссовости конечномерных распределений приращения независимы.

Обратно, если W_t — гауссовский процесс с независимыми приращениями, выполнено $W_0 = 0$ и выполнено (1), то

$$\mathbb{E}(W_tW_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s)W_s + \mathbb{E}W_s^2 = \mathbb{E}(W_t - W_s)(W_s - W_0) + \mathbb{E}(W_s - W_0)^2 = D(W_s - W_0) = s,$$

если $s \le t$. □

Весьма интересна история появления винеровского процесса в физике и математике. В 1828 г. ботаник Р. Броун описал явление, впоследствие названное броуновским движением: хаотическое движение пыльцы в жидкости. Оказалось, что это движение вызвано ударами молекул. Первое описание физической модели этого явления было предложено А.Эйнштейном (1905) и М.Смолуховским (1906). Работы Эйнштейна привели к оценке числа Авогадро (Ж.-Б. Перрен, Нобелевская премия, 20-е гг.).

Долгое время Эйнштейн считался пионером в физико-математической теории броуновского движения, но примерно 50 лет спустя была переоткрыта работа Л. Башелье "Théorie de la spéculation", написанная в 1900 г. В этой работе Башелье фактически применил винеровский процесс к описанию ценных бумаг на французском рынке. Его работа осталось незамечена до конца 50-х годов.

Первое строгое математическое доказательство существования винеровского процесса получил Норберт Винер в 1922-23 гг. Его конструкция основывалась на довольно абстрактных методах (интеграл Даниеля) и была весьма тяжелой. Упрощение было достигнуто позже. Стандартное доказательство основано на теореме Колмогорова о построении меры по конечномерным распределениям и его же теореме о существовании непрерывной модификации процесса. Поль Леви предложил доказательство, основаннное на сходимости случайных рядов (фактически, на разложении процесса в ряд Фурье со случайными коэффициентами).

Траектории винеровского процесса являются весьма нерегулярными функциями. Как мы скоро убедимся, они почти нигде не дифференцируемы (хотя и непрерывны). Простейшим свойством "нерегулярности"является следующее.

Теорема 1.5. *Пусть $s = t_{0,n} < t_{1,n} < \cdots < t_{i_n,n} = t$ — последовательность разбиений отрезка $[s,t]$ с $\lim_n \max_i |t_{i,n} - t_{i-1,n}| = 0$. Тогда с.в.*

$$\xi_n = \sum_{i=0}^{n} \big(W_{t_{i+1,n}} - W_{t_{i,n}}\big)^2$$

обладает свойством: $\lim_n \xi_n = t - s$ *по вероятности.*

Доказательство. Найдем $\mathbb{E}\xi_n$, $D\xi_n$.

$$\mathbb{E}\xi_n = \sum_i \mathbb{E}\big(W_{t_{i+1,n}} - W_{i,n}\big)^2 = \sum_i (t_{i+1,n} - t_{i,n}) = t - s.$$

В силу независимости приращений

$$D\Big(\sum_i \big(W_{t_{i+1,n}} - W_{t_{i,n}}\big)^2\Big) = \sum_i D\big(W_{t_{i+1,n}} - W_{t_{i,n}}\big)^2 = \sum_i \mathbb{E}\big(W_{t_{i+1,n}} - W_{t_{i,n}}\big)^4 - \Big(\mathbb{E}\big(W_{t_{i+1,n}} - W_{t_{i,n}}\big)^2\Big)^2.$$

Воспользуемся тем, что $\mathbb{E}\eta^4 = 3\sigma^4$ для $\eta \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Получаем

$$D\Big(\sum_i \big(W_{t_{i+1,n}} - W_{t_{i,n}}\big)^2\Big) = 2\sum_i (t_{i+1,n} - t_{i,n})^2 \le \max_i |t_{i+1} - t_i| \sum_i (t_{i+1,n} - t_{i,n}) = \max_i |t_{i+1} - t_i|(t-s).$$

Очевидно, последняя величина стремится к нулю. Из сходимости $D(\xi_n) = \mathbb{E}(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)^2$ к нулю следует сходимость к нулю по вероятности с.в. $\xi_n - \mathbb{E}\xi_n$. ☐

Напомним, что вариацией функции f на отрезке $[a,b]$ называется величина

$$var_{[a,b]}(f) = \sup \sum_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)|,$$

где супремум берется по всем возможным разбиениям $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. В случае, если f имеет интегрируемую производную на $[a,b]$, то

$$var_{[a,b]}(f) = \int_a^b |f'(t)|dt.$$

Лемма 1.6. *Докажите, что если f непрерывна и $var_{[a,b]}(f) < \infty$, то $\lim_n \sum_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^2 = 0$ при стремлении к нулю максимума отрезков разбиения.*

Следствие 1.7. *С вероятностью 1 траектории винеровского процесса имеют бесконечную вариацию на $[a,b]$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.5. Найдем почти всюду сходящуюся подпоследовательность $\xi_{n_m}(\omega) \to t - s$. Но любая траектория $t \to W_t(\omega)$, для которой это выполнено, имеет неограниченную вариацию по предыдущей лемме. ☐

Плотность конечномерных распределений винеровского процесса

Заметим, что из свойств 1) – 2) легко вывести формулу плотности распределения случайного вектора

$$\eta_{t_1,\cdots,t_n} = (W_{t_1}, \cdots, W_{t_n}).$$

Действительно, $\eta_{t_1,\cdots,t_n}$ является линейным образом гауссовского случайного вектора

$$\tilde{\eta}_{t_1,\cdots,t_n} = (W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$$

с независимыми компонентами при отображении

$$A(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, x_2 + x_1, \cdots x_n + x_{n-1}) = y,$$

$\eta_{t_1,\cdots,t_n} = A(\tilde\eta_{t_1,\cdots,t_n})$. Отображение A задается треугольной матрицей с единичным определителем. Распределение $\tilde\eta_{t_1,\cdots,t_n}$, очевидно, имеет вид

$$f_{\tilde\eta_{t_1,\cdots,t_n}}(x_1,\cdots,x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}} \exp\Big(-\frac{x_i^2}{2(t_i-t_{i-1})}\Big), \quad t_0=0.$$

С помощью формулы замены переменных получаем

$$f_{\eta_{t_1,\cdots,t_n}}(y_1,\cdots,y_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}} \exp\Big(-\frac{(y_i-y_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\Big), \quad t_0=0,\ y_0=0. \tag{2}$$

Занятие 1

1) Найти $P(W_t>0, W_s>0)$ (используйте подходящую замену переменных и полярную систему координат).
2) Пусть W_t — винеровский процесс. Доказать, что следующие процессы являются винеровскими
$$-W_t,\ tW_{1/t},\ W_{t+s}-W_s,\ \frac{1}{a}W_{a^2t},\ W_{1-t}-W_1, \quad s>0,\ a>0.$$
3) Для непрерывной функции $f(t)$ на $[0,1]$ положим $X_t=\int_0^t W_s f(s)\,ds$. Доказать, что X_t — гауссовский процесс и найти $\mathbb{E}X_t$, $\mathbb{E}(X_tX_s)$.
4) Пусть $s<t$. Докажите, что $\mathbb{E}(W_t|W_s)=W_s$ (используйте независимость приращений). Докажите прямым вычислением, что $\mathbb{E}(W_s|W_t)=\frac{s}{t}W_t$.
5) (Броуновский мост) Броуновским мостом B_t на $[0,1]$ называется процесс с конечномерными распределением $P(B_{t_1}<x_1,\cdots,B_{t_n}<x_n)=P(W_{t_1}<x_1,\cdots,W_{t_n}<x_n|W_1=0)$ (плотность распределения $(B_{t_1},\cdots,B_{t_n})$ является условной плотностью распределения $(W_{t_1},\cdots,W_{t_n})$ при условии $W_1=0$). Доказать, что $\mathbb{E}(B_tB_s)=s\wedge t-ts$.
6) Доказать, что процесс W_t-tW_1 имеет конечномерные распределения, совпадающие с распределением броуновского моста
7) Найти условную плотность W_t, $t_1<t<t_2$ при условии $W_{t_1}=A$, $W_{t_2}=B$.
8) (Процесс Коши) Процессом Коши будем называть такой процесс C_t с независимыми приращениями, $C_0=0$, что $C_t-C_s, s<t$ имеет плотность распределения Коши с параметром $t-s$: $f=\frac{t-s}{\pi(x^2+(t-s)^2)}$. Найти конечномерные распределения C_t.
9) (Пуассоновский процесс) Пуассоновским процессом π_t на $[0,\infty)$ будем называть такой процесс с независимыми приращениями и непрерывными справа траекториями, что $\pi_t-\pi_s, s<t$ имеет распределения Пуассона с параметром $t-s$, π_0 =0. Найти $\mathbb{E}\pi_t$, $\mathbb{E}(\pi_t\pi_s)$.

2. Теорема о непрерывной модификации процесса. Теорема о существовании винеровского процесса. Марковские моменты.

Существование и непрерывность траекторий.

С точностью до последнего свойства (непрерывность траекторий) существование винеровского процесса следует из теоремы Колмогорова (I, теорема 3.20). Идея доказательства заключается в том, чтобы представить случайный процесс как "случайную функцию", т.е. измеримое отображение из Ω в пространство траекторий. Действительно, пространство $\mathbb{R}^{[0,1]}$ может быть отождествлено с пространством всех функций на отрезке $[0,1]$. Для построения процесса W_t мы положим $\Omega=\mathbb{R}^{[0,1]}$ и наделим Ω стандартной цилиндрической σ-алгеброй $\mathcal{C}$. Наша цель будет заключаться в построении некоторой специальной меры P_w на Ω. Винеровский процесс $W_t(\omega)$ определим так:

$$W_t(\omega)=\omega(t)$$

(последнее вычисление возможно, так как ω — функция на $[0,1]$). Набор точек $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n\le 1$ задает отображение

$$\omega\to(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n))$$

из Ω в $\mathbb{R}^n$. Если Ω наделено мерой P_w, то распределение $(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n))$ является конечномерной проекцией $P_{w,t_1\cdots,t_n}$. Поэтому, для того чтобы отождествить ω_t с винеровским процессом (без свойства 3)!), необходимо и достаточно потребовать, чтобы распределение $(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_n))$ задавалось формулой (2).

Таким образом, свойства 1) – 2) однозначно определяют конечномерные проекции меры P_w. В силы теоремы Колмогорова, достаточно проверить свойство согласованности $P_{w,t_1\cdots,t_n}$, т.е.

$$P_{w,t_1\cdots,t_n}\circ P_{n-1}^{-1}=P_{w,t_1\cdots,t_{n-1}},$$

где P_{n-1} — проекция на координаты $(\omega(t_1),\cdots,\omega(t_{n-1}))$.

Последнее соотношение сводится к проверке равенства

$$\int f_{\eta_{t_1,\cdots,t_n}}(y_1,\cdots,y_n)\,dy_n=f_{\eta_{t_1,\cdots,t_{n-1}}}(y_1,\cdots,y_{n-1}),$$

где $f_{\eta_{t_1,\cdots,t_n}}$ задано формулой (2).

Упражнение 2.1. *Проверьте это соотношение.*

Таким образом, из теоремы Колмогорова следует существование винеровского процесса на пространстве $\mathbb{R}^{[0,1]}$. Существование процесса с такими же конечномерными распределениями и непрерывными траекториями следует из теоремы о существовании непрерывной модификации. Более того, оказывается, что траектории винеровского процесса являются гельдеровыми.

Определение 2.2. *Функция f на отрезке $[a,b]$ называется гельдеровой с показателем $\gamma>0$, если для некоторой постоянной $C>0$*

$$|f(t)-f(s)|\le C|t-s|^\gamma,\quad t,s\in[a,b].$$

Гельдеровы функции играют весьма важную роль в теории случайных процессов и теории уравнений в частных производных.

Теорема 2.3. *(А.Н. Колмогоров) Пусть ξ_t — случайный процесс, $t\in[0,1]$, причем существуют такие числа $\gamma>0,\varepsilon>0,N>0$, что*

$$\mathbb{E}|\xi_t-\xi_s|^\gamma\le N|t-s|^{1+\varepsilon},\ \forall t,s>0.$$

Тогда существует такой процесс η_t, что $P(\xi_t\ne\eta_t)=0$ для любого $t\in[0,1]$ и все траектории η_t непрерывны. Более то, η_t обладает траекториями, непрерывными по Гельдеру: для всех траекторий $\eta_t(\omega)$ существует такая константа $N(\omega)$, что

$$|\eta_t-\eta_s|\le N|t-s|^\alpha$$

для любого $0<\alpha<\frac{\varepsilon}{\gamma}$.

Доказательство. Для произвольного натурального m обозначим через D_m множество точек отрезка $[0,1]$, имеющих вид $\frac{i}{2^m}$, $i\in[0,2^m[$, i — целое. Положим $D=\cup_m D_m$. Обозначим через Δ_m множество пар (s,t), $s,t\in D_m$, для которых $|s-t|=2^{-m}$ (их ровно 2^m). Положим: $K_i=\sup_{(s,t)\in\Delta_i}|\xi_s-\xi_t|^\gamma$. В силу предположений теоремы

$$\mathbb{E}\big[K_i^\gamma\big]\le\sum_{(s,t)\in\Delta_i}|\xi_s-\xi_t|^\gamma\le 2^i2^{-i(1+\varepsilon)}=C2^{-i\varepsilon}.$$

Зафиксируем точку $s\in D$. Существует возрастающая последовательность $s_n\to s$, $s_n\in D_n$ ($s=s_n$ для достаточно большого n).

