А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ
Лекция 4

4.1. Банаховы пространства (продолжение)

Докажем одно несложное, но полезное свойство банаховых пространств. Его иногда называют *теоремой о продолжении по непрерывности*, хотя правильнее было бы, пожалуй, называть ее «теоремой о продолжении по равномерной непрерывности» (см. ниже замечание 4.1).

Теорема 4.1. *Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — плотное векторное подпространство, Y — банахово пространство. Тогда для любого $T_0 \in \mathscr{B}(X_0, Y)$ существует единственный $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, продолжающий T_0. При этом $\|T\| = \|T_0\|$. Если T_0 топологически инъективен или изометричен, то таков же и T.*

Доказательство. Единственность T очевидна ввиду плотности X_0 в X. Существование доказывается «в лоб» первым приходящим в голову способом. А именно, возьмем произвольный $x \in X$ и подберем последовательность (x_n) в X_0, сходящуюся к x. Ясно, что она фундаментальна, поэтому такова же и последовательность $(T_0 x_n)$ в Y (см. предложение 3.9). Но Y полно, поэтому существует $\lim_n T_0 x_n = y$. Этот предел не зависит от выбора последовательности (x_n), сходящейся к x: если (x'_n) — другая такая последовательность, то $x'_n - x_n \to 0$ и $T_0 x'_n - T_0 x_n \to 0$, так что $\lim_n T_0 x'_n = \lim_n T_0 x_n = y$. Поэтому, полагая $Tx = y$, мы получаем корректно определенное отображение из X в Y, продолжающее T_0. Из линейности T_0 и непрерывности алгебраических операций в X и Y легко следует линейность T. Далее, если $\|T_0 x\| \leqslant C\|x\|$ или же $\|T_0 x\| \geqslant c\|x\|$ для всех $x \in X_0$ (где $c, C > 0$ — некоторые константы), то те же оценки справедливы и для T и для всех $x \in X$. Отсюда следуют оставшиеся утверждения. $\square$

Замечание 4.1. Напомним, что отображение $f\colon X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *равномерно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x, x' \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x') < \delta$, выполнено $\rho(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Легко проверить (проверьте!), что ограниченный линейный оператор между нормированными пространствами равномерно непрерывен (это уточняет теорему 1.2), и что равномерно непрерывное отображение метрических пространств переводит фундаментальные последовательности в фундаментальные (это уточняет часть (i) предложения 3.9). Как следствие, полнота метрических пространств сохраняется при их *равномерных изоморфизмах*, т.е. равномерно непрерывных биекциях с равномерно непрерывным обратным (ср. замечание после предложения 3.9). Фактически при доказательстве теоремы 4.1 использовалась именно *равномерная* непрерывность оператора T_0. В качестве упражнения попробуйте сформулировать и доказать аналог теоремы 4.1 для метрических пространств.

4.2. Пополнение

Напомним, что *пополнением* метрического пространства X называется пара $(\widetilde{X}, J)$, где $\widetilde{X}$ — полное метрическое пространство, а $J\colon X \to \widetilde{X}$ — изометрическое отображение с плотным образом.

Определение 4.1. *Пополнением* нормированного пространства X называется пара $(\widetilde{X}, J)$, где $\widetilde{X}$ — банахово пространство, а $J\colon X \to \widetilde{X}$ — изометрический линейный оператор с плотным образом.

Таким образом, отличие этого определения от обычного определения пополнения метрического пространства состоит в том, что на $\widetilde{X}$ должна иметься структура векторного пространства, метрика на $\widetilde{X}$ должна порождаться некоторой нормой, и вложение J должно быть линейным.

Теорема 4.2. *У каждого нормированного пространства есть пополнение.*

Доказательство. Пусть $(\widetilde{X}, J)$ — пополнение X как метрического пространства. Отождествим X с $J(X)$ посредством J (т.е. договоримся отождествлять точки $x \in X$ и $J(x) \in J(X)$). Таким образом, X становится плотным подмножеством в $\widetilde{X}$. Зафиксируем $x, y \in \widetilde{X}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, и подберем последовательности (x_n) и (y_n) в X так, чтобы $x_n \to x$ и $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Положим по определению

$$\begin{aligned} x + y &= \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n), \\ \lambda x &= \lim_{n\to\infty} \lambda x_n, \\ \|x\| &= \lim_{n\to\infty} \|x_n\|. \end{aligned}$$

Несложная проверка, аналогичная той, которая была проделана в доказательстве теоремы 4.1, показывает, что указанные пределы существуют и не зависят от выбора последовательностей (x_n) и (y_n), сходящихся к x и y. Выполнение аксиом векторного пространства и аксиом нормы в $\widetilde{X}$ также проверяется без труда. Очевидно, что при так определенных операциях в $\widetilde{X}$ вложение J становится линейным. $\square$

Замечание 4.2. Через некоторое время мы сможем предъявить более простое доказательство существования пополнения для нормированных пространств, не требующее (по сравнению с доказательством, приведенным выше) никаких дополнительных проверок.

