4.1. Пусть f — полуторалинейная форма на векторном пространстве H. Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, и пусть $\zeta \in \mathbb{C}$ — корень из 1 степени n, $\zeta \neq \pm 1$. Докажите *тождество поляризации*:

$$f(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k f(x + \zeta^k y, x + \zeta^k y).$$

4.2. Пусть H — предгильбертово пространство. Докажите, что скалярное произведение непрерывно как функция на $H \times H$.

4.3. Докажите, что в любом предгильбертовом пространстве справедливо *тождество параллелограмма*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

4.4. Покажите, что норма на пространствах $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, ℓ^p, $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, $L^p(X,\mu)$ (где (X,μ) — пространство с мерой, содержащее хотя бы два непустых измеримых подмножества) при $p \neq 2$ и $n > 1$ не порождается никаким скалярным произведением.

4.5. Придумайте обобщение тождества параллелограмма на случай n векторов.

4.6. Покажите, что норма на пространствах ℓ^p, $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, $L^p(X,\mu)$ (где (X,μ) — пространство с мерой, содержащее бесконечно много измеримых подмножеств) при $p \neq 2$ не эквивалентна никакой норме, порожденной скалярным произведением.

4.7-b (*теорема фон Ноймана–Йордана*)**.** Пусть H — нормированное пространство, в котором выполняется тождество параллелограмма. Покажите, что формула

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2 \qquad (x, y \in H)$$

задает скалярное произведение на H, и что норма, порожденная этим скалярным произведением, совпадает с исходной.

4.8. 1) Постройте пример предгильбертова пространства H и замкнутого векторного подпространства $H_0 \subset H$, для которых $H_0 \oplus H_0^\perp \neq H$.
2) Покажите, что такое подпространство H_0 есть в любом неполном предгильбертовом пространстве.

4.9. Постройте унитарный изоморфизм гильбертовых пространств $L^2[a,b]$ и $L^2[0,1]$.

4.10. Докажите, что пополнение предгильбертова пространства является гильбертовым пространством.

4.11. Докажите, что факторпространство (пред)гильбертова пространства по замкнутому векторному подпространству само является (пред)гильбертовым пространством.

4.12. *Система Уолша* — это система функций на $[0,1]$, полученная из системы Радемахера $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ добавлением функции $r_0 \equiv 1$ и всевозможных произведений вида $r_{i_1} \cdots r_{i_n}$, где $i_1 < \ldots < i_n$. Докажите, что система Уолша — ортонормированный базис в $L^2[0,1]$.

4.13. *Система Хаара* — это система функций на $[0,1]$, задаваемых формулами

$$\chi_k^{(i)}(t) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } \frac{2i-2}{2^{k+1}} \leqslant t < \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ -2^{k/2} & \text{при } \frac{2i-1}{2^{k+1}} \leqslant t < \frac{2i}{2^{k+1}}, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

($k = 0, 1, \ldots;\ i = 1, \ldots, 2^k$). Докажите, что система Хаара — ортонормированный базис в $L^2[0,1]$.

4.14. Докажите, что ортонормированная система в сепарабельном предгильбертовом пространстве не более чем счетна.

4.15. Докажите, что пространство $C_c^\infty(a,b)$ гладких функций на интервале (a,b) с компактным носителем плотно в $L^p[a,b]$ для всех $1 \leqslant p < \infty$.

Определение 4.1. Пусть $f \in L^2[a,b]$. Функция $f' \in L^2[a,b]$ называется *обобщенной производной* функции $f \in L^2[a,b]$, если

$$\int_a^b f'\varphi\, dt = -\int_a^b f\varphi' dt$$

для всех $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$.

4.16. Докажите, что если $f \in L^2[a,b]$ обладает обобщенной производной f', то f' единственна (как элемент пространства $L^2[a,b]$).

4.17. *Пространство Соболева* $W^{1,2}(a,b)$ определяется как множество всех $f \in L^2[a,b]$, обладающих обобщенной производной $f' \in L^2[a,b]$. Докажите, что $W^{1,2}(a,b)$ — гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b (f\bar{g} + f'\bar{g}')\, dt.$$

4.18. 1) Пусть (e_n) — стандартный ортонормированный базис в пространстве ℓ^2. Положим $x = \sum_n n^{-1} e_n$ и $H_0 = \operatorname{span}\{x, e_2, e_3, \ldots\}$. Покажите, что $(e_2, e_3, \ldots)$ — максимальная ортонормированная система в H_0, не являющаяся тотальной.
2) Докажите, что в любом неполном сепарабельном предгильбертовом пространстве существует максимальная ортонормированная система, не являющаяся тотальной.

4.19. Докажите, что ортонормированная система (e_i) в предгильбертовом пространстве H тотальна тогда и только тогда, когда для каждого $x \in H$ выполнено равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum_i |\langle x, e_i\rangle|^2$.

4.20-b. 1) Постройте пример предгильбертова пространства, чья гильбертова размерность строго меньше, чем у его пополнения.
2) Постройте пример предгильбертова пространства, в котором нет ортонормированного базиса.