Пусть теперь $s,t\in D$, причем $|s-t|\le 2^{-m}$. Тогда либо $s_m=t_m$, либо $(s_m,t_m)\in\Delta_m$. Заметим, что

$$\xi_t-\xi_s=\sum_{i=m}^\infty\big(\xi_{t_{i+1}}-\xi_{t_i}\big)+\xi_{t_m}-\xi_{s_m}-\sum_{i=m}^\infty\big(\xi_{s_{i+1}}-\xi_{s_i}\big)$$

(суммы на самом деле конечны). Очевидно,

$$|\xi_t-\xi_s|\le 2\sum_{i=m}^\infty K_i.$$

Положим: $M_\alpha=\sup_{s,t\in D,s\ne t}\big\{\frac{|\xi_t-\xi_s|}{|t-s|^\alpha}\big\}$. Имеем следующую оценку:

$$M_\alpha\le\sup_{m\in\mathbb{N}}\sup_{|t-s|\le 2^{-m}}\big\{2^{m\alpha}|\xi_t-\xi_s|:\ s,t\in D,s\ne t\big\}\le\sup_{m\in\mathbb{N}}\big(2^{m\alpha+1}\sum_{i=m}^\infty K_i\big)\le 2\sum_{i=0}^\infty 2^{i\alpha}K_i.$$

Пусть $\gamma \geq 1$. Оценим $L^{\gamma}(P)$-норму $\|M_\alpha\|_{L^\gamma} = \mathbb{E}^{\frac{1}{\gamma}}(M_\alpha^\gamma)$:

$$\|M_\alpha\|_{L^\gamma} \leq 2\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\alpha}\|K_i\|_{L^\gamma} \leq C' \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(\alpha-\frac{\varepsilon}{\gamma})} < \infty.$$

Если $\gamma < 1$, применим другую оценку

$$\Bigl(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\Bigr)^{\gamma} \leq \Bigl(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\gamma}\Bigr), \quad a_i \geq 0.$$

(почему она верна?). Получаем

$$\mathbb{E}M_\alpha^\gamma \leq 2^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\alpha\gamma}\mathbb{E}(K_i^\gamma) \leq C\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\alpha\gamma - i\varepsilon} < \infty.$$

Таким образом $\mathbb{E}\bigl(M_\alpha\bigr)^\gamma < \infty$. Следовательно, $M_\alpha < \infty$ почти всюду (теорема Беппо Леви). Следовательно, траектория ξ_t — равномерно непрерывна на D почти наверное. Положим: $\eta_t = \lim_{s\to t, s\in D}\xi_t$, если ξ_t равномерно непрерывна на D и $\eta_t = 0$ в противном случае. Процесс η_t обладает гельдеровыми траекториями. Далее, так как $\eta_t = \lim_{s\to t, s\in D}\xi_t$ почти всюду, то по лемме Фату $\mathbb{E}|\xi_t - \eta_t| \leq \underline{\lim}_{s\to t}\mathbb{E}|\xi_s - \eta_s| = 0$. Итак $\eta_t = \xi_t$ почти всюду. □

Замечание 2.4. *Можно показать (см. [8]), что для винеровского процесса $|W_t - W_s| \leq N|t - s|^{1/2-\varepsilon}$, $s, t \in [0,1]$ где N зависит только от ε.*

В частности, для винеровского процесса можно положить $\alpha = 4, \beta = 1, N = 3$. Таким образом, теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации завершает доказательство существования винеровского процесса. Заметим, что отображение $\Omega \ni \omega \to \xi_t(\omega) \in C([0,1])$ задает вероятностную меру на пространстве $C([0,1])$. Эта мера называется мерой Винера.

Теорема 2.5. *Цилиндрическая σ-алгебра на $C([0,1])$ (т.е., σ-алгебра, порожденная отображеними $x \to (x(t_1), \cdots, x(t_n))$) совпадает с борелевской.*

Существует несколько альтернативных способов доказательства существования винеровского процесса и меры Винера (см., например [6], [7], [8]):

1) Доказательство, основанное на разложении W_t в случайные ряды.

Пусть $\{\xi_n\}$ последовательность независимых стандартных нормальных с.в. Оказывается, что ряд

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}t\xi_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{\sin(kt)}{k}$$

почти всюду сходится к траектории винеровского процесса. Во многих книгах можно найти доказательство, основанное на использовании функций Хаара.

2) Доказательство, основанное на слабой сходимости мер в пространстве $C([0,1])$ и центральной предельной теореме (так называемый принцип инвариантности Донскера). Этот подход, помимо всего прочего, дает простой конструктивный способ моделирования винеровского процесса.

Марковские моменты. Марковское свойство.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задано семейство σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, T_0]$, удовлетворяющее свойству

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \ s \leq t.$$

Такое семейство будем называть потоком ("filtration" в англоязычной литературе).

Будем говорить, что $(W_t, \mathcal{F}_t)$ — винеровский процесс относительно $\mathcal{F}_t$, если W_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$ и $W_{t+s} - W_t$ не зависит от $\mathcal{F}_t$ для любых $s, t \geq 0$.

Для заданного винеровского процесса всегда существует такое семейство $\mathcal{F}_t$, для которого это свойство выполняется. В качестве такового можно взять σ-алгебру $\mathcal{F}_{\leq t}$, которая строится следующим образом.

Упражнение 2.6. *Пусть $\mathcal{F}_{\leq t} = \sigma\{W_s, s \in [0,t]\} = \sigma\{\omega : W_s(\omega) \in B, s \in [0,t], B \in \mathcal{B}\}$ (через $\mathcal{B}$ обозначается совокупность борелевских множеств прямой) порождена случайными величинами W_s, $s \in [0,t]$. Тогда $(W_t, \mathcal{F}_{\leq t})$ — винеровский процесс относительно $\mathcal{F}_{\leq t}$.*

В момент времени t σ-алгебру $\mathcal{F}_t$ естественно понимать как совокупность событий "прошлого" и "настоящего".

Непосредственно проверяется так называемое марковское свойство винеровского процесса.

Теорема 2.7. *(Марковское свойство) Пусть $s \geq 0$. Процесс $t \to W_{t+s} - W_s$, является винеровским. σ-алгебра, порожденная $W_{t+s} - W_s$, не зависит от $\mathcal{F}_s$.*

Задача 2.8. *Докажите существование винеровского процесса на $[0, \infty)$.*

Фундаментальным свойством винеровского процесса является то, что теорема выше оказывается верной не только для фиксированной константы t, но также для некоторого класса случайных величин, называемых марковскими моментами (сильное марковское свойство).

Определение 2.9. *Случайная величина $\tau \in [0, +\infty]$ называется марковским моментом (stopping time), если для любого t событие $\{\tau \leq t\}$ принадлежит $\mathcal{F}_t$.*

Неформально можно сказать, что τ — случайная величина, "не зависящая от будущего".

Упражнение 2.10. *1) Пусть $a \in \mathbb{R}$. Проверьте, что $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t \geq a\}$ (считаем, что $\tau_a = \infty$, если $W_t < a$ для всех t) — марковский момент.*

2) Пусть $a < 0 < b$. Проверьте, что $\tau = \inf\{t \geq 0 : W_t \notin (a, b)\}$ — марковский момент.

Занятие 2

1) Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая модификация винеровского процесса W_t, что $|W_t - W_s| \leq N(\omega)|t - s|^{1/2-\varepsilon}$, $s, t \in [0, 1]$.
2) Докажите упражнение 2.10.
3) Докажите, что если τ и σ — марковские моменты, то $\min(\tau, \sigma), \max(\tau, \sigma), \tau + \sigma$ — марковские моменты.
4) (Теорема о непрерывной модификации неверна для $\varepsilon = 0$). Известно, что процесс Пуассона π_t не обладает непрерывной модификацией. Убедитесь, что $\mathbb{E}|\pi_t - \pi_s| \leq C|t - s|^{1+\varepsilon}$ только для $\varepsilon = 0$.

5*) Докажите, что траектории винеровского процесса почти всюду **нигде** не дифференцируемы.

3. Сильное марковское свойство винеровского процесса. Распределение максимума. Принцип отражения. Уравнение теплопроводности.

Ниже мы будем иметь дело с винеровским процессом $(W_t, \mathcal{F}_t)$ относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}$. Как мы уже видели, "сдвинутый" на постоянную величину s процесс

$$B_t = W_{t+s} - W_s$$

является винеровским и не зависит от $\mathcal{F}_s$.

Далее мы рассматриваем марковский момент τ, обладающий свойством $P(\tau < \infty) = 1$. С каждым таким τ можно связать две σ-алгебры (через $\mathcal{B}$ обозначается совокупность борелевских множеств прямой)

$$\mathcal{F}_{\leq \tau} = \sigma\{\omega : W_{s \wedge \tau}(\omega) \in B, s \geq 0, B \in \mathcal{B}\}$$
$$\mathcal{F}_{\geq \tau} = \sigma\{\omega : W_{s+\tau}(\omega) - W_s(\omega) \in B, s \geq 0, B \in \mathcal{B}\}.$$

Теорема 3.1. *(Сильное марковское свойство) Пусть τ — марковский момент относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $P(\tau < \infty) = 1$. Процесс $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$ является винеровским.*

σ-алгебры $\mathcal{F}_{\leq \tau}$ и $\mathcal{F}_{\geq \tau}$ независимы.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что для $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ и ограниченной непрерывной функции g

$$\mathbb{E}g(B_{t_1}, \cdots, B_{t_k}) = \mathbb{E}g(W_{t_1}, \cdots, W_{t_k}).$$

Предположим, что τ принимает не более чем счетное множество значений:

$$\tau = \sum_n r_n I_{\{\tau = r_n\}}$$

Тогда

$$\mathbb{E}g(B_{t_1}, \cdots, B_{t_k}) = \mathbb{E}\Big(\sum_n g(B_{t_1}, \cdots, B_{t_k}) I_{\{\tau = r_n\}}\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_n g(W_{t_1+r_n} - W_{r_n}, \cdots, W_{t_k+r_n} - W_{r_n}) I_{\{\tau = r_n\}}\Big).$$

Заметим, что в силу марковости τ, случайная величина $I_{\{\tau=r_n\}}$ измерима относительно $\mathcal{F}_{r_n}$, а с.в. $W_{t_i+r_n}-W_{r_n}$ — независима от $\mathcal{F}_{r_n}$. Поэтому последнее выражение равно (в силу независимости и марковского свойства)

$$\mathbb{E}\big(\sum_n g(W_{t_1+r_n}-W_{r_n},\cdots,W_{t_k+r_n}-W_{r_n})\big)P(\tau=r_n)=\sum_n \mathbb{E}\Big[g(W_{t_1},\cdots,W_{t_k})P(\tau=r_n)\Big]$$
$$=\mathbb{E}\Big[g(W_{t_1},\cdots,W_{t_k})\Big]\cdot\sum_n P(\tau=r_n)=\mathbb{E}\big(g(W_{t_1},\cdots,W_{t_k})\big).$$

В общем случае приблизим τ последовательностью с дискретным множеством значений

$$\tau_n(\omega)=(k+1)2^{-n},\quad k2^{-n}<\tau(\omega)\le(k+1)2^{-n}.$$

Очевидно, $\tau\le\tau_n\le\tau+2^{-n}$. Заметим, что $\{\omega:\tau_n(\omega)>t\}=\{\omega:\tau(\omega)>2^{-n}[2^nt]\}\in\mathcal{F}_{2^{-n}[2^nt]}\subset\mathcal{F}_t$. В силу непрерывности траекторий W_t и функции g, а также теоремы Лебега

$$\mathbb{E}g(B_{t_1},\cdots,B_{t_k})=\lim_n \mathbb{E}g(W_{t_1+\tau_n}-W_{\tau_n},\cdots,W_{t_k+\tau_n}-W_{\tau_n})=\lim_n \mathbb{E}g(W_{t_1},\cdots,W_{t_k})=\mathbb{E}g(W_{t_1},\cdots,W_{t_k}).$$

Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства независимости σ-алгебр рассмотрим пару непрерывных ограниченных функций f,g. Достаточно доказать, что

$$\mathbb{E}\big(f(W_{t_1\wedge\tau},\cdots,W_{t_k\wedge\tau})\cdot g(B_{t_1},\cdots,B_{t_m})\big)=\mathbb{E}\big(f(W_{t_1\wedge\tau},\cdots,W_{t_k\wedge\tau})\cdot\mathbb{E}g(B_{t_1},\cdots,B_{t_m})\big)$$

Как и выше, доказательство сводится к случаю, когда τ принимает дискретное множество значений.

$$\mathbb{E}\Big(f(W_{t_1\wedge\tau},\cdots,W_{t_k\wedge\tau})\cdot g(B_{t_1},\cdots,B_{t_m})\Big)=\sum_n \mathbb{E}\Big(f(W_{t_1\wedge\tau},\cdots,W_{t_k\wedge\tau})\cdot g(B_{t_1},\cdots,B_{t_m})I_{\{\tau=r_n\}}\Big)$$
$$=\sum_n \mathbb{E}\Big(f(W_{t_1\wedge r_n},\cdots,W_{t_k\wedge r_n})\cdot g(W_{t_1+r_n}-W_{r_n},\cdots,W_{t_k+r_n}-W_{r_n})I_{\{\tau=r_n\}}\Big).3$$

В силу марковского свойства последнее выражение равно

$$\sum_n \mathbb{E}\Big(f(W_{t_1\wedge r_n},\cdots,W_{t_k\wedge r_n})\cdot I_{\{\tau=r_n\}}\Big)\mathbb{E}g(W_{t_1+r_n}-W_{r_n},\cdots,W_{t_k+r_n}-W_{r_n})$$
$$=\sum_n \mathbb{E}\Big(f(W_{t_1\wedge r_n},\cdots,W_{t_k\wedge r_n})\cdot I_{\{\tau=r_n\}}\Big)\mathbb{E}g(W_{t_1},\cdots,W_{t_k})$$
$$=\mathbb{E}f(W_{t_1\wedge\tau},\cdots,W_{t_k\wedge\tau})\cdot\mathbb{E}g(W_{t_1},\cdots,W_{t_k})=\mathbb{E}f(W_{t_1\wedge\tau},\cdots,W_{t_k\wedge\tau})\cdot\mathbb{E}g(B_{t_1},\cdots,B_{t_k}).$$

Что и требовалось доказать. □

Рассмотрим ниже несколько примеров применения сильного марковского свойства.

Теорема 3.2. *(Принцип отражения) Пусть* $\tau_a=\inf\{t\ge0: W_t\ge a\}$ *— первый момент достижения* $a\in\mathbb{R}$. *Процесс*

$$B_t=\{W_t,\text{ если } t\le\tau_a;\quad 2a-W_t,\text{ если } t>\tau_a\}$$

является винеровским.

