Вариант 1

Задачи 1–3 являются обязательными и необходимыми для получения максимальной оценки. Задача 4 — дополнительная и будет оцениваться отдельно; приступайте к ней, если останется время после решения первых трех задач.

На контрольной разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться и пользоваться книгами, интернетом и т.п.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

1. Линейный оператор $T\colon L^1[0,1] \to L^1[0,1]$ задан формулой $(Tf)(x) = f(\sqrt{x})$.

1) Докажите, что T действительно переводит $L^1[0,1]$ в $L^1[0,1]$, и что он ограничен.
2) Вычислите $\|T\|$.
3) Достигает ли T нормы?

2. Пусть $X = C_b(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

1) Мажорирует ли норма $\|\cdot\|_1$ норму $\|\cdot\|_\infty$ на X? А наоборот?
2) Докажите полноту X относительно нормы $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f\|_1$.
3) Полно ли X относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$?

3. Сепарабельно ли пространство $\mathscr{B}(L^2[0,1])$?

4. Пусть G — компактная топологическая группа (т.е. группа, снабженная компактной топологией, относительно которой операция умножения и операция $g \mapsto g^{-1}$ непрерывны). Пусть $\pi\colon G \to \mathrm{GL}(X)$ — представление G в нормированном пространстве X, такое, что соответствующее действие $G \times X \to X$ непрерывно. Докажите, что на X есть норма, эквивалентная исходной, относительно которой все операторы $\pi(g)$ $(g \in G)$ изометричны.

Вариант 2

Задачи 1–3 являются обязательными и необходимыми для получения максимальной оценки. Задача 4 — дополнительная и будет оцениваться отдельно; приступайте к ней, если останется время после решения первых трех задач.

На контрольной разрешается пользоваться любыми своими записями. Не разрешается общаться и пользоваться книгами, интернетом и т.п.

В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные в лекциях, и на сданные Вами задачи из листков.

1. Линейный оператор $T\colon L^2[0,1] \to L^1[0,1]$ задан формулой $(Tf)(x) = f(\sqrt{x})$.

1) Докажите, что T действительно переводит $L^2[0,1]$ в $L^1[0,1]$, и что он ограничен.
2) Вычислите $\|T\|$.
3) Достигает ли T нормы?

2. Пусть $X = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

1) Мажорирует ли норма $\|\cdot\|_1$ норму $\|\cdot\|_2$ на X? А наоборот?
2) Докажите полноту X относительно нормы $\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_2$.
3) Полно ли X относительно нормы $\|\cdot\|_2$?

3. Сепарабельно ли пространство $\mathscr{B}(c_0)$?

4. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Зафиксируем $p \geqslant 2$ и обозначим через $\mathbb{K}^n_p$ пространство $\mathbb{K}^n$, снабженное нормой $\|x\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$. Пусть $T\colon \mathbb{K}^n_p \to \mathbb{K}^n_2$ — изоморфизм векторных пространств. Докажите, что $\|T\|\|T^{-1}\| \geqslant n^{1/2-1/p}$. Выведите отсюда, что при $p, q \geqslant 2,\ p \neq q$, пространства $\mathbb{K}^n_p$ и $\mathbb{K}^n_q$ не являются изометрически изоморфными (если $n \neq 1$).