Следующее свойство пополнения — больше чем просто свойство; на самом деле оно полностью характеризует пополнение с точностью до изометрического изоморфизма (см. соответствующую задачу в листке 4). Полезно сравнить следующую теорему с теоремой 3.4.

Теорема 4.3. *Пусть X — нормированное пространство. Тогда для любого банахова пространства Y и любого оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ существует единственный оператор $\widetilde{T} \in \mathscr{B}(\widetilde{X}, Y)$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, dashed, "\widetilde{T}"] & Y \\ X \arrow[u, "J"] \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

При этом $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Доказательство. Достаточно отождествить X с подпространством $J(X) \subset \widetilde{X}$ и воспользоваться теоремой 4.1. □

По-другому теорему 4.3 можно переформулировать так:

Теорема 4.4. *Для любого банахова пространства* Y *отображение*

$$\mathscr{B}(\widetilde{X}, Y) \to \mathscr{B}(X, Y), \quad S \mapsto S \circ J,$$

является изометрическим изоморфизмом.

В качестве следствия теоремы 4.3 получаем следующее утверждение о единственности пополнения.

Следствие 4.5. *Пусть* $(\widetilde{X}, J)$ *и* $(\widehat{X}, J')$ *— пополнения нормированного пространства* X. *Тогда существует единственный изометрический изоморфизм* $I\colon \widetilde{X} \to \widehat{X}$, *делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, dashed, "I"] & & \widehat{X} \\ & X \arrow[ul, "J"] \arrow[ur, "J'"'] & \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Доказательство. При $X = 0$ утверждение очевидно, поэтому мы будем считать, что $X \neq 0$. Из теоремы 4.3 следует, что существует единственный оператор $I \in \mathscr{B}(\widetilde{X}, \widehat{X})$, делающий диаграмму (4.1) коммутативной; при этом $\|I\| = \|J'\| = 1$. Из той же теоремы (примененной на этот раз к пополнению $(\widehat{X}, J')$) следует, что существует единственный оператор $I' \in \mathscr{B}(\widehat{X}, \widetilde{X})$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} & & \widehat{X} \arrow[ll, dashed, "I'"'] \\ & X \arrow[ul, "J"] \arrow[ur, "J'"'] & \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

При этом $\|I'\| = \|J\| = 1$. Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, dashed] & & \widetilde{X} \\ & X \arrow[ul, "J"] \arrow[ur, "J"'] & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Из коммутативности диаграмм (4.1) и (4.2) следует, что диаграмма (4.3) также будет коммутативной, если в качестве горизонтальной стрелки взять оператор $I' \circ I$. Но та же диаграмма (4.3), очевидно, будет коммутативной, если в качестве горизонтальной стрелки взять тождественный оператор $\mathbf{1}_{\widetilde{X}}$. Применяя утверждение о единственности из теоремы 4.3, получаем равенство $I' \circ I = \mathbf{1}_{\widetilde{X}}$. Меняя ролями пополнения $(\widetilde{X}, J)$ и $(\widehat{X}, J')$ и повторяя те же рассуждения, получаем равенство $I \circ I' = \mathbf{1}_{\widehat{X}}$. Следовательно, I — топологический изоморфизм и $I' = I^{-1}$. Наконец, из уже доказанных равенств $\|I\| = \|I^{-1}\| = 1$ следует, что I — изометрический изоморфизм. □

Следующее свойство пополнения называют его «естественностью», или «функториальностью».

Следствие 4.6. *Для каждой пары нормированных пространств X и Y и каждого оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ определен единственный оператор $\widetilde{T} \in \mathscr{B}(\widetilde{X},\widetilde{Y})$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{T}"] & \widetilde{Y} \\ X \arrow[u, "J_X"] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[u, "J_Y"'] \end{tikzcd}$$

При этом $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Кроме того, $\widetilde{\mathbf{1}}_X = \mathbf{1}_{\widetilde{X}}$ и $(S \circ T)^\sim = \widetilde{S} \circ \widetilde{T}$ для любого $S \in \mathscr{B}(Y,Z)$.