Доказательство. Пусть $0=t_0<t_1\le\cdots<t_n<t_{n+1}=+\infty$, $A_i\in\mathcal{B}$.

$$P(B_{t_1}\in A_1,\cdots,B_{t_n}\in A_n)=\sum_{i=0}^n P(B_{t_1}\in A_1,\cdots,B_{t_n}\in A_n,t_i<\tau_a<t_{i+1})$$
$$=\sum_{i=0}^n P(W_{t_1}\in A_1,\cdots,W_{t_i}\in A_i,2a-W_{t_{i+1}}\in A_{i+1},\cdots,2a-W_{t_n}\in A_n,t_i<\tau_a<t_{i+1})$$
$$=\sum_{i=0}^n P(W_{t_1}\in A_1,\cdots,W_{t_i}\in A_i,W_{\tau_a}-W_{t_{i+1}}\in A_{i+1}-a,\cdots,W_{\tau_a}-W_{t_n}\in A_n-a,t_i<\tau_a<t_{i+1})$$

Обозначив через $\tilde W_t$ винеровский процесс $\tilde W_t=W_{t+\tau_a}-W_{\tau_a}$, получим, что последняя величина равна

$$\sum_{i=0}^n P(W_{t_1}\in A_1,\cdots,W_{t_i}\in A_i,-\tilde W_{t_{i+1}-\tau_a}\in A_{i+1}-a,\cdots,-\tilde W_{t_n-\tau_a}\in A_n-a,t_i<\tau_a<t_{i+1})$$

Далее (принцип отражения!) нам надо доказать следующее соотношение:

$$P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, -\tilde{W}_{t_{i+1}-\tau_a} \in A_{i+1} - a, \cdots, -\tilde{W}_{t_n-\tau_a} \in A_n - a, t_i < \tau_a < t_{i+1})$$
$$= P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, \tilde{W}_{t_{i+1}-\tau_a} \in A_{i+1} - a, \cdots, \tilde{W}_{t_n-\tau_a} \in A_n - a, t_i < \tau_a < t_{i+1}),$$

которое интуитивно следует из независимости σ-алгебры $\mathcal{F}_{\le\tau_a}$ и с.в. τ_a от σ-алгебры $\mathcal{F}_{\ge\tau_a}$, а также того, что $-\tilde{W}_t$ тоже является винеровским процессом. Для обоснования приблизим τ_a марковскими моментами $\tau^{(k)}$ со счетным числом значений $s_k, k \in \mathbb{N}$, как мы это сделали в предыдущей теореме. Положим, $W_t^* = W_{t+\tau^{(k)}} - W_{\tau^{(k)}}$ Имеем:

$$P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, -W^*_{t_{i+1}-\tau^{(k)}} \in A_{i+1} - a, \cdots, -W^*_{t_n-\tau^{(k)}} \in A_n - a, t_i < \tau^{(k)} < t_{i+1})$$
$$= \sum_{t_i<s_k<t_{i+1}} P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, -W^*_{t_{i+1}-s_k} \in A_{i+1} - a, \cdots, -W^*_{t_n-s_k} \in A_n - a, \tau^{(k)} = s_k)$$
$$= \sum_{t_i<s_k<t_{i+1}} P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, -(W_{t_{i+1}} - W_{s_k}) \in A_{i+1} - a, \cdots, -(W_{t_n} - W_{s_k}) \in A_n - a, \tau^{(k)} = s_k)$$
$$= \sum_{t_i<s_k<t_{i+1}} P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, \tau^{(k)} = s_k) P(-(W_{t_{i+1}} - W_{s_k}) \in A_{i+1} - a, \cdots, -(W_{t_n} - W_{s_k}) \in A_n - a)$$
$$= \sum_{t_i<s_k<t_{i+1}} P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, \tau^{(k)} = s_k) P(W_{t_{i+1}} - W_{s_k} \in A_{i+1} - a, \cdots, W_{t_n} - W_{s_k} \in A_n - a).$$

В последнем равенстве мы использовали симметричность винеровского процесса. Проделав все эти шаги в обратном порядке еще раз, мы получим, что исследуемая величина равна

$$P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, W^*_{t_{i+1}-\tau^{(k)}} \in A_{i+1} - a, \cdots, W^*_{t_n-\tau^{(k)}} \in A_n - a, t_i < \tau^{(k)} < t_{i+1}).$$

Переходя к пределу, получаем

$$P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, -\tilde{W}_{t_{i+1}-\tau_a} \in A_{i+1} - a, \cdots, -\tilde{W}_{t_n-\tau_a} \in A_n - a, t_i < \tau_a < t_{i+1})$$
$$= P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, \tilde{W}_{t_{i+1}-\tau_a} \in A_{i+1} - a, \cdots, \tilde{W}_{t_n-\tau_a} \in A_n - a, t_i < \tau_a < t_{i+1}).$$

Заметим, что $\tilde{W}_{t_k-\tau_a} = W_{t_k} - W_{\tau_a} = W_{t_k} - a$. Поэтому

$$P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, \tilde{W}_{t_{i+1}-\tau_a} \in A_{i+1} - a, \cdots, \tilde{W}_{t_n-\tau_a} \in A_n - a, t_i < \tau_a < t_{i+1})$$
$$= P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, W_{t_{i+1}} \in A_{i+1}, \cdots, \tilde{W}_{t_n} \in A_n, t_i < \tau_a < t_{i+1}).$$

Возвращаясь к самому первому равенству, получаем

$$P(B_{t_1} \in A_1, \cdots, B_{t_n} \in A_n)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} P(B_{t_1} \in A_1, \cdots, B_{t_n} \in A_n, t_i < \tau_a < t_{i+1})$$
$$= \sum_{i=0}^{n} P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, W_{t_{i+1}} \in A_{i+1}, \cdots, W_{t_n} \in A_n, t_i < \tau_a < t_{i+1})$$
$$= P(W_{t_1} \in A_1, \cdots, W_{t_i} \in A_i, W_{t_{i+1}} \in A_{i+1}, \cdots, W_{t_n} \in A_n).$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 3.3. *(Распределение максимума) Положим* $S_t = \sup_{s\in[0,t]} W_s$. *Тогда*

$$P(S_t \le a) = P(|W_t| \le a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx.$$

Доказательство.

$$P(S_t \ge a) = P(S_t \ge a, W_t < a) + P(W_t \ge a).$$

Заметим, что $W_{\tau_a} = a$. Далее, в силу сильного марковского свойства

$$P(S_t \ge a, W_t < a) = P(\tau_a \le t, W_{\tau_a+(t-\tau_a)} - W_{\tau_a} < 0) = \int_0^t P(W_{s+(t-s)} - W_s < 0 | \tau_a = s)\, dF_{\tau_a}(s)$$

Далее, заметим, что $W_t - W_s$ не зависит от $\mathcal{F}_s$ при $s \in [0,t]$, а с.в. τ_a — марковский момент. Следовательно, $\{\tau_a \le s\} \in \mathcal{F}_s$ и $P(W_{s+(t-s)} - W_s < 0 | \tau_a = s) = P(W_{s+(t-s)} - W_s < 0)$. Так как $P(W_{s+(t-s)} - W_s < 0) = 1/2$, последняя величина равна

$$\frac{1}{2}\int_0^t dF_{\tau_a}(s) = \frac{1}{2}P(S_t \ge a).$$

Отсюда следует, что $P(S_t \ge a) = 2P(W_t \ge a) = P(|W_t| \ge a)$. □

Уравнение теплопроводности

Далее мы кратко обсудим очень важную для всего дальнейшего курса связь винеровского процесса с уравнениями в частных производных.

Теорема 3.4. *Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная вместе со своими производными до порядка 2 включительно. Тогда функция*

$$u(t,x) = \mathbb{E}(f(x+W_t))$$

является решением уравнения теплопроводности (heat equation)

$$u_t = \frac{1}{2}u_{xx} \tag{3}$$

с начальным условием $u(0,x) = f(x)$.

Теорема 3.5. *Пусть τ — марковский момент, $\mathbb{E}\tau < \infty$, $f(t,x)$ — дважды по x и один раз по t непрерывно дифференцируемая функция, причем f_t, f_{xx} равномерно ограничены. Тогда выполнено соотношение*

$$\mathbb{E}f(\tau, x+W_\tau) = f(0,x) + \mathbb{E}\Big(\int_0^\tau Lf(s, x+W_s)\, ds\Big),$$

где $Lf = f_t + \frac{1}{2}f_{xx}$.

Занятие 3

1) Найти плотность распределения марковского момента $\tau_a = \inf\{t : W_t \ge a\}$. Докажите, что $P(\tau_a < \infty) = 1$, но $\mathbb{E}\tau_a = \infty$.
2) Пусть τ — марковский момент. Доказать, что для любого $t \ge 0$ с.в. τ и $W_{\tau+t} - W_\tau$ независимы.
3) Используя принцип отражения, докажите, что плотность распределения случайного вектора $(\sup_{t\le T} W_t, W_T)$ равна
$$p(x,y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}T}(2x-y)\exp\Big(-\frac{1}{2T}(2x-y)^2\Big)$$
для $x \ge \max(0,y)$ и $P(x,y) = 0$, $x \le \max(0,y)$.
4) Пусть τ, σ — ограниченные марковские моменты с конечным числом значений. Докажите, что $\mathbb{E}W_\tau = 0$, $\mathbb{E}\big(W_\tau W_\sigma\big) = \mathbb{E}(\tau \wedge \sigma)$. Указание: для момента $\tau = \sum_{k=1}^n \tau_k I_{\tau=\tau_k}$ используйте представление $W_\tau = \sum_{k=1}^{n-1}(W_{\tau_k} - W_{\tau_{k+1}})I_{\tau\le\tau_k} + W_{\tau_n}$.
5) Приведите пример, показывающий, что $\mathbb{E}W_\tau$ может быть не равно нулю для неограниченных моментов.
6*) Пусть τ_t — первый момент достижения винеровским процессом точки $t > 0$. Используя сильное марковское свойство, доказать, что 1) распределение $\tau_a - \tau_b$, $a > b$ совпадает с τ_{a-b}, 2) $t \to \tau_t$ — процесс с независимыми приращениями.
7) Докажите теорему 3.4.
8) Используя марковское свойство, доказать, что оператор $P_t f = \mathbb{E}f(x+W_t)$ является полугруппой, т.е.
$$P_{t+s}f = P_t(P_s(f)).$$
9) Используя теорему 3.5 докажите, что для любого марковского момента τ с $\mathbb{E}\tau < \infty$ выполнено $\mathbb{E}(W_\tau) = 0$, $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$.

10) Пусть τ — первый момент выхода W_t из интервала (a,b), $a<0, b>0$. С помощью теоремы 3.5 найдите
$$P(\tau = a), \quad P(\tau=b), \quad \mathbb{E}\tau.$$
Указание: следуя доказательству теоремы 3.5 покажите, что теорема применима к функции $e^{-\lambda t}(a-x)(x-b), \lambda>0$. Покажите, что $\mathbb{E}\tau \le a|b|$ и перейдите к пределу $\lambda \to 0$.

4. Уравнение теплопроводности (продолжение). Пуассоновский процесс.

Доказательство. (Теорема 3.4) Соотношение $u_t = \frac{1}{2}u_{xx}$ следует из явного представления
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)e^{-\frac{y^2}{2t}}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)p_t(y)\, dy,$$
где
$$p_t(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}.$$
Явные выкладки показывают, что
$$\frac{d}{dt}p_t = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}p_t, \quad t\neq 0.$$
Дифференцируя интеграл по параметру и интегрируя по частям, получаем
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(x,t) &= \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)p_t(y)\, dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}p_t(y)\, dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x+y)p_t(y)\, dy\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x+y)p_t(y)\, dy = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)p_t(y)\, dy = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x).\end{aligned}$$
Далее, $u(0,x) = \lim_{t\to 0}u(t,x) = \lim_{t\to 0}\mathbb{E}(f(x+W_t)) = \mathbb{E}(f(x)) = f(x)$ (последнее соотношение также следует из слабой сходимости $p_t(y)dy \to \delta_0$, $t\to 0$).

Для $t=0$ надо воспользоваться соотношением
$$\frac{d}{dt}u(t,x)|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{u(t,x)-u(0,x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int \big(f(x+y)-f(x)\big)p_t(y)\, dy = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\big(f(x+\sqrt{t}y)-f(x)\big)p_1(y)\, dy.$$
Далее, заметим, что $\int yp_1(y)\, dy = 0$, поэтому
$$\frac{d}{dt}u(t,x)|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\big(f(x+\sqrt{t}y)-f(x)-\sqrt{t}f'(x)y\big)p_1(y)\, dy = \int\frac{1}{2}f_{xx}(x)y^2p_1(y)\, dy = \frac{1}{2}f_{xx}(x).$$
□

Доказательство. (Теорема 3.5)

Теорема будет доказана при дополнительном ограничении $\sup_{x,t}|f(x,t)|<C$.

Сначала докажем, что
$$f(0,x) = -\mathbb{E}\Big(\int_0^{\infty} Lf(s,x+W_s)\, ds\Big). \tag{4}$$
Предположим дополнительно, что $\lim_{t\to\infty}\sup_x|f(t,x)| = 0$ и $\tau < T$. Применим формулу интегрирования по частям и соотношение $\frac{d}{dt}p_t = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}p_t$:
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}f(s,x+y)p_s(y)\, dy &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2}{dy^2}f(s,x+y)p_s(y)\, dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(s,x+y)\frac{d^2}{dy^2}p_s(y)\, dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(s,x+y)\frac{d}{ds}p_s(y)\, dy.\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty Lf(s,x+y)p_s(y)\ dy\ ds = \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{d}{ds} f(s,x+y)p_s(y)\ dy\ ds + \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{d^2}{dx^2} f(s,x+y)p_s(y)\ dy\ ds \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{d}{ds} f(s,x+y)p_s(y)\ dy\ ds + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(s,x+y)\frac{d}{ds} p_s(y)\ dy\ ds \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{d}{ds}\big(f(s,x+y)p_s(y)\big)\ dy\ ds.
\end{aligned}$$

Заметим, что в силу предположения $\lim_{t\to\infty}\sup_x |f(t,x)| = 0$

$$\int_0^\infty \frac{d}{ds}\Big(f(s,x+y)p_s(y)\Big)\ ds = \lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^\infty f(t,x+y)p_t(y)\ dy - \lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^\infty f(t,x+y)p_t(y)\ dy = -f(0,x).$$

Мы получаем (4). Следовательно,

$$f(0,x) = -\mathbb{E}\Big(\int_0^\tau Lf(s,x+W_s)\ ds\Big) - \mathbb{E}\Big(\int_\tau^\infty Lf(s,x+W_s)\ ds\Big).$$

Для вычисления $\mathbb{E}\Big(\int_\tau^\infty Lf(s,x+W_s)\ ds\Big)$ воспользуемся сильным марковским свойством

$$\mathbb{E}\Big(\int_\tau^\infty Lf(s,x+W_s)\ ds\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^\infty Lf(t+\tau,x+W_{t+\tau})\ ds\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^\infty Lf(t+\tau,x+W_\tau+B_t)\ dt\Big),$$

где $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$. Так как B_t — независимый от W_τ марковский процесс, то в силу (4)

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^\infty Lf(t+\tau,x+W_\tau+B_t)\ ds\Big) = -\mathbb{E}f(\tau,x+W_\tau).$$

Получаем искомое тождество $\mathbb{E}f(\tau,x+W_\tau) = f(0,x) + \mathbb{E}\Big(\int_0^\tau Lf(s,x+W_s)\ ds\Big)$.

