5.1. Напомним (см. лекцию), что если $1 < p, q < +\infty$ и $1/p + 1/q = 1$, то существует изометрический изоморфизм $\ell^q \xrightarrow{\sim} (\ell^p)^*$. Следуя той же схеме, постройте изометрические изоморфизмы **1)** $\ell^\infty \xrightarrow{\sim} (\ell^1)^*$; **2)** $\ell^1 \xrightarrow{\sim} (c_0)^*$.

5.2. Обозначим любой из трех изоморфизмов, упомянутых в предыдущей задаче, через α. Когда функционал $F_a = \alpha(a)$ достигает нормы?

5.3. Можно ли тем же способом, что и в задаче 5.1, построить изометрический изоморфизм $\ell^1 \cong (\ell^\infty)^*$?

5.4. Опишите сопряженные к следующим операторам:
1) диагональный оператор в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0;
2) оператор правого сдвига в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0;
3) оператор двустороннего сдвига в $\ell^p(\mathbb{Z})$ (где $1 \leqslant p < \infty$) или в $c_0(\mathbb{Z})$;
4) оператор неопределенного интегрирования в $L^2[0,1]$ (см. задачу 2.5);
5) интегральный оператор Гильберта–Шмидта в $L^2(X,\mu)$ (см. задачу 2.7).

5.5. 1) Докажите, что линейный функционал на нормированном пространстве ограничен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто. **2)** Верно ли аналогичное утверждение для линейных операторов?

5.6. Докажите, что на любом бесконечномерном нормированном пространстве существует разрывный линейный функционал.

Указание: воспользуйтесь тем, что в любом векторном пространстве есть алгебраический базис (т.е. максимальное линейно независимое подмножество).

5.7. Пусть $X = \mathbb{R}^2_p$ — плоскость, снабженная нормой $\|\cdot\|_p$, и пусть $X_0 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset X$ — «ось абсцисс». Зададим функционал $f_0 \colon X_0 \to \mathbb{R}$ формулой $f_0(x,0) = x$. Ясно, что $\|f_0\| = 1$. Сколько существует линейных функционалов на X, продолжающих f_0 и имеющих норму 1? (Рассмотрите всевозможные $p \in [1, +\infty]$.)

5.8. Пусть X — нормированное пространство.
1) Докажите, что если X^* сепарабельно, то и X сепарабельно.
2) Верно ли обратное?
3) Покажите, что не существует топологического изоморфизма между $(\ell^\infty)^*$ и ℓ^1.

5.9-b. Докажите, что c_0 не изоморфно сопряженному ни к какому нормированному пространству.

5.10-b. Пусть (X,μ) — пространство с мерой и $1 < p, q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$.
1) Постройте изометрический изоморфизм $L^p(X,\mu)^* \cong L^q(X,\mu)$.
2) В предположении, что μ σ-конечна, постройте изометрический изоморфизм $L^1(X,\mu)^* \cong L^\infty(X,\mu)$.
Указание. Отображение $L^q(X,\mu) \to L^p(X,\mu)^*$ строится так же, как в случае $X = \mathbb{N}$ (см. лекцию). Для доказательства его сюръективности воспользуйтесь теоремой Радона–Никодима.