Доказательство. Существование оператора $\widetilde{T}$, его единственность и равенство $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$ следуют из теоремы 4.3, примененной к оператору $J_Y T$. Остальные утверждения легко выводятся из утверждения о единственности. □

Замечание 4.3. Обозначим через $\mathscr{B}an$ (соответственно, $\mathscr{B}an_1$) полную подкатегорию в категории $\mathscr{N}orm$ (соответственно, в категории $\mathscr{N}orm_1$; см. замечание 2.2), объектами которой являются банаховы пространства. Следствие 4.6 утверждает, что пополнение может рассматриваться как функтор из $\mathscr{N}orm$ в $\mathscr{B}an$ (или из $\mathscr{N}orm_1$ в $\mathscr{B}an_1$). При этом теорема 4.4 означает, что функтор пополнения сопряжен слева к вложению $\mathscr{B}an$ в $\mathscr{N}orm$ (соответственно, $\mathscr{B}an_1$ в $\mathscr{N}orm_1$). В этом свете следствие 4.5 становится частным случаем теоремы о единственности представляющего объекта — в данном случае для функтора $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{N}orm_1}(X,Y)$, определенного на категории $\mathscr{B}an_1$.

4.3. Гильбертовы пространства

Гильбертовы пространства, о которых пойдет речь ниже, играют весьма важную роль как в самом функциональном анализе, так и в различных его приложениях к дифференциальным уравнениям, геометрии, матфизике, теории представлений и многим другим областям. Определяются они как банаховы пространства, норма в которых порождена скалярным произведением (подробности см. ниже). Наличие скалярного произведения позволяет значительно лучше понять строение гильбертовых пространств, чем это возможно в случае банаховых пространств, и в конечном итоге полностью их классифицировать. Кроме того — и это, пожалуй, еще важнее — для каждого линейного оператора в гильбертовом пространстве определен его так называемый *сопряженный оператор*, действующий в том же пространстве. Наличие операции перехода к сопряженному оператору существенно обогащает теорию операторов и расширяет спектр ее возможных приложений. В частности, самосопряженные операторы (т.е. операторы, совпадающие со своими сопряженными) являются одним из важнейших ингредиентов математического аппарата квантовой механики, с которым мы познакомимся в конце нашего курса.

Понятие скалярного произведения, на котором основано определение гильбертова пространства, вводится аксиоматически. Начнем мы с несколько более общего понятия полуторалинейной формы.

4.3.1. Полуторалинейные формы

Пусть H — векторное пространство над $\mathbb{C}$.

Определение 4.2. Отображение $f\colon H\times H\to\mathbb{C}$ называется *полуторалинейной формой*, если

1) $f(\lambda x+\mu y,z)=\lambda f(x,z)+\mu f(y,z)$,
2) $f(x,\lambda y+\mu z)=\bar\lambda f(x,y)+\bar\mu f(x,z)$

для всех $x,y,z\in H$ и $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$.

Определение 4.3. Отображение $q\colon H\to\mathbb{C}$ называется *комплексно-квадратичной формой*, если существует такая полуторалинейная форма $f\colon H\times H\to\mathbb{C}$, что $q(x)=f(x,x)$ для всех $x\in H$. В этой ситуации говорят, что q *ассоциирована* с f, и пишут $q=q_f$.

На первый взгляд, комплексно-квадратичная форма q_f содержит в себе меньше информации, чем полуторалинейная форма f. Однако это не так: на самом деле f полностью восстанавливается по q_f.

Предложение 4.7 (тождество поляризации)**.** *Для любой полуторалинейной формы $f\colon H\times H\to\mathbb{C}$ справедливо тождество*

$$f(x,y)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k q_f(x+i^k y).$$

Доказательство этого тождества — простое вычисление, которое мы опускаем.

Следствие 4.8. *Пусть $f,g\colon H\times H\to\mathbb{C}$ — полуторалинейные формы. Тогда $f=g$ $\iff$ $q_f=q_g$.*

Замечание 4.4. Обратите внимание, что для билинейных форм утверждение, аналогичное следствию 4.8, неверно: например, любой кососимметрической билинейной форме отвечает квадратичная форма, тождественно равная нулю.

Обозначение 4.1. Пусть $f\colon H\times H\to\mathbb{C}$ — полуторалинейная форма. Для каждых $x,y\in H$ положим $f^*(x,y)=\overline{f(y,x)}$. Очевидно, $f^*\colon H\times H\to\mathbb{C}$ также является полуторалинейной формой.

Определение 4.4. Полуторалинейная форма f называется *эрмитовой*, если $f=f^*$, т.е. $f(y,x)=\overline{f(x,y)}$ для всех $x,y\in H$.