Предположим теперь, что с f снято ограничение $\lim_{t\to\infty}\sup_x |f(t,x)| = 0$. Приблизим f функциями $f_\varepsilon = fe^{-\varepsilon(t+x^2)}$. Для этих функций выполнено (4), кроме того, $f_\varepsilon \to f$, $Lf_\varepsilon \to Lf$ поточечно при $\varepsilon \to 0$. В силу равномерной ограниченности $f, |Lf_\varepsilon|$, получаем, что $\mathbb{E}\Big(\int_0^\tau Lf_\varepsilon(s,x+W_s)\ ds\Big) \to \mathbb{E}\Big(\int_0^\tau Lf(s,x+W_s)\ ds\Big)$ и $\mathbb{E}f(\tau,x+W_\tau) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}f_\varepsilon(\tau,x+W_\tau)$ по теореме Лебега. Следовательно, (4) выполнено для f.

Для устранения ограничения $\tau < T$ приблизим τ моментами $\tau_n = \tau \wedge n$. Для доказательства достаточно установить соотношения $\lim_n \mathbb{E}\Big(\int_0^{\tau_n} Lf(s,x+W_s)\ ds\Big) = \mathbb{E}\Big(\int_0^\tau Lf(s,x+W_s)\ ds\Big)$ и $\mathbb{E}f(\tau,x+W_\tau) = \lim_n \mathbb{E}f(\tau_n,x+W_{\tau_n})$. В силу непрерывности траекторий W_t и функций f, Lf (а также ограниченности Lf) $f(\tau_n,x+W_{\tau_n}) \to f(\tau,x+W_\tau)$ и $\int_0^{\tau_n} Lf(s,x+W_s)ds \to \int_0^\tau Lf(s,x+W_s)ds$ почти всюду. Для перехода под знаком математического ожилания воспользуемся теоремой Лебега, оценкой $\Big|\int_0^{\tau_n} Lf(s,x+W_s)\ ds\Big| \le \sup(Lf)\cdot(\tau\wedge n) \le \sup(Lf)\cdot\tau$ и условием $\mathbb{E}\tau < \infty$. □

Замечание 4.1. *Уравнение теплопроводности является линенйым параболическим уравнением в частных производных второго порядка. Функция $p_t(x)$ называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности. Теорема 3.5 иногда упоминается в литературе как формула Дынкина.*

Уравнение теплопроводности допускает естественную интерпретацию как описание распространения тепла в телах и процесса диффузии (другое название (3) — уравнение диффузии).

Рассмотрим узкий длинный цилиндр, направленный вдоль оси x, с жидкостью и взвесью мелких частиц в ней, движущимся согласно закону винеровского процесса. Пусть $f(x,t)\Delta x$ — число частиц, заключенных в участке цилиндра между x и $x+\Delta x$ (f можно интерпретировать как плотность) в момент t. Число частиц в этом участке через малый период времени Δt равно

$$f(x,t+\Delta t)\Delta x = \Delta x\int_{-\infty}^\infty f(x-s,t)p_{\Delta t}(s)ds.$$

Действительно, это следует из того, что частица, находящаяся на расстоянии s от $[x,x+\Delta x]$, попадает туда через промежуток времени Δt с вероятностью $\approx \Delta x\cdot p_{\Delta t}(s)$. Усредняя по вероятности, получаем среднее число частиц. Разлагая в ряд по t выражение в левой части и в ряд по x выражение в правой части, получаем

$$f(x,t)+\Delta t f_t(t,x)+\cdots=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(f(x,t)-sf_x(x,t)+\frac{1}{2}s^2f_{xx}(x,t)+\cdots\Big)p_{\Delta t}(s)ds.$$

Принимая во внимание, что $\int_{-\infty}^{\infty} sp_{\Delta t}(s)ds=0$, $\int_{-\infty}^{\infty} s^2p_{\Delta t}(s)ds=\Delta t$, получаем искомое уравнение $f_t(t,x)=\frac{1}{2}f_{xx}(t,x)$.

Пуассоновский процесс

Пуассоновским процессом π_t с параметром λ на $[0,\infty)$ (называемом интенсивностью) будем называть такой процесс с независимыми приращениями и непрерывными справа траекториями, что $\pi_t-\pi_s, s<t$ имеет распределения Пуассона с параметром $\lambda(t-s)$, $\pi_0=0$.

Пуассоновский процесс является дискретным. Его траектории представялют собой возрастающие скачками функции. Пуассоновский процесс используется для моделирования различных явлений с дискретной природой. Классическое приложение пуассоновского процесса: π_t равно числу телефонных звонков, поступивших на телефонную станцию до момента времени t.

Для построения пуассоновского процесса используется относительно простая конструкция. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных показательных величин X_k. Положим $T_n=\sum_{k=1}^n X_i$. Напомним (см. 1-й модуль), что T_n обладает плотностью распределения

$$I_{[0,\infty)}(t)\frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}.$$

Теорема 4.2. *Положим:*

$$\pi_t=\max\{n:T_n\le t\}.$$

Тогда π_t — пуассоновский процесс с параметром λ

Доказательство. Для доказательства достаточно явно найти распределение случайного вектора

$$(\pi_{t_1},\pi_{t_2}-\pi_{t_1},\cdots,\pi_{t_n}-\pi_{t_{n-1}}),\quad t_1<t_2<\cdots<t_n.$$

Остальные свойства очевидны.

Шаг 1. Докажем сначала, что π_t имеет пуассоновское распределение. Заметим, что $P(\pi_t\ge k)=P(T_k\le t)$. Поэтому

$$P(\pi_t=k)=P(T_k\le t)-P(T_{k+1}\le t)=\int_0^t\frac{\lambda^k s^{k-1}}{(k-1)!}ds-\int_0^t\frac{\lambda^{k+1}s^k}{k!}ds=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}.$$

Шаг 2. Условная плотность случайного вектора $T=(T_1,\cdots,T_k)$ при условии $\pi_t=k$ равна

$$f_T(t_1,\cdots,t_k|\pi_t=k)=\frac{k!}{t^k};\quad 0<t_1<t_2\cdots<t_k\le t.$$

В силу независимости и экспоненциальной распределенности получаем, что $(X_1,\cdots,X_{k+1})$ имеет распределение

$$\lambda^{k+1}e^{-(x_1+\cdots+x_{k+1})}.$$

Из соотношения $T_k=\sum_{i=1}^k\xi_i$ получаем, что распределение $(T_1,\cdots,T_{k+1})$ получается из распределения $(X_1,\cdots,X_{k+1})$ линейным преобразованием (с единичным определителем), следовательно

$$f_T(t_1,\cdots,t_{k+1})=\lambda^{k+1}e^{-\lambda t_{k+1}}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}P(T_1<t_1,\cdots,T_k\le t_k,\pi_t=k)&=P(0<T_1<t_1<\cdots<T_k<t_k<t<T_{k+1})\\&=\lambda^{k+1}\int_0^{t_1}\int_{t_1}^{t_2}\cdots\int_t^{\infty}e^{-\lambda t_{k+1}}\,dt_1\cdots dt_{k+1}=\\&=\lambda^k t_1(t_2-t_1)\cdots(t_k-t_{k-1})e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Тогда

$$P(T_1<t_1,\cdots,T_k\le t_k|\pi_t=k)=t_1(t_2-t_1)\cdots(t_k-t_{k-1})\frac{k!}{t^k}. \tag{5}$$

Искомое свойство получается при дифференцировании этой формулы.

Замечание 4.3. *Отметим, что условное распределение T является равномерным (нормализованной мерой Лебега) на симплексе*
$$0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le t.$$
Эту меру полезно представлять как образ равномерной меры на кубе $0 \le t_i \le t$ при отождествлении точек $x \sim y$, для которых
$$(x_1, \cdots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)}) = (y_1, \cdots, y_n)$$
для некоторой перестановки π.

Шаг 3. Найдем
$$P(\pi_{t_1} = k_1, \pi_{t_2} - \pi_{t_1} = k_2, \cdots, \pi_{t_n} - \pi_{t_{n-1}} = k_n).$$
Искомая вероятность равна (см. Шаг 1)
$$\begin{aligned} &P(\pi_{t_1} = k_1, \pi_{t_2} = k_1 + k_2, \cdots, \pi_{t_n} = k_1 + \cdots + k_n) \\ &\quad = P(\pi_{t_1} = k_1, \pi_{t_2} = k_1 + k_2, \cdots, \pi_{t_{n-1}} = k_1 + \cdots + k_{n-1} | \pi_{t_n} = k_1 + \cdots + k_n) P(\pi_{t_n} = k_1 + \cdots + k_n) \\ &\quad = P(T_{i_1} \le t_1, t_1 < T_{i_2} \le t_2, \cdots, t_{n-1} < T_{i_n} \le t_n | \pi_{t_n} = k_1 + \cdots + k_n) \frac{e^{-\lambda t_n}}{(k_1 + \cdots + k_n)!} t_n^{k_1 + \cdots + k_n}, \end{aligned}$$
где
$$i_m = \sum_{j=1}^{m} k_j.$$

Упражнение 4.4. *Используя замечание 4.3) докажите, что условная вероятность $P(T_{i_1} \le t_1, t_1 < T_{i_2} \le t_2, \cdots, t_{n-1} < T_{i_n} \le t_n | \pi_{t_n} = k_1 + \cdots + k_n)$ равна*
$$\Big(\frac{(t_1)^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{(t_2 - t_1)^{k_2}}{k_2!} \cdot \frac{(t_n - t_{n-1})^{k_n}}{k_n!} \Big) \frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{t_n^{k_1 + \cdots + k_n}}.$$

Таким образом, искомая вероятность $P(\pi_{t_1} = k_1, \pi_{t_2} - \pi_{t_1} = k_2, \cdots, \pi_{t_n} - \pi_{t_{n-1}} = k_n)$ равна
$$\begin{aligned} &\Big(\frac{(t_1)^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{(t_2 - t_1)^{k_2}}{k_2!} \cdot \frac{(t_n - t_{n-1})^{k_n}}{k_n!} \Big) e^{-\lambda t_n} (\lambda)^{k_1 + \cdots + k_n} \\ &= \frac{(\lambda t_1)^{k_1} e^{-\lambda t_1}}{k_1!} \cdot \frac{(\lambda (t_2 - t_1))^{k_2} e^{-\lambda (t_2 - t_1)}}{k_2!} \cdot \frac{(\lambda (t_n - t_{n-1}))^{k_n} e^{-\lambda (t_n - t_{n-1})}}{k_n!}. \end{aligned}$$
Отсюда следует, что приращения π_t независимы и имеют пуассоновское распределение. □

Занятие 4

1) Для ограниченного марковского момента τ докажите, что
$$\mathbb{E}(e^{W_\tau - \frac{\tau}{2}}) = 1$$
(используйте теорему 3.5).
2) Пусть τ — первый момент выхода $W_t + ct$ из интервала (a, b), $a < 0, b > 0$. Найти
$$P(\tau = a), \quad P(\tau = b), \quad \mathbb{E}\tau.$$
3) С помощью теоремы 3.5 найти распределение максимума винеровского процесса на отрезке $[0, t]$. Указание: примените теорему 3.5 к функции
$$F(s, x) = 2 \int_{x - x_0}^{\infty} p_{t-s}(y)\, dy - 1, \quad p_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}}.$$
Докажите, что $F(s, x_0) = 0, F(t, x) = 1, F_t + \frac{1}{2} F_{xx} = 0$.
4*) Положим $M = \sup_{0 < t \le T} W_t$, $\quad m = \inf_{0 < t \le T} W_t$. Доказать, что совместная плотность распределения (M, m) задается формулой
$$\frac{2}{T\sqrt{2\pi T}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k k(k-1) \big(ky + (1-k)x\big) e^{\frac{-(ky + (1-k)x)^2}{2T}} \tag{6}$$
при $x < 0$, $y > 0$ и равна нулю при других значениях x, y (запишите искомую вероятность как решение некоторого уравнения в частных производных и используйте ряды Фурье для построения решения).

5*) Из предыдущей задачи вывести, что плотность распределения $M - m$ имееет вид $F(e^{-\frac{t^2}{2T}})$, где F — функция, определенная на отрезке $[0,1]$ следующим образом:

$$F(x) = x - 4x^4 + 9x^9 - 16x^{16} + \cdots + (-1)^{n+1} n^2 x^{n^2} + \cdots$$

если $0 \le x < 1$ и $F(1) = 0$.

6) (Устойчивые распределения). Используя теорему 3.5 найти характеристическую функцию с.в. с плотностью $p_t = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}} I_{\{t>0\}}$. (Указание: используйте тот факт, что p_t — плотность распределения марковского момента $\tau_a = \inf\{t : W_t \ge a\}$).
7) Для пуассоновского процесса π_t найти $\mathbb{E}\tau_n$, где $\tau_n = \inf_t\{\pi_t \ge n\}$.
8) Пусть $N(t)$ — количество клиентов, появившихся в некоторой туристической фирме до момента t. Клиентов обслуживает один работник, длительность обслуживания для каждого клиента является случайной величиной, распределенной экспоненциально с параметром μ (с.в. независимы для разных клиентов). В момент $t = 0$ имеется один посетитель. Считая, что $N(t) - 1$ — пуассоновский процесс с параметром λ, доказать, что вероятность того, что следующий клиент придет до момента t и работник будет занят равна $\lambda(1 - e^{-(\lambda+\mu)})/(\lambda+\mu)$.
9) Число комаров, садящихся на жертву, является пуассоновским процессом с интенсивностью λ. Каждый комар кусает жертву с вероятностью p независимо от других. Доказать, что число укусов является пуассоновским процессом с интенсивностью $p\lambda$.

5. Стохастическое интегрирование.

Пусть $(W_t, \mathcal{F}_t)$ — винеровский процесс относительно потока $\mathcal{F}_t$. В этом разделе мы обсудим построение стохастического интеграла или интеграла Ито

$$\int_0^T f(t,\omega)\, dW_t$$

от случайных функций. Потребность в этом объекте возникает в различных задачах физики и техники.

Замечание 5.1. *Всюду далее будем предполагать, что все функции вида $f(t,\omega)$, $t \in [0,T], \omega \in \Omega$ измеримы относительно пополнения σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}$ по мере $\lambda \times P$, где λ — мера Лебега на отрезке $[0,T]$.*

В частности, для таких функций определены двойные интегралы $\int_{[0,T]\times\Omega} f(s,\omega)\, ds\, dP$ по произведению мер $\lambda \times P$. По теореме Фубини такие интегралы сводятся к повторным интегралам вида $\mathbb{E}\int_0^T f(t,\omega)\, dt$.

