ЗАДАЧИ К ПЕРВОЙ ЛЕКЦИИ

1. Пусть γ – кривая на поверхности. Доказать, что поле скоростей $\dot{\gamma}$ касается поверхности S.

2. Доказать все пять свойств ковариантного дифференцирования, сформулированных в первой лекции.

3. Если поле V параллельно вдоль γ, то $\|V\| = const$. Доказать.

4. $\langle V_1, V_2 \rangle = const$, если векторные поля V_1 и V_2 параллельны.

5. Доказать, что параллельные вдоль кривой векторные поля образуют линейное пространство и найти его размерность.

6. Доказать, что параллельный перенос вектора вдоль замкнутой кривой на поверхности приводит к его повороту.

7. Рассмотрим на сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ кривую $\gamma = (\sin t, 0, \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$, и возьмем в касательной плоскости в точке $(0,0,1)$ вектор $v = (v_1, v_2, 0)$. Найти результат параллельного переноса вектора v в южный полюс (точка $(0,0,-1)$) вдоль кривой γ.

8. Пусть две поверхности S_1 и S_2 в $\mathbb{E}^3$ касаются друг друга вдоль кривой γ (это означает, что $T_{\gamma(t)} S_1 = T_{\gamma(t)} S_2$ для всех $t \in I$). Доказать, что поле X тогда и только тогда параллельно на S_1 вдоль γ, когда оно параллельно вдоль γ на S_2.

9. Воспользовавшись результатом задачи 8, объяснить, как перенести вектор вдоль любой окружности на сфере (Указание: одеть на сферическую голову Буратино конус-шапочку и свести задачу к параллельному переносу на конусе. Последнее можно сделать, развернув часть конуса на плоскость с сохранением всех размеров).

10. Пусть $((a + b\cos\varphi)\cos\theta,\ (a + b\cos\varphi)\sin\theta,\ b\sin\varphi)$ – параметризованный тор $\mathbb{T}^2$ в $\mathbb{E}^3$ (почему это тор?). Найти координатные векторные поля $\frac{\partial}{\partial\theta}$ и $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ на торе. Вычислить $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}} \frac{\partial}{\partial\varphi}$ и $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi}} \frac{\partial}{\partial\theta}$ и убедиться, что полученные поля на торе совпадают.