2.1. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$, и пусть $X = \ell^p$ или c_0. Напомним, что *диагональный оператор* $M_\lambda \colon X \to X$ переводит вектор $x \in X$ в вектор $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, и что $\|M_\lambda\| = \sup_n |\lambda_n|$ (см. лекцию). При каких условиях оператор M_λ достигает нормы?

2.2. Зафиксируем точку $t_0 \in [a, b]$ и рассмотрим линейный функционал

$$F \colon (C[a, b], \|\cdot\|_p) \to \mathbb{K}, \quad F(x) = x(t_0).$$

1) При каких $p \in [1, +\infty]$ функционал F ограничен? **2)** Найдите его норму. **3)** Достигает ли он нормы?

2.3. Пусть $X = (C[a, b], \|\cdot\|_p)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, и пусть $f \in C[a, b]$. *Оператор умножения* $M_f \colon X \to X$ действует по правилу

$$M_f(g) = fg \qquad (f \in X).$$

1) Докажите, что M_f ограничен. **2)** Вычислите его норму. **3)** При каких условиях оператор M_f достигает нормы?

2.4. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $f \colon X \to \mathbb{K}$ — существенно ограниченная измеримая функция. Зафиксируем $p \in [1, +\infty]$. *Оператор умножения* $M_f \colon L^p(X, \mu) \to L^p(X, \mu)$ действует по правилу

$$M_f(g) = fg \qquad (f \in L^p(X, \mu)).$$

1) Докажите, что M_f ограничен. **2)** Вычислите его норму. **3)** При каких условиях оператор M_f достигает нормы?

2.5. Пусть $X = L^p[0, 1]$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$. Оператор *неопределенного интегрирования* $T \colon X \to X$ действует по формуле

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt \qquad (f \in X).$$

1) Докажите, что T ограничен. **2)** Для $p = 1$ и $p = \infty$ вычислите его норму. **3)** Для тех же p выясните, достигает ли он нормы.

Анонс: для $p = 2$ норма этого оператора равна $2/\pi$. В свое время мы это сможем доказать.

2.6. Пусть $I = [a, b]$, и пусть $K \in C(I \times I)$. *Интегральный оператор* $T \colon C(I) \to C(I)$ задается формулой

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy.$$

Докажите, что T действительно отображает $C(I)$ в $C(I)$, что он ограничен, и что $\|T\| \leqslant \|K\|_\infty$.

2.7. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $K \in L^2(X\times X, \mu\times\mu)$. *Интегральный оператор Гильберта–Шмидта* $T \colon L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$ задается формулой

$$(Tf)(x) = \int_X K(x, y) f(y)\, d\mu(y).$$

Докажите, что T действительно отображает $L^2(X, \mu)$ в $L^2(X, \mu)$, что он ограничен, и что $\|T\| \leqslant \|K\|_2$.

2.8. Линейный функционал F на $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ задан формулой

$$F(f) = 2f(0) - 3f(1) + \int_0^1 f(t)\, dt.$$

1) Докажите, что F ограничен. **2)** Вычислите $\|F\|$. **3)** Достигает ли F нормы?

2.9. Пусть X, Y — нормированные пространства, причем X конечномерно. Докажите, что любой линейный оператор $T\colon X \to Y$ ограничен и достигает нормы.

2.10. Пусть X, Y — нормированные пространства. Напомним, что линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *коизометрией*, если он отображает открытый единичный шар пространства X на открытый единичный шар пространства Y.

1) Докажите, что если T отображает замкнутый единичный шар пространства X на замкнутый единичный шар пространства Y, то T — коизометрия.
2) Верно ли обратное утверждение?
3) Докажите, что инъективная коизометрия — это то же самое, что изометрический изоморфизм.

2.11. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$, и пусть $X = \ell^p$ или c_0. При каких условиях на λ диагональный оператор $M_\lambda\colon X \to X$ **1)** топологически инъективен; **2)** открыт; **3)** изометричен; **4)** коизометричен?

2.12. Ответьте на те же четыре вопроса для оператора умножения из задачи 2.4.

2.13. Постройте линейные изометрические вложения **1)** $\mathbb{K}_p^n$ в $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, **2)** ℓ^∞ в $C_b(\mathbb{R})$, **3)** c_0 в $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

2.14. Докажите, что нормированное пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда в нем есть плотное подпространство не более чем счетной размерности.

2.15. Докажите, что пространства c_0, $C[a,b]$, ℓ^p, $L^p[a,b]$, $L^p(\mathbb{R})$ при $p < \infty$ сепарабельны, а ℓ^∞, $C_b(\mathbb{R})$, $L^\infty[a,b]$ и $L^\infty(\mathbb{R})$ несепарабельны.