Впервые интегралы такого вида появились в работе Винера, Пэли и Зигмунда (1933). Там они были определены для неслучайных дифференцируемых функций путем интегрирования по частям

$$\int_0^T f(s)\, dW_s = f(T)W_T - \int_0^T f'(s) W_s\, ds.$$

В более сложной ситуации попытки определить стохастический интеграл для каждой фиксированной траектории наталкиваются на трудность, связанную с тем, что почти все траектории $W_t(\omega)$ имеют бесконечные вариации на отрезке. Поэтому конструкция стохастического интеграла (К. Ито, 1942) осуществляется совершенно другим путем.

Шаг 1. Стохастический интеграл для простых функций.

Простой функцией будем считать функции вида

$$f(t,\omega) = \sum_{k=0}^{n} f_k(\omega) I_{(t_k,t_{k+1}]}, \tag{7}$$

где $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = T$ — разбиение отрезка $[0,T]$, а каждая с.в. f_k измерима относительно $\mathcal{F}_{t_k}$ и обладает конечным вторым моментом $\mathbb{E}f_k^2 < \infty$.

Замечание 5.2. *Дополнительное условие измеримости f_k относительно $\mathcal{F}_{t_k}$ существенно отличает понятие простой функции в смысле, указанном выше, от стандартного понятия ступенчатой функции, известного из анализа.*

Пример 5.3. *Функция $\sum_{i=0}^n W_{t_k} I_{(t_k,t_{k+1}]}$ — простая, а $\sum_{i=0}^n W_{t_{k+1}} I_{(t_k,t_{k+1}]}$ — нет.*

Для простых функций положим:

$$\int_0^t f(s,\omega)\ ds = \sum_{i=0}^n f_k(\omega)(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

Лемма 5.4. *(Изометрия стохастического интеграла). Для любой простой функции f*

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T f(t,\omega)\ dW_t\Big)^2 = \mathbb{E}\Big[\int_0^T f^2(t,\omega)dt\Big].$$

Доказательство.

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T f(t,\omega)\ dW_t\Big)^2 = \sum_{i,j}\mathbb{E}\Big(f_i f_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\Big)$$

Несложно видеть, что для $i < j$

$$\mathbb{E}\Big(f_i f_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \mathbb{E}\Big[\Big(f_i f_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_t})\Big]\mathbb{E}\Big(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\Big) = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\int_0^T f(t,\omega)\ dW_t\Big)^2 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(f_i^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(f_i^2)\mathbb{E}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \\ &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^n f_i^2(t_{i+1} - t_i)\Big) = \mathbb{E}\Big[\int_0^T f^2(t,\omega)dt\Big].\end{aligned}$$

□

В частности, для пары простых функций f, g

$$\mathbb{E}\big(\int_0^T f(t,\omega)\ dW_t \cdot \int_0^T g(t,\omega)\ dW_t\big) = \mathbb{E}\int_0^T fg\ dt,$$

$$\mathbb{E}\big(\int_0^T f(t,\omega)\ dW_t - \int_0^T g(t,\omega)\ dW_t\big)^2 = \mathbb{E}\int_0^T (f-g)^2\ dt.$$

Из последнего равенства следует, что определение интеграла от простой функции не зависит от способа ее представления в виде (7).

Замечание 5.5. *Нетрудно убедиться, что стохастический интеграл линеен: $\int_0^T (c_1 f + c_2 g)\ dW_t = c_1\int_0^T f\ dW_t + c_2\int_0^T g\ dW_t$.*

Как мы видим, стохастический интеграл является линейным изометрическим оператором из пространства простых функций, наделенных скалярным произведением $(f,g) \to \mathbb{E}(\int_0^T fg\ dt)$, в гильбертово пространство $L^2(P)$ случайных величин с конечным вторым моментом и скалярным произведением $(f,g) \to \mathbb{E}(fg)$. Поэтому стохастический интеграл естественно продолжить на пополнение простых функций по норме $f \to \Big(\mathbb{E}(\int_0^T f^2\ dt)\Big)^{1/2}$, т.е.

$$\int_0^T f\ dW_t = \lim_{n\to\infty}\int_0^T f_n\ dW_t,$$

где $\{f_n\}$ — такая последовательность простых функций, т.ч. $\lim_n \mathbb{E}\int_0^T \big(f_n - f\big)^2 dt = 0$. Свойство изометричности стохастического интеграла обеспечивает корректность этого определения.

Таким образом, мы определили стохастический интеграл на пополнении $N(0,T)$ простых функций по норме $f \to \Big(\mathbb{E}(\int_0^T f^2\ dt)\Big)^{1/2}$. Очевидно, функции из $N(0,T)$

1) измеримы в смысле замечания 5.1.

2) обладают свойством

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T f^2\ dt\Big) < \infty.$$

Нетрудно видеть,что функции из $N(0,T)$ обладают дополнительным важным свойством:

3) Функции из $N(0,T)$ эквивалентны (по мере $\lambda \times P$) предсказуемым функциями.

Определение 5.6. *$f(t,\omega)$ называется предсказуемой случайной функцией, если она измерима относительно σ-алгебры, порожденной множествами вида $([0,T]\cap B)\times F$, где B — борелевское подмножество множества (t,∞), а $F\subset\mathcal{F}_t$.*

Последнее свойство следует из предсказуемости простых функций.

Существует простой достаточный признак приднадлежности $N(0,T)$.

Теорема 5.7. *Пусть функция $f(t,\omega)$ удовлетворяет свойствам 1)-2) и измерима относительно $\mathcal{F}_t$ при любом $t\in[0,T]$. Тогда $f\in N(0,T)$.*

Доказательство. Достаточно построить последовательность простых функций $f_n\to f$ в $L^2(P)$. Предположим сначала, что f ограничена и имеет непрерывные траектории $t\to f(t,\omega)$ для любого $\omega\in\Omega$. Положим:

$$f_n(t,\omega)=\sum_j f(t_j,\omega)(t_j,t_{j+1}].$$

Очевидно, функция f_n простая. В силу непрерывности путей $t\to f(t,\omega)$ имеем:

$$\sum_j\int_{t_j}^{t_{j+1}}\big(f(t_j,\omega)-f(t,\omega)\big)^2dt\to 0.$$

В силу ограниченности функции f имеем: $\mathbb{E}\Big(\sum_j\int_{t_j}^{t_{j+1}}\big(f(t_j,\omega)-f(t,\omega)\big)^2dt\Big)\to 0$ по теореме Лебега.

Предположим теперь, что f ограничена. В силу предыдущего шага достаточно приблизить f случайными функциями с непрерывными траекториями. Для этого рассмотрим такую гладкую неотрицательную функцию φ, что $\varphi=0$ на $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$ и $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)\ dx=1$. Положим $\varphi_n=n\varphi(nx)$ и

$$f_n(t,\omega)=\int_0^T\varphi_n(s-t)f(s,\omega)\ ds=\int_0^t\varphi_n(s-t)f(s,\omega)\ ds.$$

Случайная функция f_n обладает непрерывными траекториями, ограничена и, очевидно, измерима относительно $\mathcal{F}_t$ при фиксированном t (для доказательства этого воспользуйтесь стандартным определением интеграла Лебега как предела сумм). Поэтому f_n интегрируема согласно предыдущему шагу. Далее, как хорошо известно из анализа (см, например, [1], 1-й т., теорема 4.2.4), $\int_0^T(f_n(s)-f(s))^pds\to 0$ для всех $p\geq 1$ (в частности, для $p=2$). Опять в силу теоремы Лебега (используем ограниченность f и оценку $|\int_0^T g dx|\leq\sup_{[0,T]}g\cdot T$), имеем: $\mathbb{E}\int_0^T(f_n(s)-f(s))^2ds\to 0$. Таким образом, теорема доказана для ограниченных функций.

На последнем этапе приблизим произвольную функцию $f\in N([0,T])$ ограниченными функциями $f_n=I_{\{|f|<n\}}\cdot f+n\cdot I_{\{f\geq n\}}-nI_{\{f\leq -n\}}$. Сходимость $f_n\to f$ в $L^2(P)$ следует из теоремы Лебега, так как $|f_n|\leq f$. □

Пример 5.8.

$$\int_0^t W_s\ dW_s=\frac{1}{2}W_t^2-\frac{1}{2}t.$$

Доказательство. Для любого разбиения $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ имеем:

$$\begin{aligned}W_{t_n}^2&=(W_{t_n}-W_{t_{n-1}})^2+2W_{t_{n-1}}(W_{t_n}-W_{t_{n-1}})+W_{t_{n-1}}^2.\\&=(W_{t_n}-W_{t_{n-1}})^2+2W_{t_{n-1}}(W_{t_n}-W_{t_{n-1}})+(W_{t_{n-1}}-W_{t_{n-2}})^2+2W_{t_{n-2}}(W_{t_{n-1}}-W_{t_{n-2}})+W_{t_{n-2}}^2\\&=\cdots\\&=\sum_{i=1}^n(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})^2+2\sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}).\end{aligned}$$

При измельчении разбиения первая сумма, как мы видели, стремится в среднеквадратичном к t, в то время как вторая сумма сходится (по определению) к стохастическому интегралу $\int_0^t W_s\ dW_s$. Последний существует в силу предыдущей теоремы. В пределе получаем нужное равенство. □

6. Мартингалы. Неравенство Колмогорова. Стохастический интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ито.

Определение 6.1. *Пусть $\mathcal{F}_t$ — поток σ-алгебр. Случайный процесс $\{\xi_t\}$ с $\mathbb{E}|\xi_t| < \infty$ называется мартингалом относительно $\mathcal{F}_t$, если $\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_s) = \xi_s$, $s \le t$.*

Аналогично определяется мартингал с дискретным временем $\{\xi_n\}$: $\mathbb{E}(\xi_n|\mathcal{F}_m) = \xi_m$, $m \le n$.

Пример 6.2. *Процесс ξ_t с нулевым средним $\mathbb{E}\xi_t = 0$ и независимыми приращениями является мартингалом относительно потока σ-алгебр, порожденных ξ_t.*

Доказательство. $\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\xi_t - \xi_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(\xi_s|\mathcal{F}_s) = \xi_s + \mathbb{E}(\xi_t - \xi_s) = \xi_s$. □

Пример 6.3. *Пусть $(W_t, \mathcal{F}_t)$ — винеровский процесс. Тогда $W_t^2 - t$ — мартингал относительно $\mathcal{F}_t$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(W_t^2 - t|\mathcal{F}_s\Big) &= \mathbb{E}\big((W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s) + W_s^2|\mathcal{F}_s\Big) - t \\
&= \mathbb{E}(W_t - W_s)^2 + 2W_s\mathbb{E}\big((W_t - W_s)|\mathcal{F}_s\big) + W_s^2 - t \\
&= t - s + 2W_s\mathbb{E}(W_t - W_s) + W_s^2 - t = W_s^2 - s.
\end{aligned}$$

□

Определение 6.4. *Пусть $\mathcal{F}_t$ — поток σ-алгебр. Случайный процесс $\{\xi_t\}$ называется субмартингалом (супермартингалом) относительно $\mathcal{F}_t$, если $\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_s) \ge \xi_s$ ($\mathbb{E}(\xi_t|\mathcal{F}_s) \le \xi_s$), $s \le t$.*

Упражнение 6.5. *Докажите следующую эквивалентную формулировку: случайный процесс $\{\xi_t\}$ называется мартингалом (субмартингалом) относительно $\mathcal{F}_t$, если*

$$\mathbb{E}(\xi_t \cdot \eta) = \mathbb{E}(\xi_s \cdot \eta) \quad \Big(\mathbb{E}(\xi_t \cdot \eta) \ge \mathbb{E}(\xi_s \cdot \eta)\Big)$$

для любой неотрицательной ограниченной функции η, измеримой относительно $\mathcal{F}_s$.

Теорема 6.6. *Пусть f — выпуклая функция, ξ_t — мартингал. Тогда $f(\xi_t)$ — субмартингал, если $\mathbb{E}|f(\xi_t)| < \infty$.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в применении известного неравенства для выпуклых фунцкий

$$f(x) \ge f(y) + C(x - y),$$

выполненного для некоторой константы C, зависящей только от x. Если f — гладкая функция по x, то $C(x) = f'(x)$. В противном случае множество таких C содержит более одного элемента и образует так называемый субдифференциал функции f. В качестве C можно взять, например, правую производную f. Имеем:

$$f(\xi_t) \ge f(\xi_s) + C(\xi_s)(\xi_t - \xi_s).$$

Умножим неравенство на неотрицательную функцию η, измеримую относительно $\mathcal{F}_s$, и возьмем математическое ожидание от обеих частей:

$$\mathbb{E}\big(f(\xi_t)\eta\big) \ge \mathbb{E}\big(f(\xi_s)\eta\big) + \mathbb{E}\big(C(\xi_s)(\xi_t - \xi_s)\eta\big) = \mathbb{E}\big(f(\xi_s)\eta\big) + \mathbb{E}\big(C(\xi_s)\xi_t\eta\big) - \mathbb{E}\big(C(\xi_s)\xi_s\eta\big).$$

Далее, заметим, что $\mathbb{E}\big(C(\xi_s)\eta\xi_t\big) = \mathbb{E}\big(C(\xi_s)\eta\mathbb{E}(\xi_t|F_s)\big) = \mathbb{E}\big(C(\xi_s)\eta\xi_s\big)$ в силу того, что ξ_t — мартингал. Отсюда получаем искомое неравенство $\mathbb{E}\big(f(\xi_t)\eta\big) \ge \mathbb{E}\big(f(\xi_s)\eta\big)$.

В этом доказательстве есть пробел — мы неявно использовали интегрируемость функции $C(\xi_s)\xi_t\eta$. Для того, чтобы его устранить, можно дополнительно потребовать, чтобы $\eta C(\xi_s)$ было ограничено (например, взять $\eta = \varphi I_{A_N}$, где $A_N = \{|C(\xi_s)| \le N\}$). Тогда вычисления выше верны и мы получаем $\mathbb{E}\big(f(\xi_t)\varphi I_{A_N}\big) \ge \mathbb{E}\big(f(\xi_s)\varphi I_{A_N}\big)$. Переходя к пределу $N \to \infty$ и применяя теорему Лебега, получаем искомое соотношение $\mathbb{E}\big(f(\xi_t)\varphi\big) \ge \mathbb{E}\big(f(\xi_s)\varphi\big)$. □

Напомним, что марковским моментом τ называется неотрицательная с.в., обладающая свойством $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$. С каждым марковским моментом мы свяжем σ-алгебру $\mathcal{F}_\tau$. По определению, $A \in \mathcal{F}_\tau$, если $A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$.

