В этом и последующих листках задачи, после номера которых стоит буква “b”, являются бонусными. Это означает, что они не являются обязательными и не будут учитываться при выведении оценки за листки, а будут оцениваться отдельно в качестве дополнительных баллов.

3.1. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Докажите, что
1) факторполунорма на X/X_0 действительно является полунормой;
2) топология на X/X_0, порожденная факторполунормой, является фактортопологией топологии на X (т.е. множество $U \subset X/X_0$ открыто тогда и только тогда, когда его прообраз при факторотображении $Q\colon X \to X/X_0$ открыт в X).

3.2. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Верно ли, что у любого вектора из X/X_0 есть представитель в X, имеющий ту же норму?
Указание. Эта задача эквивалентна одной из задач листка 2 (какой?).

3.3. Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $B(X)$ — пространство всех ограниченных измеримых функций на X, снабженное равномерной нормой. Постройте изометрический изоморфизм между $L^\infty(X, \mu)$ и некоторым факторпространством пространства $B(X)$.

3.4. Докажите, что нормированное пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда в нем есть плотное векторное подпространство не более чем счетной размерности.

3.5. Докажите, что пространства c_0, $C[a, b]$, ℓ^p, $L^p[a, b]$, $L^p(\mathbb{R})$ при $p < \infty$ сепарабельны, а ℓ^∞, $C_b(\mathbb{R})$, $L^\infty[a, b]$ и $L^\infty(\mathbb{R})$ несепарабельны.

3.6. Докажите, что если фундаментальная последовательность в метрическом пространстве имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

Определение 3.1. Пусть X — нормированное пространство. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^\infty x_n$ векторов из X *абсолютно сходится*, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$.

3.7. Докажите, что нормированное пространство X полно тогда и только тогда, когда в нем каждый абсолютно сходящийся ряд сходится.

3.8. Пусть $\{X_i : i \in I\}$ — семейство нормированных пространств, и пусть X — их ℓ^p-сумма (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Докажите, что X полно тогда и только тогда, когда полны все пространства X_i.

3.9. 1) Докажите, что пространство $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ неполно для любого $p \in [1, +\infty]$ и что пространство $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ неполно при $q > p$. **2)** Опишите пополнения этих пространств.

3.10. 1) При $p < \infty$ предъявите фундаментальную последовательность в нормированном пространстве $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$, не имеющую предела.
2) Опишите пополнение этого пространства.

3.11. 1) Докажите полноту пространства $C^n[a, b]$ относительно нормы $\|f\| = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty$.
2) Полно ли это пространство относительно равномерной нормы? Если нет, то опишите его пополнение.

3.12. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Докажите, что пространство $L^\infty(X, \mu)$ полно.

3.13. Докажите, что в банаховом пространстве любая убывающая последовательность $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ замкнутых шаров имеет непустое пересечение (даже если радиусы шаров не стремятся к нулю).

В дальнейшем через $\mathscr{N}orm$ обозначается категория, объекты которой — нормированные пространства, а морфизмы — ограниченные линейные операторы. Через $\mathscr{N}orm_1$ будет обозначаться категория с теми же объектами, что и в $\mathscr{N}orm$, морфизмы которой — линейные *сжатия* (т.е. линейные операторы нормы $\leqslant 1$). Полная подкатегория в $\mathscr{N}orm$ (соответственно, $\mathscr{N}orm_1$), состоящая из банаховых пространств, будет обозначаться через $\mathscr{B}an$ (соответственно, $\mathscr{B}an_1$).

3.14-b. 1) Докажите, что в $\mathscr{N}orm$ и $\mathscr{B}an$ любой конечный набор объектов обладает произведением и копроизведением.
2) Докажите, что в $\mathscr{N}orm_1$ и $\mathscr{B}an_1$ любой набор объектов обладает произведением и копроизведением.
3) Верно ли предыдущее утверждение для категорий $\mathscr{N}orm$ и/или $\mathscr{B}an$?

3.15-b. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное подпространство. Докажите, что факторпространство X/X_0 вместе с факторотображением $Q\colon X \to X/X_0$ — это коядро вложения $X_0 \hookrightarrow X$ (в $\mathscr{N}orm$ и в $\mathscr{N}orm_1$, а в случае полного X — в $\mathscr{B}an$ и $\mathscr{B}an_1$).

3.16-b. Пусть X, Y — нормированные пространства. Докажите, что морфизм $T\colon X \to Y$ является
1) изоморфизмом в $\mathscr{N}orm$ (или $\mathscr{B}an$) $\iff$ он — топологический изоморфизм;
2) изоморфизмом в $\mathscr{N}orm_1$ (или $\mathscr{B}an_1$) $\iff$ он — изометрический изоморфизм;
3) мономорфизмом в $\mathscr{N}orm$, $\mathscr{N}orm_1$, $\mathscr{B}an$ или $\mathscr{B}an_1$ $\iff$ он инъективен;
4) эпиморфизмом в $\mathscr{N}orm$, $\mathscr{N}orm_1$, $\mathscr{B}an$ или $\mathscr{B}an_1$ $\iff$ он имеет плотный образ;
5) ядром в $\mathscr{N}orm$ или $\mathscr{B}an$ $\iff$ он топологически инъективен и (в случае категории $\mathscr{N}orm$) имеет замкнутый образ;
6) ядром в $\mathscr{N}orm_1$ или $\mathscr{B}an_1$ $\iff$ он изометричен и (в случае категории $\mathscr{N}orm_1$) имеет замкнутый образ;
7) коядром в $\mathscr{N}orm$ или $\mathscr{B}an$ $\iff$ он открыт;
8) коядром в $\mathscr{N}orm_1$ или $\mathscr{B}an_1$ $\iff$ он коизометричен.