

Математические основы естествознания

Листок 4. Скалярное поле, продолжение. Многокомпонентные поля и поля со связями.

Список 1. Задачи для обсуждения на семинаре

1. Найти сохраняющиеся токи в модели с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\varphi}, \partial^\mu \vec{\varphi}) - V(|\vec{\varphi}|^2)$$

где поле $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ – вектор в “изотопическом” пространстве \mathbb{R}^3 . Скалярное произведение $(\vec{\varphi}, \vec{\phi})$ в “изотопическом” пространстве имеет вид $(\vec{\varphi}, \vec{\phi}) = \varphi_1\phi_1 + \varphi_2\phi_2 + \varphi_3\phi_3$, $|\vec{\varphi}|^2 = (\varphi, \varphi)$.

2. Рассмотрим действие

$$S = \int |\partial_\mu \Phi|^2 d^4x$$

для 2-компонентного комплексного скалярного поля $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ с условием $|\Phi|^2 = \Phi\Phi^\dagger = \Phi_1\bar{\Phi}_1 + \Phi_2\bar{\Phi}_2 = 1$.

- а) Вывести уравнения движения.
- б) Есть ли в теории сохраняющиеся токи? Если есть, найти их.

Математические основы естествознания

Листок 4. Скалярное поле, продолжение. Многокомпонентные поля и поля со связями.

Список 2. Задачи для письменного домашнего решения

Обязательные задачи: 1а, 2а.

1. Рассмотрим действие

$$S = \frac{1}{2} \int |\partial_\mu \vec{n}|^2 d^4x$$

для 2-компонентного вещественного скалярного поля $\vec{n} = (n_1, n_2)$ со связью $|\vec{n}|^2 = n_1^2 + n_2^2 = 1$.

а) Вывести уравнение движения двумя способами (путем введения множителя Лагранжа и без него, с помощью явного разрешения связи) и сравнить результаты.

б) Есть ли в теории сохраняющиеся токи? Если есть, найти их.

2. Простейшее взаимодействие двух вещественных скалярных полей φ_1, φ_2 можно описать плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\varphi_1; m_1) + \mathcal{L}_0(\varphi_2; m_2) + g\varphi_1\varphi_2$$

где $\mathcal{L}_0(\varphi; m) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2$ – плотность лагранжиана свободного поля, а g – константа связи.

а) Вывести уравнения движения.

б) Можно ли найти общее решение уравнений движения? Если да, найти его.

в) Есть ли в теории сохраняющиеся токи? Если есть, найти их.