Лемма 6.7. *Пусть τ — марковский момент с конечным числом значений $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, ξ_t — субмартингал. Выполнено неравенство*

$$\mathbb{E}\xi_{t_1} \leq \mathbb{E}\xi_\tau \leq \mathbb{E}\xi_{t_n}.$$

Доказательство. Имеем: $\mathbb{E}\xi_\tau = \sum_{t_k} \mathbb{E}(\xi_t I_{\{\tau=t_k\}}) = \mathbb{E}(\xi_{t_1}) - \mathbb{E}(\xi_{t_1} I_{\tau>t_1}) + \mathbb{E}(\xi_{t_2} I_{\tau>t_1}) - \mathbb{E}(\xi_{t_2} I_{\tau>t_2}) + \cdots + \mathbb{E}(\xi_{t_n} I_{\tau>t_{n-1}})$. Осталось заметить, что по определению субмартингала $\mathbb{E}(\xi_{t_2} I_{\tau>t_1}) \geq \mathbb{E}(\xi_{t_1} I_{\tau>t_1})$, следовательно $\mathbb{E}\xi_\tau \geq \mathbb{E}(\xi_{t_1})$. Второе неравенство доказывается аналогично □

Следствие 6.8. *1) Если τ — марковский момент с конечным числом значений $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, ξ_t — мартингал, то выполнено точное равенство*

$$\mathbb{E}\xi_{t_1} = \mathbb{E}\xi_\tau = \mathbb{E}\xi_{t_n}.$$

2) Если ξ_t — неотрицательный субмартингал, то

$$P(\sup_{1\leq k\leq n} \xi_{t_k} \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}\xi_{t_n}}{\varepsilon}.$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно, для доказательства второго заметим, что если $\tau = \min\{t_k : \xi_{t_k} \geq \varepsilon\}$ ($\tau = t_n$, если таких t_k нет), то согласно лемме 6.7 и неравенству Чебышева

$$P(\sup_{1\leq k\leq n} \xi_{t_k} \geq \varepsilon) = P(\xi_\tau \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(\xi_\tau)}{\varepsilon} \leq \frac{\mathbb{E}\xi_{t_n}}{\varepsilon}$$

□

Естественно предположить, что доказанные выше соотношения можно распространить на более общие типы марковских моментов. Это действительно можно сделать в предположении односторонней непрерывности траекторий процессов и ограничений на интегрируемость моментов. Следующая теорема является частным случаем так называемой optional stopping theorem или OS-теоремы. В доказательстве нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Задача 6.9. *Пусть η — с.в., $\mathbb{E}(|\eta|) < \infty$. Существует такая четная выпуклая функция $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, что $\mathbb{E}f(\eta) < \infty$, f возрастает на $[0, +\infty)$ и $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty$.*

Указание: воспользуйтесь тем, что $\mathbb{E}|\eta| < \infty$ равносильно условию $\sum_{n=0}^{\infty} nP(n \leq |\eta| < n+1) < \infty$.

Теорема 6.10. *Пусть ξ_t — мартингал с непрерывными справа траекториями, τ — марковский момент. Тогда соотношение*

$$\mathbb{E}\xi_\tau = \mathbb{E}\xi_0$$

имеет место, если $\tau \leq K$ п.н. для некоторого числа $K > 0$.

Доказательство. Как обычно, приблизим τ последовательностью марковских моментов с конечным числом значений $\tau_n = \max\Big[2^{-n}\big(1+[2^n\tau]\big), K\Big]$. Имеем $\mathbb{E}\xi_0 = \mathbb{E}\xi_{\tau_n}$. В силу непрерывности справа траекторий $\xi_{\tau_n} \to \xi_\tau$. Теорема будет доказана, если мы сможем перейти к пределу под знаком интеграла. Для этого нам достаточно доказать, что семейство с.в. $\{\xi_{\tau_n}\}$ *равномерно интегрируемо*, т.е.

$$\lim_{N\to\infty} \sup_n \mathbb{E}\big(|\xi_{\tau_n}| I_{|\xi_{\tau_n}|>N}\big) = 0.$$

Заметим сначала, что $|\xi_t|$ — субмартингал, поэтому в силу следствия 6.8

$$\sup_n P(|\xi_{\tau_n}| > N) \leq P(\sup_n |\xi_{\tau_n}| > N) \leq \frac{\mathbb{E}(|\xi_K|)}{N}.$$

Поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \sup_n P(|\xi_{\tau_n}| > N) = 0. \tag{8}$$

Согласно задаче 6.9, $\mathbb{E}f(\xi_K) < \infty$ для некоторой неотрицательной четной выпуклой функции f с $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty$. Процесс $f(\xi_t) = f(|\xi_t|)$ — субмартингал, поэтому в силу леммы 6.7

$$\mathbb{E}f(\xi_{\tau_n}) \leq \mathbb{E}f(\xi_K).$$

Далее, в силу неравенства Иенсена (примененного к вероятностной мере $\frac{1}{P(|\xi_{\tau_n}|>N)} I_{|\xi_{\tau_n}|>N} \cdot P$)

$$f\Big(\frac{\mathbb{E}\big(|\xi_{\tau_n}| I_{|\xi_{\tau_n}|>N}\big)}{P(|\xi_{\tau_n}| > N)}\Big) \leq \frac{\mathbb{E}\Big(f(|\xi_{\tau_n}|) I_{|\xi_{\tau_n}|>N}\Big)}{P(|\xi_{\tau_n}| > N)} \leq \frac{\mathbb{E}\Big(f(|\xi_{\tau_n}|)\Big)}{P(|\xi_{\tau_n}| > N)} \leq \frac{\mathbb{E}\big(f(|\xi_K|)\big)}{P(|\xi_{\tau_n}| > N)}.$$

В силу того, что f возрастает на $[0,+\infty)$, получаем

$$\mathbb{E}\big(|\xi_{\tau_n}|I_{|\xi_{\tau_n}|>N}\big) \le P(|\xi_{\tau_n}|>N)f^{-1}\Big(\frac{\mathbb{E}\big(f(|\xi_K|)\big)}{P(|\xi_{\tau_n}|>N)}\Big).$$

Заметим, что из условия $\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t}=+\infty$ следует, что $\lim_{x\to 0+} xf^{-1}(C/x) = C\lim_{y\to+\infty}\frac{f^{-1}(Cy)}{Cy} = C\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{f(t)}=0$. Поэтому, в силу (8).

$$\lim_{N\to\infty}\sup_n \mathbb{E}\big(|\xi_{\tau_n}|I_{|\xi_{\tau_n}|>N}\big)=0$$

Равномерная интегрируемость доказана.

Наконец, докажем, что из равномерной интегрируемости следует искомый предельный переход. Имеем:

$$\mathbb{E}\xi_{\tau_n} = \mathbb{E}(\xi_{\tau_n}I_{\{|\xi_{\tau_n}|\le N\}}) + \mathbb{E}(\xi_{\tau_n}I_{\{|\xi_{\tau_n}|>N\}}).$$

Пусть N таково, что $P(|\xi_\tau|=N)=0$. Тогда $\lim_n \mathbb{E}(\xi_{\tau_n}I_{|\xi_{\tau_n}|\le N}) \to \mathbb{E}(\xi_\tau I_{|\xi_\tau|\le N})$ по теореме о мажорированной сходимости. В силу равномерной интегрируемости $\lim_N\sup_n \mathbb{E}(|\xi_{\tau_n}|I_{|\xi_{\tau_n}|>N})=0$. Отсюда легко следует искомое соотношение $\lim_n \mathbb{E}\xi_{\tau_n} = \mathbb{E}\xi_\tau$. □

Следующее обобщение следствия 6.8 2) несложно и мы его опустим (см. микротеорему 7.3.5, [2]).

Теорема 6.11. *(Неравенство Колмогорова). Пусть ξ_t — неотрицательный субмартингал с непрерывными справа траекториями. Тогда $\forall\varepsilon>0$*

$$P(\sup_{t\in[0,T]}\xi_t\ge\varepsilon)\le\frac{\mathbb{E}\xi_T}{\varepsilon}.$$

Применим теперь полученные выше оценки к доказательству фундаментального факта: стохастический интеграл с переменным верхним пределом — мартингал.

Теорема 6.12. *Если $f\in N([0,T])$, то существует такая версия стохастического интеграла с переменным верхним пределом $\eta_t=\int_0^t f(s,\omega)\,dW_s$, что*

1) *η_t — мартингал*
2) *для п.в. ω траектории η_t непрерывны.*

Доказательство.

Упражнение 6.13. *Докажите, что теорема верна для простой функции.*

Приблизим теперь функцию f простыми $f=\lim_n f_n$ по $L^2([0,T]\times P)$-норме. Положим

$$I^{(n)}_t=\int_0^t f_n\,dW_t.$$

В силу упражнения $I^{(n)}_t$ — мартингал с непрерывными траекториями. По неравенству Колмогорова и свойству изометрии

$$P(\sup_{0\le t\le T}|I^{(n)}_t-I^{(m)}_t|>\varepsilon)\le\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}(|I^{(n)}_T-I^{(m)}_T|^2)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T(f_n-f_m)^2\,dt\to 0$$

при $n,m\to\infty$. Выберем теперь подпоследовательность (которую для простоты обозначим снова через $I^{(n)}_t$), удовлетворяющую неравенствам

$$P(\sup_{0\le t\le T}|I^{(n)}_t-I^{(n+1)}_t|>2^{-n})<2^{-n}.$$

По лемме Бореля-Кантелли

$$P(\sup_{0\le t\le T}|I^{(n)}_t-I^{(n+1)}_t|>2^{-n}\ \text{для бесконечного числа}\ n)=0.$$

Отсюда следует, что для п.в. ω существует $N(\omega)$, что

$$\sup_{0\le t\le T}|I^{(n)}_t-I^{(n+1)}_t|<2^{-n}$$

для всех $n>N(\omega)$. Следовательно, $I^{(n)}_t$ сходится равномерно на $[0,T]$ к случайной функции I_t для почти всех ω. Очевидно, I_t имеет непрерывные траектории. Кроме того, так как $I^{(n)}_t\to\int_0^t f_n\,dW_t$ в $L^2(P)$ для всех t, то I_t является версией $\int_0^t f_n\,dW_t$. То, что I_t является мартингалом, следует из того, что $I^{(n)}_t$ — мартингал и $L^2(P)$ сходимости $I^{(n)}_t\to I_t$. □

Стохастические дифференциалы и формула Ито

Рассмотрим теперь случайный процесс ξ_t, имеющий представление

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t f(\omega, s)\ dW_s + \int_0^t g(\omega, s)\ ds,\ t \in [0, T], ($$

где ξ_0 -с.в. Это соотношение удобно записывать в виде "стохастического дифференциала".

$$d\xi_t = f(\omega, t)\ dW_t + g(\omega, t)\ dt.$$

Замечание 6.14. *Всюду далее, даже если это специально не оговорено, мы будем считать, что f, g измеримы относительно $\mathcal{F}_t$ для любого фиксированного $t \in [0, T]$ и $\mathbb{E}(\int_0^t f^2(\omega, s)\ ds) < \infty, \mathbb{E}\int_0^t |g(s, \omega)|\ ds < \infty$*

Формула Ито является одним из важнейших технических инструментов стохастического анализа. Она выражает дифференциал функции от процесса через дифференциал исходного процесса. Доказательство мы здесь не приводим, оно есть во многих книгах (см., например, [9], Theorem 4.5).

Теорема 6.15. *(Формула Ито). Если $F(t, x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, то*

$$dF(t, \xi_t) = F_t dt + F_x d\xi_t + \frac{1}{2} F_{xx}(d\xi_t)^2 = \big(F_t + F_x g + \frac{1}{2} f^2 F_{xx}\big)dt + F_x f dW_t.$$

Замечание 6.16. *Поясним, в чем смысл этого соотношения. Интуитивно выражение dW_t можно понимать как $\sqrt{dt}$ (именно этот символ можно увидеть в некоторых книгах по физике и финансовой математике). По формуле Тейлора $F(t, \xi_t) = F(0, \xi_0) + F_t dt + F_x d\xi_t + \frac{1}{2} F_{xx}(d\xi_t)^2 + \cdots$. В ряду Тейлора нас интересуют только слагаемые порядка dt и более низкого порядка $\sqrt{dt}$. Они содержатся в выражениях $F_t dt$, $F_x d\xi_t$ и $\frac{1}{2} F_{xx}(d\xi_t)^2$. Последнее выражение равно*

$$\frac{1}{2} F_{xx}\big(f^2(dW_t)^2 + 2fg dW_t dt + g^2(dt)^2\big).$$

В силу соотношения $dW_t = \sqrt{dt}$ имеем: $f^2(dW_t)^2 = f^2 dt$, слагаемые $fg dW_t dt = fg(dt)^{3/2}$ и $g^2(dt)^2$ имеют более высокий порядок малости, поэтому мы их отбрасываем.

Замечание 6.17. *В формуле Ито неявно предполагается, что $\mathbb{E}\Big(\int_0^t F_x^2 f^2\ ds + \int_0^t |F_t + F_x g + \frac{1}{2} f^2 F_{xx}|\ ds\Big) < \infty$.*

Задачи о моменте остановки

Ниже мы рассмотрим несколько задач о времени выхода процесса за пределы интервала (a, b) и вероятности выхода из правого (левого) конца. Напомним, что подобная задача уже рассматривалась для винеровского процесса и для дискретного случайного блуждания (вероятность разорения и средняя продолжительность игры). Основным инстументом здесь будет OS-теорема.

Задача 6.18. *Найти $\mathbb{E}e^{-\lambda\tau_{a,b}}$, где $\lambda > 0$, $\tau_{a,b} = \inf\{t : W_t + bt \geq a\}$, $a > 0, b > 0$.*

Решение: Воспользуемся тем, что процесс $\xi_t = e^{\sqrt{2\mu}W_t - \mu t}$ является мартингалом. Действительно, по формуле Ито $d\xi_t = \sqrt{2\mu}\xi_t\ dW_t$ (убедитесь, что $\mathbb{E}\int_0^t \xi_s^2\ ds < \infty$!), поэтому $\xi_t = 1 + \sqrt{2\mu}\int_0^t \xi_s\ dW_s$ является мартингалом как стохастический интеграл.

