

ЛИСТОК 3

Пусть L – оператор формы на гладкой поверхности $S = \{x \mid f(x) = 0\}$

1. Доказать формулу (5) из лекции 3.
2. Обоснуйте «практическую формулу» для вычисления гауссовской кривизны.
3. Вычислить кривизну эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

4. Найти удобную формулу для вычисления кривизны поверхности $z = f(x, y)$ в той ее точке, где $f'_x = f'_y = 0$
5. * На каждой компактной ориентированной гиперповерхности $S \subset \mathbb{E}^{n+1}$ существует точка, в которой вторая фундаментальная форма знакоопределена.
6. Пусть S связная компактная ориентированная гиперповерхность в \mathbb{E}^{n+1} . Тогда гауссова кривизна $k(m)$ поверхности S в точке m отлична от нуля для всех точек $m \in S$ тогда и только тогда, когда вторая фундаментальная форма положительно или отрицательно определена (такие квадратичные формы называются знакоопределенными).
7. Разобраться с оператором формы для $n = 1$ и, тем самым, научиться считать кривизны ориентированных кривых.
8. Вычислить гауссову кривизну цилиндра над плоской кривой.
9. Пусть X и Y – гладкие векторные поля, которые касаются гиперповерхности S . Доказать, что

$$\langle \partial_X Y, N \rangle = \langle \partial_Y X, N \rangle$$

и вывести отсюда, что поле $\partial_Y X - \partial_X Y$ касательно к S (поле $\partial_Y X - \partial_X Y$ называется скобкой Ли $[X, Y]$ полей X и Y).

10. Выполнить все 6 упражнений, которые встречаются по ходу третьей лекции.