6.1. Пусть X — нормированное пространство, $x_1, \ldots, x_n \in X$ — линейно независимые векторы. Докажите, что для любого набора чисел $c_1, \ldots, c_n$ найдется такой $f \in X^*$, что $f(x_i) = c_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

6.2. Пусть X и Y — нормированные пространства, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство и $T_0 \colon X_0 \to Y$ — ограниченный линейный оператор. Обязательно ли T_0 продолжается до ограниченного линейного оператора $T \colon X \to Y$?

6.3. Пусть X — сепарабельное нормированное пространство. Не пользуясь леммой Цорна (см. доказательство теоремы Хана–Банаха с лекции), докажите, что для любого векторного подпространства $X_0 \subseteq X$ и любого $f_0 \in X_0^*$ существует такой $f \in X^*$, что $f|_{X_0} = f_0$ и $\|f\| = \|f_0\|$.

6.4. Пусть S — поглощающее множество в векторном пространстве X над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Обозначим через p_S функционал Минковского множества S. Докажите следующие утверждения:

1) $p_S(\lambda x) = \lambda p_S(x)$ для всех $x \in X,\ \lambda \geqslant 0$.
2) Если S выпукло, то $p_S(x + y) \leqslant p_S(x) + p_S(y)$ для всех $x, y \in X$.
3) Если S закруглено, то $p_S(\lambda x) = |\lambda| p_S(x)$ для всех $x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}$.
4) Если S выпукло, то $\{x : p_S(x) < 1\} \subseteq S \subseteq \{x : p_S(x) \leqslant 1\}$.

6.5. Докажите, что

1) сумма любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество;
2) пересечение любого семейства выпуклых множеств — выпуклое множество;
3) образ и прообраз выпуклого множества при линейном отображении — выпуклые множества;
4) замыкание и внутренность выпуклого множества в нормированном пространстве — выпуклые множества;
5) аналогичные утверждения справедливы для закругленных множеств.

Определение 6.1. Пусть X — множество, $\ell^\infty(X)$ — пространство всех ограниченных $\mathbb{C}$-значных функций на X. Линейный функционал $m \colon \ell^\infty(X) \to \mathbb{C}$ называется *положительным*, если $m(f) \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$.

6.6. 1) Докажите, что положительный функционал m на $\ell^\infty(X)$ ограничен, и что $\|m\| = m(1)$.
2) Докажите, что ограниченный линейный функционал m на $\ell^\infty(X)$, удовлетворяющий условию $\|m\| = m(1)$, положителен.

Указание. В п. 1 воспользуйтесь тем, что формула $\langle f, g \rangle = m(f\bar{g})$ задает неотрицательно определенную эрмитову форму на $\ell^\infty(X)$. В п. 2 достаточно показать, что если $\|m\| = m(1) = 1$, то для $f \geqslant 0$ число $m(f)$ принадлежит любому кругу, содержащему множество значений f.

Определение 6.2. Пусть G — полугруппа. Для любой функции f на G и любого $x \in G$ определим функцию $L_x f$ формулой $(L_x f)(y) = f(xy)$. Полугруппа G называется *аменабельной*, если на $\ell^\infty(G)$ существует положительный линейный функционал m, удовлетворяющий условиям $m(1) = 1$ и $m(L_x f) = m(f)$ для всех $f \in \ell^\infty(G)$ и всех $x \in G$. Любой такой функционал m называется *инвариантным средним.*

6.7. Докажите, что любая конечная группа аменабельна.

6.8. Докажите, что группа $\mathbb{Z}$ аменабельна.

6.9. Докажите, что полугруппа $\mathbb{N}$ аменабельна, причем для любого инвариантного среднего m на ℓ^∞ и любой сходящейся числовой последовательности $x = (x_n)$ справедливо равенство $m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

6.10-b. Докажите, что свободная группа с двумя образующими не аменабельна.

Информация к размышлению. Известно, что любая абелева полугруппа аменабельна. С другой стороны, свободная группа с $n > 1$ образующими не аменабельна. Инвариантные средние и аменабельные группы имеют многочисленные приложения в различных областях математики. См. по этому поводу книги Ф. Гринлифа «Инвариантные средние на топологических группах» (М.: Мир, 1973); S. Wagon, “The Banach–Tarski Paradox” (Cambridge Univ. Press, 1985); V. Runde, “Lectures on amenability” (Springer, 2002).

6.11. Докажите, что любое банахово пространство X изометрически изоморфно факторпространству пространства $\ell^1(S)$ для некоторого множества S. (*Указание:* в качестве S можно взять единичный шар пространства X.)

6.12. Докажите, что любое нормированное пространство X изометрически вкладывается в $\ell^\infty(S)$ для некоторого множества S. (*Указание:* в качестве S можно взять единичный шар пространства X^*.)

Определение 6.3. Нормированное пространство Y называется *инъективным*, если для любого нормированного пространства X и любого векторного подпространства $X_0 \subset X$ каждый ограниченный линейный оператор $T_0\colon X_0 \to Y$ продолжается до ограниченного линейного оператора $T\colon X \to Y$. Если вдобавок существует такое $C > 0$, что оператор T можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $\|T\| \leqslant C\|T_0\|$, то Y называется *C-инъективным.*

Из теоремы Хана–Банаха следует, что основное поле $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) 1-инъективно.

6.13-b. Докажите, что инъективное нормированное пространство полно.

6.14-b. Докажите, что банахово пространство $\ell^\infty(S)$ 1-инъективно для любого множества S.

6.15-b. Докажите, что если банахово пространство инъективно, то оно C-инъективно для некоторой константы C.

Определение 6.4. Банахово пространство Y называется *проективным*, если для любого банахова пространства X и любого замкнутого векторного подпространства $X_0 \subset X$ каждый ограниченный линейный оператор $T_0\colon Y \to X/X_0$ поднимается до ограниченного линейного оператора $T\colon Y \to X$ в том смысле, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "Q"] \\ Y \arrow[ur, "T"] \arrow[r, "T_0"'] & X/X_0 \end{tikzcd}$$

Если вдобавок существует такое $C > 0$, что для каждого $\varepsilon > 0$ оператор T можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $\|T\| \leqslant (C + \varepsilon)\|T_0\|$, то Y называется *C-проективным.*

6.16-b. Докажите, что банахово пространство $\ell^1(S)$ 1-проективно для любого множества S.

6.17-b. Докажите, что если банахово пространство проективно, то оно C-проективно для некоторой константы C.