Формально применим OS-теорему:

$$1 = \mathbb{E}\xi_{\tau_{a,b}} = \mathbb{E}\exp\big(\sqrt{2\mu}W_{\tau_{a,b}} - \mu\tau_{a,b}\big).$$

По определению $\tau_{a,b}$ имеем:

$$\sqrt{2\mu}W_{\tau_{a,b}} - \mu\tau_{a,b} = \sqrt{2\mu}a - (\sqrt{2\mu}b + \mu)\tau_{a,b}$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}\exp\big(-(\sqrt{2\mu}b + \mu)\tau_{a,b}\big) = e^{-\sqrt{2\mu}a}.$$

Положив $\lambda = \sqrt{2\mu}b + \mu$, легко находим ответ.

Теперь нам надо обосновать полученную формулу. Для этого достаточно показать две вещи: $\tau_{a,b} < \infty$ почти всюду и $\mathbb{E}\xi_{\tau_{a,b}} = 1$. Напомним, что OS-теорема применима к ограниченным моментам. Поэтому для строгого доказательства необходимо приблизить $\tau_{a,b}$ ограниченными моментами $\tau_n = \min(\tau, n)$. Для начала надо показать, что $P(\tau_{a,b} < \infty) = 0$. Оценим $P(\tau_{a,b} > t)$:

$$P(\tau_{a,b} > t) = P(\sup_{[0,t]}(W_s + bs) < a) \le P(W_t + bt < a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{a-bt} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a}{\sqrt{t}}-b\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Очевидно, $\lim_{t\to\infty} P(\tau_{a,b} > t) = 0$ (более того, интегрируя по частям, несложно доказать, что функция справа имеет не более чем экспоненциальный рост, т.е. не превосходит Ce^{-ct} для некоторых $c, C > 0$). Отсюда следует, что $P(\tau_{a,b} < \infty) = 0$. Далее,

$$1 = \mathbb{E}\xi_{\tau_n} = \mathbb{E}\Big[\exp\Big(\sqrt{2\mu}a - (\sqrt{2\mu}b + \mu)\tau_{a,b}\Big) I_{\tau_{a,b}<n}\Big] + \mathbb{E}\Big[\exp\Big(\sqrt{2\mu}W_n - \mu n\Big) I_{\tau_{a,b}\ge n}\Big].$$

Заметим, что на множестве $\{\tau_{a,b} \ge n\}$ имеем: $W_n + bn \le a$, поэтому

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\sqrt{2\mu}W_n - \mu n\Big) I_{\tau_{a,b}\ge n}\Big] \le \exp(\sqrt{2\mu}a - b\sqrt{2\mu}n - \mu n) \to 0.$$

Следовательно, по лемме о монотонной сходимости (Беппо Леви)

$$\mathbb{E}\exp\big(\sqrt{2\mu}W_{\tau_{a,b}} - \mu\tau_{a,b}\big) = \lim_n \mathbb{E}\exp\big(\sqrt{2\mu}W_{\tau_{a,b}} - \mu\tau_{a,b}\big) I_{\tau_{a,b}\ge n} = 1.$$

Задача 6.19. *(***Задача о разорении с точки зрения мартингалов (пример 1.6.5)***). Вы приходите в казино с k\$. За одну партию вы выигрываете 1\$ с вероятностью p и проигрываете 1\$ с вероятностью $q = 1 - p$, $p < 1/2$. Если у вас остается 0\$, вы уходите. Если вы приобретаете K\$, где $K > k$ — некоторая фиксированная сумма, вы тоже уходите. Найти вероятность того, что вы уйдете ни с чем.*

Решение Пусть $X_i = 1$ в случае выигрыша в i-й партии и $X_i = -1$ в случае проигрыша. Положим: $S_n = k + X_1 + \dots + X_n$. Несложно доказать, что с.в. $\xi_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ — мартингал (как произведение независимых неотрицательных с.в. со средним 1). Пусть τ — первый момент достижения k или K. По OS-теореме

$$\Big(\frac{q}{p}\Big)^k = \xi_0 = \mathbb{E}\xi_\tau = \Big(\frac{q}{p}\Big)^K P(S_\tau = K) + P(S_\tau = 0).$$

Учитывая соотношение $P(S_\tau = K) + P(S_\tau = 0) = 1$, легко находим вероятность разорения $P(S_\tau = 0)$.

Для обоснования выкладок покажем, что $\tau < \infty$ почти всюду. Заметим, что последовательность $T_n = S_n - n(p - q) = k + \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i)$ является мартингалом. По неравенству Чебышева

$$P(\tau > N) = P(\inf_{n\le N} S_n > 0) \le P(T_N > (q-p)N) \le \frac{\mathbb{E}(T_N^2)}{(q-p)^2N^2} = \frac{k^2 + ND(X_1)}{(q-p)^2N^2}.$$

Следовательно, $P(\tau < \infty) = 1$.

Докажем теперь, что $\mathbb{E}\xi_\tau = 1$. Положим: $\tau_n = \min(\tau, n)$.

$$1 = \mathbb{E}\xi_{\tau_n} = \mathbb{E}\big(\xi_\tau I_{\tau<n}\big) + \mathbb{E}\big(\xi_n I_{\tau>n}\big).$$

По лемме о монотонной сходимости $\lim_n \mathbb{E}\big(\xi_\tau I_{\tau<n}\big) = \mathbb{E}\xi_\tau$. Наконец,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(\xi_n I_{\tau>n}\big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(\xi_n I_{0<k+S_n\le K}\big) \le \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(I_{0<k+S_n\le K}\big)\Big(\frac{p}{q}\Big)^{K-k} = \lim_{n\to\infty} P(\tau > n)\Big(\frac{p}{q}\Big)^{K-k} = 0$$

и мы получаем $\mathbb{E}\xi_\tau = 1$.

Задача 6.20. *В условиях предыдущей задачи найти среднюю продолжительность игры.*

Решение: Средняя продолжительность игры равна $\mathbb{E}\tau$. Применим OS-теорему к T_n:

$$k = \mathbb{E}T_\tau = \mathbb{E}(-\tau(p-q))I_{S_\tau=0} + \mathbb{E}(K - \tau(p-q))I_{S_\tau=K} = KP(S_\tau = K) - (p-q)\mathbb{E}\tau.$$

Отсюда находим $\mathbb{E}\tau$. Для обоснования заметим, что существует такое число $t > 0$, что $c = \mathbb{E}e^{tX_i} < 1$. Действительно, рассмотрим функцию $\varphi(t) = \mathbb{E}e^{tX_i}$. Имеем: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) = 1 + t\mathbb{E}(X_i) + o(t) = 1 + t(p-q) + o(t) < 1$ при малых t. По неравенству Чебышева

$$P(\tau > N) \le P(S_N > -k) = P(e^{tS_N} > e^{-kt}) \le e^{kt}\mathbb{E}(e^{tS_N}) = e^{kt}c^N.$$

Отсюда немедленно следует, что $\mathbb{E}\tau < \infty$ (почему?). По OS-теореме, для $\tau_n = \min(\tau, n)$ имеем:

$$k = \mathbb{E}T_{\tau_n} = \mathbb{E}(-\tau(p-q))I_{S_\tau=0,\tau\le n} + \mathbb{E}(K-\tau(p-q))I_{S_\tau=K,\tau\le n} + \mathbb{E}(S_n - n(p-q))I_{\tau\ge n}.$$

Осталось заметить, что $\lim_n \mathbb{E}(S_n - n(p-q))I_{\tau\ge n} \le \lim_n \mathbb{E}(K-n(p-q))P(\tau\ge n) \le \lim_n \mathbb{E}(K - n(p-q))e^{kt}c^n = 0$. Отсюда легко получаем искомое соотношение.

7. Геометрическое броуновское движение. Волатильность. Опционы. Формула Блэка-Шоулза.

В этом разделе мы рассмотрим модели ценных бумаг на фондовом рынке. Пусть W_t — винеровский процесс. Простейшей моделью цены акции S_t является следующая:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t.$$

Величины μ, σ носят названия коэффициент тренда и волатильность (volatility).

Недостатки этой модели: 1) S_t может быть отрицательна, 2) вариация S_t на отрезке $[t, t+\Delta]$ равна $\sigma^2\Delta$ и не зависит от значений S_t (что противоречит опыту).

Эти недостатки устраняются в рамках экспоненциальной модели или геометрического броуновского движения. Далее будем считать, что S_t решает *стохастическое дифференциальное уравнение*

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Найдем по формуле Ито дифференцал $\ln S_t$:

$$d\ln S_t = \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2S_T^2}\sigma^2 S_t^2.$$

Следовательно,

$$d\ln S_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t$$

и окончательное решение выглядит так:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}.$$

Возьмем математическое ожидание от соотношения

$$S_t = S_0 + \mu\int_0^t S_s ds + \sigma\int_0^t S_s\ dW_s.$$

Учтем, что последнее слагаемое — мартингал.

$$\mathbb{E}S_t = \mathbb{E}S_0 + \mu\int_0^t \mathbb{E}S_s ds.$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}S_t = e^{\mu t}\mathbb{E}S_0.$$

В зависимости от исследуемой ситуации величина μ может быть проинтерпретирована как коэффициент роста акции (на рассматриваемом периоде наблюдался тренд (= рост) или отрицательный тренд). Также μ может также иметь смысл "безрисковой процентной ставки" (т.е., тот процент, который гарантированно получает держатель акции).

Волатильность σ имеет смысл меры "подвижности" акции. Обычно она измеряется в процентах ("волатильность равна 20 процентов годовых"). Так как

$$\ln\frac{S_{t+\Delta}}{S_t} = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta + \sigma\big(W_{t+\Delta} - W_t\big),$$

то

$$D\Big(\ln\frac{S_{t+\Delta}}{S_t}\Big) = \sigma^2\Delta.$$

Заметим, что $\ln\frac{S_{t+\Delta}}{S_t}$ приблизительно равно относительному приращению $\frac{S_{t+\Delta}-S_t}{S_t}$, т.е. в некотором приближении волатильность — это дисперсия относительных приращений.

Рассмотрим теперь задачу определения теоретической цены вторичной ценной бумаги (деривативa). Для простоты рассмотрим европейский опцион типа Call. Это ценная бумага, дающая держателю право купить акцию по фиксированной цене K по истечении срока T.

Мы будем полагать, что μ совпадает с фиксированной безрисковой процентной ставкой $\mu = r$. Очевидно, что владелец опциона по истечении срока T приобретает следующий доход Pr: 1) если

$S_T < K$, то $P_r = 0$, 2) если $S_T \geq K$, то после операции "покупка акции по цене K + ее продажа по рыночной цене" $Pr = S_T - K$. Так что средний доход от такой операции будет равен

$$\mathbb{E}\max(0, S_T - K)$$

Учитывая процентную ставку, в ситуации "честной игры" разумная стоимость C опциона должна быть равна

$$C = e^{-rT}\mathbb{E}\max(0, S_T - K).$$

Расписывая математическое ожидание, мы получаем

$$C = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma x}\Big)e^{-\frac{x^2}{2T}}\, dx, \quad f(x) = \max(0, x-K).$$

Точные вычисления приводят к так называемой формуле Блэка-Шоулза или Блэка-Шоулза-Мертона (Black-Scholes-Merton).

$$C = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2), \tag{9}$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

а Φ — функция распределения нормальной гауссовой с.в.

Мертон и Шоулз (Блэк умер в 1995 г.) получили Нобелевскую премию по экономике за вывод этой формулы в 1997 г. Они вывели ее исходя из несколько других соображений, отличных от "наивного" вывода выше. В основе лежала мысль о создании так называемого безрискового портфеля, приводившая к дифференциальному уравнению в частных производных, так называемому уравнению Блэка-Шоулза. Мы обсудим позже этот уравнение.

В настоящее время отношение к практической полезности формулы Блэка-Шоулза достаточно скептическое. Тем не менее, понятия связанные с ее применением (implied volatility, улыбка волатильности и т.д.) прочно вошли в обиход трейдеров и финансовых аналитиков. С этими понятиями и историей применения формулы Блэка-Шоулза на практике можно ознакомится по книге [4].

Занятия 5-7

1) Доказать, используя определение стохастического интеграла, что

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s\, ds$$

$$\int_0^t W_s^2\, dW_s = \frac{1}{3}W_t^3 - \int_0^t W_s\, ds.$$

2) Докажите, что мартингал ξ_t, $\mathbb{E}(\xi_t^2) < \infty$ — процесс с некоррелированными приращениями.
3) (Пуассоновские мартингалы) Пусть π_t — пуассоновский процесс интенсивности λ. Докажите, что следующие процессы являются мартингалами:

$$(\pi_t - \lambda t)^2 - \lambda t, e^{-\theta\pi_t + \lambda t(1-e^{\theta})}.$$

При каких a процесс $e^{\pi_t - at}$ является (суб)-мартингалом?
4) Используя формулу Ито
1) доказать, что

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s\, ds, \int_0^t W_s^2\, dW_s = \frac{1}{3}W_t^3 - \int_0^t W_s\, ds.$$

2) найти итерационную формулу для $b_k(t) = \mathbb{E}W_t^k$.
5) 1) Пусть f — гладкая функция. Докажите, что $f(W_t) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)\, ds$ — мартингал.
2) Доказать, что $W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2$ — мартингал.

6) (Полиномы Эрмита) Докажите, что n-ая итерация стохастического интеграла

$$n!\int \cdots \int_{0\le s_1\cdots s_n\le t} dW_{s_1}\cdots dW_{s_n}$$

имеет вид $t^{n/2}H_n(W_t/\sqrt{t})$ — где H_n — многочлен Эрмита

$$H_n = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n)}.$$

7*) Доказать, что если X_t — непрерывный процесс с $X_0 = 0$, причем $e^{\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2}t}$ — мартингал для всех α относительно $\mathcal{F}_t$, то X_t — винеровский процесс относительно $\mathcal{F}_t$.

8) 1) Пусть $\{\xi_k\}$ — независимые с.в. со средним 1. Докажите, что $X_n = \prod_{k=1}^n \xi_k$ — мартингал.
2) Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых стандартных гауссовских с.в., $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Докажите, что $X_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\exp\left(\frac{S_n^2}{2(n+1)}\right)$ — мартингал относительно потока $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)$.

9) Используя OS-теорему, найдите $\mathbb{E}e^{-\theta\tau_n}$, где τ_n — первый момент достижения значения n процессом Пуассона.

10) Докажите, что для марковских моментов $\tau\le\sigma$ с конечным числом значений и субмартингала ξ_t выполнено неравенство

$$\mathbb{E}(\xi_\tau) \le \mathbb{E}(\xi_\sigma|\mathcal{F}_\tau).$$

11*) Докажите, что для ограниченных марковских моментов $\tau\le\sigma$ и мартингала ξ_t с непрерывными справа траекториями выполнено равенство

$$\mathbb{E}(\xi_\tau) = \mathbb{E}(\xi_\sigma|\mathcal{F}_\tau).$$

12) Выведите формулу (9).