Следствие 4.9. *Полуторалинейная форма f эрмитова тогда и только тогда, когда $q_f(x)\in\mathbb{R}$ для всех $x\in H$.*

Доказательство. В силу следствия 4.8, f эрмитова тогда и только тогда, когда $q_f=q_{f^*}$, т.е. когда $f(x,x)=\overline{f(x,x)}$ для всех $x\in H$. Это и означает, что $f(x,x)=q_f(x)\in\mathbb{R}$ для всех $x\in H$. $\square$

4.3.2. Предгильбертовы пространства

Определение 4.5. Полуторалинейная форма $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$ называется *скалярным произведением*, если

1) f эрмитова;
2) $f(x,x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$;
3) $f(x,x) = 0$ только для $x = 0$.

Замечание 4.5. Согласно следствию 4.9, условие (2) в определении скалярного произведения влечет условие (1).

Определение 4.6. *Предгильбертовым пространством* называется векторное пространство над $\mathbb{C}$, снабженное скалярным произведением (точнее, пара (H, f), состоящая из векторного пространства H и скалярного произведения f на нем).

Обозначение 4.2. В дальнейшем скалярное произведение на предгильбертовом пространстве H будет обозначаться символом $\langle x, y\rangle$.

Пример 4.1. Пространство $\mathbb{C}^n$ является предгильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Пример 4.2. Пространство ℓ^2 является предгильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}.$$

Абсолютная сходимость этого ряда вытекает из очевидного неравенства $ab \leqslant a^2 + b^2$, справедливого для всех $a, b \geqslant 0$.

Пример 4.3. Для любого пространства с мерой (X, μ) пространство $L^2(X, \mu)$ является предгильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x).$$

Существование этого интеграла следует из задачи 1.12 (см. листок 1).

Замечание 4.6. Отметим, что примеры 4.1 и 4.2 — частные случаи примера 4.3, соответствующие считающей мере μ на $X = \{1, \dots, n\}$ или на $X = \mathbb{N}$ (см. также замечание 1.1).

Заметим, что предгильбертовы пространства из приведенных выше примеров являются нормированными пространствами относительно норм $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ (см. примеры 1.4, 1.5 и 1.12). Это наводит на мысль, что той же формулой можно ввести норму в любом предгильбертовом пространстве.

Обозначение 4.3. Пусть H — предгильбертово пространство. Для каждого $x \in H$ положим по определению $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Разумеется, надо еще доказать, что введенная таким образом «норма» действительно является нормой, т.е. удовлетворяет аксиомам 1–3 из определения 1.1. Прежде чем это делать, докажем одно важное неравенство.

Предложение 4.10 (неравенство Коши–Буняковского–Шварца)**.** *Для всех* $x, y \in H$ *справедливо неравенство* $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$.

Доказательство. Очевидно, мы можем считать, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем $\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \geqslant 0$, т.е.

$$\|x\|^2 - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2 \geqslant 0.$$

Подставляя сюда $\lambda = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$, получаем $\|x\|^2 - \dfrac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \geqslant 0$. Дальше ясно. $\square$

Предложение 4.11. *Функция* $\|\cdot\|\colon H \to [0, +\infty)$*, заданная формулой* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$*, является нормой на* H*.*

Доказательство. Применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, для любых элементов $x, y \in H$ получаем:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \\ \leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Это доказывает справедливость неравенства треугольника. Остальные свойства нормы очевидны. $\square$

В дальнейшем каждое предгильбертово пространство будет рассматриваться как нормированное относительно введенной выше нормы.

Предложение 4.12 (тождество параллелограмма)**.** *В предгильбертовом пространстве справедливо тождество*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Доказательство. Прямая проверка. $\square$

Из тождества параллелограмма нетрудно вывести, что далеко не всякая норма порождается скалярным произведением; более того, далеко не всякая норма эквивалентна норме, порожденной скалярным произведением (см. задачи листка 4). Так что предгильбертовы пространства — это весьма специальный класс нормированных пространств.

Предложение 4.13. *Для любого предгильбертова пространства* H *скалярное произведение* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\colon H \times H \to \mathbb{C}$ *— непрерывная функция.*

Докажите это утверждение сами в качестве упражнения.

Определение 4.7. *Гильбертово пространство* — это предгильбертово пространство, полное относительно нормы $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Примеры 4.4. Предгильбертовы пространства из примеров 4.1–4.3 являются гильбертовыми пространствами (см. следствие 3.11 и пример 3.4). Пространство $C[a, b]$, снабженное унаследованным из $L^2[a, b]$ скалярным произведением, является неполным предгильбертовым пространством (см. задачу 3.9 из листка 3).