**1.1.** Пусть $X$ — нормированное пространство. Докажите, что операции сложения $X \times X \to X$ и умножения на число $\mathbb{K} \times X \to X$ непрерывны.

**1.2.** Пусть $X$ — нормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство. Докажите, что его замыкание $\overline{X_0}$ — тоже векторное подпространство в $X$.

**1.3.** Пусть $p, q \in (1, +\infty)$, и пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Докажите *неравенство Юнга*:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (a, b \geqslant 0).$$

2) Из неравенства Юнга выведите *неравенство Гёльдера*:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q \qquad (x, y \in \mathbb{K}^n).$$

3) Из неравенства Гёльдера выведите *неравенство Минковского*:

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p \qquad (x, y \in \mathbb{K}^n).$$

**1.4.** Нарисуйте единичный шар на плоскости $\mathbb{R}^2$, снабженной нормой $\|\cdot\|_p$, для различных $p \in [1, +\infty]$. Обратите внимание на случаи $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$. Что происходит с единичным шаром с ростом $p$?

**1.5.** Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$.

1) Докажите, что $\|\cdot\|_q \leqslant \|\cdot\|_p$ на $\mathbb{K}^n$.
2) Докажите, что существует такая константа $C = C_{n,p,q} > 0$, что $\|\cdot\|_p \leqslant C\|\cdot\|_q$ на пространстве $\mathbb{K}^n$.
3) Можно ли эту константу выбрать не зависящей от $n$?
4) Найдите наименьшую константу $C_{n,p,q}$ с указанным свойством. Интерпретируйте ответ как норму некоторого оператора.

**1.6.** Пусть $c_{00}$ — пространство всех *финитных* последовательностей (т.е. числовых последовательностей $x = (x_n)$, для каждой из которых существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_n = 0$ для всех $n > N$). Эквивалентны ли нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на $c_{00}$ при $p \neq q$?

**1.7.** Докажите, что последовательность $(x^{(k)})$ в пространстве $\mathbb{K}^n$ сходится к вектору $x \in \mathbb{K}^n$ по норме $\|\cdot\|_p$ (где $1 \leqslant p \leqslant +\infty$) тогда и только тогда, когда она сходится к $x$ покоординатно.

**1.8.** Докажите, что $c_0$ замкнуто в $\ell^\infty$. Чему равно замыкание $\ell^p$ в $\ell^\infty$?

**1.9.** Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Докажите, что $\ell^p \subset \ell^q$, но $\ell^p \neq \ell^q$ при $p \neq q$. Чему равна норма оператора вложения $\ell^p$ в $\ell^q$?

**1.10.** Пусть $X$ — множество. Докажите, что последовательность $(f_n)$ в $\ell^\infty(X)$ сходится к $f \in \ell^\infty(X)$ по норме $\|\cdot\|_\infty$ тогда и только тогда, когда она сходится к $f$ равномерно.

**1.11.** Пусть $X$ — полунормированное пространство, и пусть $N = \{x \in X : \|x\| = 0\}$. Покажите, что формула

$$\|x + N\|^\wedge = \|x\| \qquad (x \in X)$$

корректно определяет норму на $X/N$. (Корректность в данном случае означает, что правая часть этой формулы зависит лишь от класса $x + N \in X/N$, а не от самого элемента $x \in X$).

**1.12.** Пусть $(X, \mu)$ — пространство с мерой, и пусть $p, q \in (1, +\infty)$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Докажите, что если $f \in \mathscr{L}^p(X, \mu)$ и $g \in \mathscr{L}^q(X, \mu)$, то функция $fg$ интегрируема и справедливо *неравенство Гёльдера*

$$\int_X |fg|\, d\mu \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

2) Из неравенства Гёльдера выведите, что $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ — векторное пространство, и что справедливо *неравенство Минковского*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \qquad (f, g \in \mathscr{L}^p(X, \mu)).$$

**1.13.** Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$.

1) Докажите, что существует такая константа $C = C_{a,b,p,q} > 0$, что $\|\cdot\|_p \leqslant C\|\cdot\|_q$ на пространстве $C[a, b]$.
2) Найдите наименьшую константу $C_{a,b,p,q}$ с указанным свойством. Интерпретируйте ответ как норму некоторого оператора.
3) Эквивалентны ли нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на $C[a, b]$ при $p \neq q$?

**1.14.** Проверьте, что измеримая функция существенно ограничена тогда и только тогда, когда она эквивалентна некоторой измеримой ограниченной функции.

**1.15.** Пусть $(X, \mu)$ — пространство с мерой, и пусть $f$ — неотрицательная существенно ограниченная функция на $X$. Напомним (см. лекцию), что ее *существенная верхняя грань* определяется формулой

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf \Big\{ \sup_{x \in E} f(x) : E \subset X,\ \mu(X \setminus E) = 0 \Big\}.$$

Докажите, что inf в этой формуле достигается. Как следствие, $\operatorname{ess\,sup} f = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$ п.в.

**1.16.** Пусть $f \in C[a, b]$. Докажите, что $\operatorname{ess\,sup} |f| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

**1.17.** Докажите, что $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ — векторное пространство, и что формула

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup} |f|$$

задает полунорму на $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$.

**1.18.** Пусть $\mu(X) < \infty$. Докажите, что $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$ при $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Чему равна норма оператора вложения $L^q(X, \mu)$ в $L^p(X, \mu)$?

**1.19.** Докажите, что $L^p[a, b] \neq L^q[a, b]$ при $p \neq q$.

**1.20.** Пусть $X = \mathbb{N}$, и пусть $\mu$ — «считающая» мера на $\sigma$-алгебре всех подмножеств $\mathbb{N}$, заданная формулой $\mu(A) = |A|$ (число элементов в $A$). Убедитесь, что $L^p(\mathbb{N}, \mu) = \ell^p$ для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Сопоставьте это наблюдение с результатом задачи 1.9 и убедитесь, что результат задачи 1.18 не переносится на случай, когда $\mu(X) = \infty$.

**1.21.** Покажите, что $L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^q(\mathbb{R})$ при $p \neq q$. Полезно сравнить результат этой задачи с задачами 1.9 и 1.18.