8. Процесс Орнштейна-Уленбека. Его свойства. Стохастические дифференциальные уравнения. Теорема существования и единственности решений для стохастических ДУ. Формула Фейнмана-Каца.

Винеровский процесс как модель движения взвешеных частиц в жидкости не был вполне удовлетворительным с физической точки зрения. В 30-х годах была предложена другая модель, учитывавшая ньютоновское взаимодействие частиц. Поведение частицы описывалось уравнением Ланжевена

$$dv(t) = -\beta v(t)dt + dW_t,$$

где $\beta > 0$ — некоторый коэффициент, v — скорость частицы. Формально это уравнение можно переписать таким образом:

$$ma = m\frac{dv(t)}{dt} = -m\beta v(t) + m\frac{dW_t}{dt}.$$

В математике и физике решение этого уравнения получило название процесса Орнштейна-Уленбека.

Процессом Орнштейна-Уленбека назывется решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_t = -\xi_t dt + \sqrt{2}dW_t, \quad \xi_0 = x.$$

Для решения этого уравнения найдем дифференциал процесса $e^t\xi_t$:

$$d(e^t\xi_t) = e^t\xi_t dt + e^t(-\xi_t dt + \sqrt{2}dW_t) = \sqrt{2}e^t dW_t.$$

Следовательно,

$$e^t\xi_t = x + \sqrt{2}\int_0^t e^s dW_s$$

и

$$\xi_t = xe^{-t} + \sqrt{2}e^{-t}\int_0^t e^s dW_s.$$

Из этого соотношения видно, что ξ_t — гауссовский процесс. Следовательно, его конечномерные распределения полностью определяются средним $\mathbb{E}\xi_t$ и функцией ковариации

$$K(s,t) = \mathbb{E}(\xi_t - \mathbb{E}\xi_t)(\xi_s - \mathbb{E}\xi_s).$$

Имеем:

$$\mathbb{E}\xi_t = xe^{-t}$$

$$\mathbb{E}(\xi_t-\mathbb{E}\xi_t)(\xi_s-\mathbb{E}\xi_s) = 2e^{-t-s}\mathbb{E}\Big(\int_0^t e^u dW_u \int_0^s e^u dW_u\Big) = 2e^{-t-s}\int_0^{\min(t,s)} e^{2u}du = e^{-t-s}\big(e^{2\min(t,s)}-1\big)$$

(мы пользуемся изометрией стохастического интеграла). В частности, $D\xi_t = (1-e^{-2t})$.

Полугруппа Орнштейна-Уленбека $T_t f$ определяется следующим образом:

$$T_t f(x) = \mathbb{E} f(\xi_t).$$

Зная распределение ξ_t, нетрудно написать явное представление T_t

$$T_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{-t} + \sqrt{1-e^{-2t}}y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Задача 8.1. *Используя явное представление полугруппы Орнштейна-Уленбека доказать следующие ее свойства*

1) (T_t — полугруппа)

$$T_{t+s} f = T_t(T_s f)$$

2) (Генератор T_t) $u(t,x) = T_t f$ является решением параболического уравнения в частных производных

$$u_t = u_{xx} - x u_x, \quad u(0,x) = f(x)$$

3) (Инвариантная мера) стандартное гауссовское распределение $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy$ является инвариантной мерой относительно T_t:

$$\int T_t f \cdot g\ d\gamma = \int f \cdot T_t g\ d\gamma.$$

4) (Эргодическое свойство)

$$\lim_{t\to\infty} T_t f = \int f\ d\gamma.$$

Заметим, что последнее свойство (сходимость к равновесному состоянию) является предметом изучения эргодической теории и статистической физики.

Итак, на примере процесса Орнштейна-Уленбека и геометрического броуновского движения мы убедились в полезности изучения стохастических дифференциальных уравнений. Стохастическим дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$d\xi_t = \sigma(\xi_t) dW_t + \beta(\xi_t) dt, \quad \xi_{t_0} = \eta,$$

где η — некоторая случайная величина, измеримая относительно $\mathcal{F}_{t_0}$. Это уравнение следует понимать как интегральное

$$\xi_t = \eta + \int_{t_0}^t \sigma(\xi_s) dW_s + \int_{t_0}^t \beta(\xi_s) ds. \tag{10}$$

Функции σ и β носят названия коэффициент диффузии и коэффициент сноса.

Теорема 8.2. *Предположим, что σ и β удовлетворяют условию Липшица, т.е. для некоторой константы K*

$$|\sigma(x)-\sigma(y)| \le K|x-y|, \quad |\beta(x)-\beta(y)| \le K|x-y|.$$

Тогда для любого отрезка $[t_0,T]$ и любого начального значения η с $\mathbb{E}\eta^2 < \infty$ существует единственное (с точностью до стохастической эквивалентности) решение (10) на $[t_0,T]$.

Замечание 8.3. *Доказательство ниже приведено для случая $\eta = x_0$, $t_0 = 0$. Доказательство общего случая совершенно аналогично.*

Доказательство. (набросок, подробно см., например, в [2]). Решения строятся методом последовательных итераций:

$$\xi_t^{(n)} = x_0 + \int_0^t \sigma(\xi_s^{(n-1)})\ dW_s + \int_0^t \beta(\xi_s^{(n-1)})\ ds. \tag{11}$$

С помощью изометрии Ито и неравенства Коши-Буняковского доказываем оценки

$$\mathbb{E}\big|\xi_t^{(1)} - x_0\big|^2 \le CK^2(t+t^2) \le CK^2 T(1+t)$$

$$\mathbb{E}\big|\xi_t^{(n)} - \xi_t^{(n-1)}\big|^2 \le CK^2(1+t)\int_0^t \mathbb{E}\big|\xi_s^{(n-1)} - \xi_s^{(n-2)}\big|^2\ ds$$

(C зависит только от x_0^2).

Индукция:

$$\mathbb{E}\big|\xi_t^{(n)} - \xi_t^{(n-1)}\big|^2 \le (CK^2)^n T \frac{(1+t)^{n+1}}{n!}. \tag{12}$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}^{1/2}\big|\xi_t^{(n)} - \xi_t^{(n-1)}\big|^2 < \infty$ и ряд $\sum_{n=1}^\infty \xi_t^{(n)} - \xi_t^{(n-1)}$ сходится в $L^2(P)$. Докажем, что сходимость равномерна по t. Действительно,

$$P\Big(\max_t |\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}| \ge 1/2^n\Big) \le P\Big(\max_{u\le t} |\int_0^u \sigma(\xi_s^{(n)}) - \sigma(\xi_s^{(n-1)})\ dW_s| \ge 1/2^{n+1}\Big)$$
$$+ P\Big(\max_u |\int_0^u \beta(\xi_s^{(n)}) - \beta(\xi_s^{(n-1)})\ ds| \ge 1/2^{n+1}\Big)$$

По неравенству Колмогорова для субмартингалов первое слагаемое не превосходит

$$2^{2(n+1)}\mathbb{E}\Big(|\int_0^t \sigma(\xi_s^{(n)}) - \sigma(\xi_s^{(n-1)})\ dW_s|\Big)^2 \le 2^{2(n+1)} K^2 \int_0^t \mathbb{E}\big|\xi_t^{(n)} - \xi_t^{(n-1)}\big|^2\ ds.$$

Второе не превосходит (неравенство Чебышева + неравенство Коши-Буняковского)

$$P\Big(\int_0^t |\beta(\xi_s^{(n)}) - \beta(\xi_s^{(n-1)})|\ ds \ge 1/2^{n+1}\Big) \le 2^{2(n+1)}\mathbb{E}\Big(\int_0^t |\beta(\xi_s^{(n)}) - \beta(\xi_s^{(n-1)})|\ ds\Big)^2$$
$$\le 2^{2(n+1)} K^2 t \int_0^t \mathbb{E}\big|\xi_s^{(n)} - \xi_s^{(n-1)}\big|^2\ ds.$$

Равномерная сходимость почти всюду следует из (12) и леммы Бореля-Кантелли.

Итак, $\xi_t^{(n)} \to \xi_t$ в $L^2(P)$ и равномерно на отрезке для почти всех траекторий. Переходя к пределу в (11) (обоснуйте), получаем

$$\xi_t = x_0 + \int_0^t \sigma(\xi_s)\ dW_s + \int_0^t \beta(\xi_s)\ ds.$$

Итак, ξ_t — решение СДУ, траектории непрерывны п.в., ξ_t — $\mathcal{F}_t$-измеримо.

Единственность: пусть есть два различных решения ξ, η.

$$\mathbb{E}|\xi_t - \eta_t|^2 \le C(K^2, T, x_0) \int_0^t \mathbb{E}(\xi_s - \eta_s)^2\ ds.$$

Единственность следует из леммы: если $0 \le f(t) \le C\int_0^t f(s)\ ds$, то $f(s) = 0$. □

Формула Фейнмана-Каца

Как мы знаем, функция $u(t,x) = \mathbb{E}(f(x+W_t))$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (диффузии)

$$u_t = \frac{1}{2}u_{xx}.$$

Следующее знаменитое обобщение этого результата носит название формулы Фейнмана-Каца.

Теорема 8.4. *Пусть V — ограниченная непрерывная функция. Тогда*

$$u(t,x) = \mathbb{E}\Big(f(x+W_t)e^{-\int_0^t V(x+W_s)\ ds}\Big)$$

удовлетворяет уравнениию

$$u_t = \frac{1}{2}u_{xx} - Vu, \quad u(0,x) = f(x).$$

Кратко обсудим идею доказательства.

Решения параболического уравнения $u_t = \frac{1}{2}Au$, где A — некоторый линеный оператор (генератор) формально можно представить в виде

$$u(t,x) = e^{tA}u(0,x),$$

где e^{tA} — экспонента оператора tA. Если теперь решается уравнение

$$u_t = (A_1 + A_2)u,$$

причем e^{tA_1}, e^{tA_2} явно вычислимы, то возникает соблазн написать соотношение $u_t = e^{tA_1}e^{tA_2}u(0,x)$. Послднее, однако, неверно, так как A_1 и A_2, вообще говоря, не коммутируют. Тем не менее, известный результат функционального анализа (формула Троттера), утверждает, что для самосопряженных операторов выполнено (при некоторых дополнительных ограничениях)

$$e^{t(A+B)}f = \lim_n \bigl(e^{\frac{tA}{n}+\frac{tB}{n}}\bigr)^n f.$$

Применим эту формулу к нашей ситуации. Полугруппы, порожденные оператором $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial_{xx}}$ и оператором умножения на функцию V можно явно выписать. Полугруппа теплопроводности $P_t = e^{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial_{xx}}}$ записывается как математическое ожидание $\mathbb{E}(f(x+W_t))$, полугруппа $e^{tV(x)}$ действует как обычное умножение на функцию.

Рассмотрим оператор $\Bigl[(e^{\frac{t}{n}V(x)}P_{\frac{t}{n}})\Bigr]^n f$. Он имеет явный вид

$$\frac{1}{\bigl(\sqrt{2\pi t/n}\bigr)^n} e^{-V(x)\frac{t}{n}} \int e^{-V(x+y_n)\frac{t}{n}} \cdots \int e^{-V(x+y_n+\dots+y_2)\frac{t}{n}} f(x+y_1+\dots+y_n)\ e^{-\frac{1}{2t/n}\left(y_1^2+\dots+y_n^2\right)}\ dy_1\cdots dy_n$$

$$= \frac{1}{\bigl(\sqrt{2\pi t/n}\bigr)^n} \int e^{-\frac{t}{n}\sum_{i=1}^n V(x+y_{i+1}+\dots+y_n)} f(x+y_1+\dots+y_n)\ e^{-\frac{1}{2t/n}\left(y_1^2+\dots+y_n^2\right)}\ dy_1\cdots dy_n$$

$$\to \mathbb{E}\Bigl(f(x+W_t)e^{-\int_0^t V(x+W_s)\ ds}\Bigr)$$

Формула Фейнмана пришла из квантовой механики и первоначально имела другой вид. Эволюция движения частицы в силовом поле V в квантовой механике описывается уравнением Шредингера

$$\hbar\frac{d}{dt}\psi = -iH\psi,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, $H\psi = \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - V\psi$. Частице в квантовой механике ссоответсвует вектор комплексного гильбертова пространства $\psi = |\psi|(\cos\omega + i\omega)$, где $|\psi|$ (амплитуда) удовлетворяет условию $\int |\psi|^2 dx = 1$ и $|\psi|^2$ интерпретируется как плотность вероятности нахождения частицы в точке x. Решение уравнение Шредингера записывается формально в виде $e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\psi$. Оператор e^{itH} является унитарным оператором на гильбртовом пространстве. По аналогии с уравнением теплопроводности для случая $V=0$ и уравнения $u_t = -iu_{xx}$ можно записать

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi i t}\int u(0,y)e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}}\ dy$$

и написать оригинальную формулу, полученную Фейнманом.

Эта формула была выведена Фейнманом из чисто физических соображений. В основе лежала идея о том, что эволюция состояния квантовой частицы является средним по всевозможным траекториям движения классических частиц (метод интегрирования по путям в квантовой механике).

Заметим, что в оригинальной формуле Фейнмана присутствует не мера Винера, имеюшая формальный вид $e^{-y^2}dy$, а мера $e^{iy^2}dy$, что затрудняет математическое обоснование. Попытки определить строго математически "интеграл Фейнмана по путям" как интеграл по некоторой счетно-аддитивной мере привели к отрицательному результату.

Список литературы

[1] Богачев В.И., Основы теории меры, т. 1,2. РХД, Москва – Ижевск, 2008.
[2] Вентцель А.Д., Курс теории случайных процессов. М. Наука, 1975.
[3] Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г., Задачи по теории вероятностей. М. Наука, 1986.
[4] Халл Дж., Опционы, фьючерсы и другие финансовые инструменты, "Вильямс", 2008.
[5] Ширяев А.Н., Вероятность. тт. 1-2. М. МЦНМО, 2007.
[6] Karatzas I., Shreve S.E., Brownian motion and stochastic calculus, 1987.
[7] Krylov N.V., Introduction to the theory of diffusion processes. Transl. Math. Monographs (142), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
[8] Krylov N.V., Introduction to the theory of random processes, 2002.
[9] Øksendal B., Stochastic differential equations, 1992.
[10] Revuz D., Yor M., Continuous martingales and Brownian motion, 1999.
[11] Stirzaker D., Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.